ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-DEUXIÈME — ANNÉE 1945

(81e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1945
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-DEUXIÈME — ANNÉE 1945

(81e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1945

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

ADMINISTRATION :

Directeur : M. Paul MONTEL,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : M. Étienne THOUZELLIER.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR LA RÉALISATION DES ESPACES PONCTUELS A TORSION EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

PAR M. OCTAVE GALVANI.

INTRODUCTION.

C'est dans les travaux de Gauss [1] (1) que l'on trouve le premier exemple d'un espace non holonome, l'exemple devenu banal d'une surface plongée dans l'espace ordinaire. La géométrie sur la surface, considérée comme un continu à deux dimensions, est complètement définie quand on connaît l'expression de la distance de deux points infiniment voisins. Cette expression est induite sur la surface par la métrique euclidienne de l'espace ambiant : c'est donc le « point de vue *externe* » [8] de définition d'un espace de Riemann, qui est à l'origine de la théorie.

Si l'on se donne, au contraire *a priori* dans un continuum, l'expression de la distance élémentaire, on se libère de l'existence d'un espace ambiant. Ce point de vue interne suffit pour édifier complètement la géométrie riemannienne. Mais il n'en reste pas moins que le point de vue externe se trouve à l'origine non seulement de la théorie elle-même, mais aussi du nouvel essor qu'elle a pris, en 1917, avec la notion de parallélisme de Levi-Civita. Cela tient sans doute à ce qu'il donne une image plus concrète des espaces de Riemann.

(1) Les crochets renvoient aux numéros d'ordre de la bibliographie.

L'*équivalence locale* des deux points de vue résulte du théorème de Schlaëfli [2], d'après lequel tout espace de Riemann est localement réalisable par une variété plongée dans un espace euclidien à nombre suffisant de dimensions. Ce théorème, énoncé vers 1873, ne fut démontré en toute rigueur que beaucoup plus tard, en 1926 [10 et 11]. *L'impossibilité d'une équivalence globale* a été établie par Hilbert [5], qui a montré l'impossibilité de réaliser tout le plan de Lobatchewsky au moyen d'une surface euclidienne privée de singularités.

Depuis 1922, les espaces de Riemann ne sont qu'un Chapitre bien particulier de la théorie des espaces non holonomes de M. Élie Cartan [6]. Cette théorie procède du point de vue *interne*. Les espaces de Riemann sont les *espaces ponctuels sans torsion à connexion euclidienne* [14].

La question se pose alors de savoir s'il est possible, au moins localement, de concevoir les espaces non holonomes du point de vue externe. Or, sans même sortir des connexions ponctuelles euclidiennes, il n'existait jusqu'ici aucun schéma général externe de ces espaces. La connexion *induite par l'espace ambiant* [8] sur une variété ponctuelle euclidienne est toujours sans torsion, de sorte qu'aucun espace à torsion ne peut être réalisé par une variété ponctuelle, si du moins on désire attâcher à cette variété sa connexion intrinsèque, c'est-à-dire celle qui rend le mieux compte des relations de la variété avec l'espace ambiant.

Le but de ce travail est de donner, en géométrie *euclidienne*, une image externe des espaces *ponctuels* non holonomes les plus généraux (*pouvant comporter une torsion*). La méthode consiste à utiliser, pour réaliser ces espaces, des variétés *non ponctuelles* (congruences de droites, d'éléments linéaires, etc...), sur lesquelles est définie une connexion *ponctuelle* intrinsèque. Les espaces sans torsion entrent comme cas particuliers dans ces schémas généraux.

Une fois définie, sur une variété appartenant à une certaine catégorie, une connexion d'une certaine espèce, il faut encore, pour le but que nous nous proposons, montrer qu'étant donnée une connexion de cette espèce, on peut trouver une variété de la catégorie envisagée, qui, plongée dans un espace holonome convenable, admette localement cette connexion donnée. C'est l'objet des *théorèmes d'existence* démontrée aux Chapitres IV et V, qui généralisent en somme le théorème de Schlaëfli.

Cette étude, limitée aux connexions ponctuelles euclidiennes, peut néanmoins *fournir un cadre pour une étude analogue concernant d'autres connexions* (d'autres groupes fondamentaux ou d'autres éléments générateurs). D'où l'emploi exclusif de la méthode du repère mobile (qui fournit un cadre analytique général pour la théorie des espaces non holonomes); d'autre part les diverses connexions induites envisagées ont été définies conformément à des *principes généraux* qui ne précisent ni groupe fondamental, ni élément géné-

rateur. — *Nous publierons par ailleurs* [18] *un exemple d'une telle extension*, relatif aux connexions ponctuelles *affines* à n dimensions, dans le cas général (réalisation toujours possible dans l'espace affine à n^2 dimensions) et dans le cas de la géométrie des groupes de Lie [12], où certaines réalisations se rattachent au problème de la *représentation linéaire* de ces groupes.

Les principes généraux sont posés au cours du premier Chapitre, qui rappelle en même temps, en les présentant sous une forme aisément généralisable, des considérations classiques relatives aux surfaces euclidiennes. Les trois Chapitres suivants sont consacrés aux connexions euclidiennes à deux dimensions. Le Chapitre II définit la connexion ponctuelle induite sur une *congruence d'éléments linéaires* plongée dans l'espace ordinaire. Cette définition est susceptible d'une interprétation de nature mécanique. Elle fournit d'autre part, comme cas particuliers, la connexion d'une congruence de *droites* [16 *a*], et la connexion riemannienne classique d'une surface.

Le Chapitre III contient une suite de théorèmes sur les *propriétés géométriques de cette connexion induite;* les résultats classiques relatifs à la courbure de Gauss et à certaines propriétés des géodésiques, en sont des cas particuliers. Nous faisons d'abord une étude complète de la courbure et de la torsion, *en les reliant à certains éléments géométriques* tels que les foyers de la congruence. Les résultats obtenus sont très simples dans le cas général (n^{os} 20 et 23), un peu plus compliqués dans certains cas de dégénérescence. D'autre part, l'étude des congruences admettant la même connexion induite conduit en particulier à l'*applicabilité de leurs surfaces polaires* (1).

Nous étudions ensuite les « pseudo-lignes » (variétés à un paramètre) de la congruence, qui correspondent à des lignes remarquables de l'espace réalisé, par exemple aux *droites* (définies par le transport parallèle), ou aux *géodésiques* (2) (extrémales de la longueur). Par exemple, les pseudo-droites sont étroitement liées *à des développables d'un complexe* associé à la congruence. Signalons aussi une relation entre les *pseudo-droites géodésiques* éventuelles et les *géodésiques de la surface polaire*, ainsi que l'étude *des espaces admettant un réseau de droites geodésiques* (n° 41).

Les congruences à *cône directeur*, qui réalisent les espaces *à parallélisme absolu*, font l'objet d'une étude spéciale concernant le parallélisme et les pseudo-lignes remarquables. En particulier, nous mettons en évidence divers cas où le parallélisme induit se traduit par un parallélisme ordinaire dans l'espace ou par une égalité d'angles. Une étude analogue est faite pour les congruences *à plan directeur* qui correspondent aux espaces où *la torsion a une direction fixe*. Ils constituent une classe de congruences admettant *un*

(1) La surface polaire est l'enveloppe des plans normaux aux éléments générateurs en leur centre.

(2) On sait que ces deux familles sont distinctes, du moins dans le cas de deux dimensions [8].

réseau de pseudo-droites géodésiques, une autre classe étant formée de congruences de *normales à une développable* (le réseau en question est alors formé des plans normaux à la développable le long de ses génératrices). Le Chapitre se termine par une brève étude relative aux lignes de torsion et par deux exemples particuliers.

Le Chapitre IV a pour objet l'étude détaillée de la réalisation d'une connexion ponctuelle euclidienne à deux dimensions arbitrairement donnée, par une congruence d'éléments linéaires de l'espace ordinaire. Il contient principalement une démonstration du théorème d'existence (avec, dans le cas le plus général, une formulation simple du problème de Cauchy), et une étude plus directe du cas du parallélisme absolu, qui permet d'expliciter les résultats et surtout d'*indiquer des formes géométriques types* auxquelles peuvent se réduire les solutions (possibilité de *choisir le cône directeur*, ou, si la torsion a une direction fixe, de réaliser l'espace par des *congruences de normales à une droite*).

L'étude complète de la réalisation par des congruences de *droites* est donnée dans le cas du parallélisme absolu. Une étude analogue du cas général, publiée aux *Comptes rendus* [16 *b*], n'a pas été reproduite.

Le cinquième et dernier Chapitre est consacré aux connexions à n dimensions. Un premier théorème d'existence (n° 87) affirme la possibilité de les réaliser, au voisinage d'un point quelconque, par des variétés d'éléments plans (éléments à $n^2 - n$ dimensions) plongées dans l'espace euclidien à n^2 dimensions; une telle réalisation *existe quel que soit l'espace donné*. Un second théorème d'existence (n° 101) affirme la possibilité, *quand l'espace donné est générique*, de le réaliser, au voisinage d'un point générique, dans l'espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions, ce qui généralise exactement le théorème de Schläfli. D'autre part, la notion de classe des espaces de Riemann se généralise d'elle-même aux espaces à torsion, et à ce propos (n° 100) nous donnons brièvement quelques résultats relatifs aux espaces de classe 1 : généralisation des conditions de Ricci [3] et considérations géométriques sur les variétés réalisantes.

Tant par la vaste théorie géométrique à laquelle elle se rattache (espaces généralisés) que par les instruments analytiques employés (méthode du repère mobile, théorie des systèmes en involution), l'étude que nous venons d'analyser ne saurait se concevoir sans les travaux de M. Élie Cartan. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde et respectueuse reconnaissance pour l'intérêt très bienveillant qu'il a pris à mes recherches. Je tiens aussi à remercier bien vivement M. Georges Bouligand et M. René Garnier de la sympathie qu'ils m'ont témoignée; et je prie M. Paul Montel, qui a bien voulu accueillir ce travail dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*, de trouver ici l'expression de ma sincère gratitude.

CHAPITRE I.

LA CONNEXION INTRINSÈQUE TRADUITE SUR UNE SURFACE. PRINCIPES GÉNÉRAUX DE DÉFINITION D'UNE CONNEXION INDUITE.

1. Dans ce Chapitre préliminaire, nous allons reprendre les considérations bien connues, qui font d'une surface ordinaire un espace de Riemann à deux dimensions. Nous donnerons au passage un schéma général de définition d'une connexion induite, auquel se conformeront nos définitions ultérieures. Nous ferons aussi, à titre d'introduction, quelques rapides calculs analogues à ceux que nous retrouverons plus loin à propos des variétés non ponctuelles.

2. Regarder une surface V comme un espace de Riemann, c'est (1) la considérer comme formée de morceaux infiniment petits de plans euclidiens, avec une loi permettant de raccorder dans un même plan deux morceaux infiniment voisins. Cette loi sera caractérisée par l'effet du raccordement sur un repère rectangulaire.

a. Chaque morceau est formé des points M′ infiniment voisins des points M de V, et l'on assimile M′ à sa projection orthogonale m' dans le plan P(M) tangent en M à V.

b. La loi de raccordement est basée sur la définition du parallélisme de Levi-Civita, c'est-à-dire sur la convention suivante :

Convention. — L'angle de deux directions δ, δ' issues de deux points M et M′ infiniment voisins est défini comme égal, au second ordre près par rapport à MM′, à celui des projections orthogonales de δ, δ' dans P(M).

Une telle convention se légitime par le fait que l'angle de deux directions de P(M′) se conserve au second ordre près par la projection envisagée.

Loi de raccordement. — Si l'on choisit dans chaque plan P(M) un repère rectangulaire ρ(M), le raccordement de P(M′) dans P(M), déduit de la convention précédente, amènera ρ(M′) en ρ_M(M′) confondu au second ordre près avec la projection de ρ(M′) dans P(M).

M. Élie Cartan a montré (1) que, parmi toutes les connexions qu'on peut imaginer sur une surface (en modifiant la correspondance *a* ou la loi *b*), la précédente possède un caractère intrinsèque, et a étendu ces conceptions à d'autres géométries (affine, projective, conforme).

3. Si l'on effectue le raccordement de proche en proche le long d'un arc (C) tracé dans V, on obtient le *développement* (1) le long de (C) de l'espace de

(1) *Cf.* É. Cartan [8].

Riemann E réalisé par V. L'ensemble des développements le long des divers arcs tracés sur V constitue la carte de E. On peut encore dire que les opérations a et b du n° 2 définissent la *carte intrinsèque* de V, et que, par définition, l'espace E réalisé par V est celui qui admet pour carte la carte intrinsèque de V.

Les considérations précédentes n'exigent pas absolument que V soit engendrée par un point. Considérons par exemple une congruence V de droites S. Nous dirons encore que V réalise un espace ponctuel à connexion euclidienne, si l'on peut la considérer comme formée de morceaux infiniment petits $w(S)$ dont les éléments soient en correspondance biunivoque et continue avec les points d'un morceau infiniment petit $\gamma(S)$ d'un plan euclidien, et si l'on possède une loi de raccordement des $\gamma(S)$ et $\gamma(S')$ relatif à deux morceaux $w(S)$ et $w(S')$ infiniment voisins.

On pourra alors assimiler $w(S)$ à $\gamma(S)$ et l'on aura bien une connexion ponctuelle. On peut encore dire que $\gamma(S)$ constitue la *carte infinitésimale* de $w(S)$ et que la loi de raccordement permet de construire la *carte de V*. L'espace réalisé est alors par définition celui qui admet pour carte cette carte de V.

4. De façon générale, considérons une variété V à n dimensions d'élément générateur S, et d'autre part un espace holonome E à n dimensions, d'élément générateur s, et de groupe fondamental G.

Pour définir une connexion du groupe G et d'élément s intrinsèquement induite sur V, on établira, par des opérations géométriques intrinsèques :

a. Une correspondance biunivoque et continue entre les éléments S′ infiniment voisins de S et les éléments s' infiniment voisins de s d'un espace E, soit E(S) intrinsèquement lié à S ; l'ensemble $\gamma(S)$ des s' constituera la carte infinitésimale de V en S.

b. Une loi L de raccordement de E(S′) dans E(S). On choisira dans tout E(S) un *repère* [14] $\rho(S)$ d'élément origine s, et la loi L sera caractérisée par la position $\rho_s(S')$ que e raccordement assigne au repère $\rho(S')$ dans E(S).

Cette loi devra évidemment respecter la carte infinitésimale, c'est-à-dire que l'élément origine de $\rho_s(S')$ doit être l'élément s'.

Dans ces conditions, si l'on assimile les éléments S′ à leur carte $\gamma(S)$, V réalise un espace (holonome ou non) d'élément générateur s, du groupe fondamental G. On peut encore définir cet espace réalisé comme celui qui admet pour carte la carte intrinsèque de V déduite de la correspondance a et de la loi L.

Les connexions induites que nous nous proposons d'étudier sont des connexions ponctuelles (les s sont des points), mais les variétés V ne seront pas en général ponctuelles.

5. *Composantes relatives de la connexion induite.* — Dans le cas classique d'une surface euclidienne V, comme dans les cas plus généraux que nous venons d'envisager, la carte infinitésimale et la loi de raccordement sont bien définies par la connaissance *de la position de* $\rho_s(S')$ *par rapport à* $\rho(S)$; les origines des $\rho_s(S')$ donnent en effet la carte infinitésimale, et la loi de raccordement a été caractérisée justement par la position relative de ces repères.

Les paramètres de la transformation, rapportée à $\rho(S)$, qui amène $\rho(S)$ en $\rho_s(S')$ constituent les *composantes relatives de la connexion induite.* On peut les regarder comme les coordonnées de $\rho_s(S')$ par rapport à $\rho(S)$. Soit $T(S,S')$ la transformation du groupe G définie par ces paramètres. Nous supposerons les repères ρ choisis de façon que $T(S,S')$ soit une transformation infiniment petite. Cela aura toujours lieu dans les applications que nous avons en vue.

L'espace réalisé par la variété V peut donc être défini par la famille des transformations $T(S,S')$ associées à tout couple d'éléments S,S' infiniment voisins dans V. On reconnaît la définition générale des espaces non holonomes de M. Élie Cartan [14], dans laquelle les transformations $T(S,S')$ jouent précisément le même rôle qu'ici, à savoir :

1° On attache idéalement à tout élément de l'espace envisagé S un repère $\bar{\rho}(S)$ d'un espace holonome auxiliaire $E(S)$.

2° Les éléments S' infiniment voisins de S sont assimilés aux origines des repères $\bar{\rho}_s(S')$ obtenus en faisant subir à $\bar{\rho}(S)$ les transformations $T(S,S')$; et la loi de raccordement de $E(S')$ dans $E(S)$ assigne à $\bar{\rho}(S')$ la position $\bar{\rho}_s(S')$.

Dans le cas d'une connexion intrinsèquement induite par l'espace ambiant, on peut prendre pour $\bar{\rho}$ les repères $\rho(S)$ précédemment définis, et qui sont attachés intrinsèquement aux éléments S.

6. *Effets d'un changement de repères sur les composantes relatives.* — Un autre choix de repères $\rho(S)$ d'origine s donnerait, pour la même connexion, des composantes relatives différentes. Conserver la même connexion, c'est d'après sa définition, ne changer ni $\gamma(S)$, ni la loi de raccordement de $E(S')$ dans $E(S)$.

Soit $\rho^*(S)$ un repère de même origine que $\rho(S)$, et qui s'en déduit par une transformation $\Theta(S)$ du groupe G, laissant fixe l'origine. Par analogie avec la géométrie euclidienne nous appellerons *rotations* de telles transformations Θ.

a. On ne change pas $\gamma(S)$: $\rho_s^*(S')$ a donc même origine que $\rho_s(S')$.

b. On ne change pas la loi de raccordement de $E(S')$ dans $E(S)$: $\rho_s^*(S')$ se déduit de $\rho_s(S')$ par la rotation $\Theta(S')$.

La transformation $T^*(S,S')$ qui fait passer de $\rho^*(S)$ à $\rho_s^*(S')$ se déduit aisément de $T(S,S')$, de $\Theta(S)$ et de $\Theta(S')$. Nous dirons qu'elle est la transformée

de T(S,S') par la famille des Θ(S). *Les composantes relatives de la connexion induite sont définies à une transformation près par une famille de rotation.*

7. *Composantes de l'espace de Riemann* E' *réalisé par une surface.* — On a vu que ce sont les coordonnées du repère $\rho_M(M')$ par rapport à $\rho(M)$. Soit $\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2$ les vecteurs de base $\rho_M(M')$, dont l'origine est la projection m' de M' dans P(M), et soient $\vec{e}_1\vec{e}_2$ ceux de $\rho(M)$. Les composantes relatives ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} de E' sont définies par

$$(1)\qquad \begin{cases} m' = M + \varpi_1 \vec{e}_1 + \varpi_2 \vec{e}_2, \\ \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \varpi_{12}\vec{e}_2. \end{cases}$$

D'autre part les $\rho(M)$ forment avec le vecteur unitaire $\vec{e}_3$ normal à V un repère R(M) du premier ordre de V [14]. Considérons une famille analytique $\mathcal{F}$ de repères R(M) du premier ordre de V, et soient ω_i, ω_{ij} $(i,j = 1, 2, 3)$ ses composantes relatives, ce qui veut dire que le repère $R(M') = M'\vec{e}_i'$ est lié à $R(M) = M\vec{e}_i$ par les relations (au second ordre près) :

$$(2)\qquad \begin{cases} M' = M + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3, \\ \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2 + \omega_{13}\vec{e}_3, \end{cases}$$

$\vec{e}_3$ étant normal à V, $\omega_3 = 0$. En projetant $\rho(M')$ dans P(M) on doit obtenir au second ordre près $m'\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2$, donc

$$(3)\qquad \begin{cases} m' = M + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2, \\ \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2, \end{cases}$$

ce qui donne, en comparant à (1),

$$(4)\qquad \varpi_1 = \omega_1, \qquad \varpi_2 = \omega_2, \qquad \varpi_{12} = \omega_{12}.$$

Appelons composantes tangentielles du premier ordre de V, les composantes ω_1, ω_2, ω_{12} d'une famille de repères du premier ordre de V. Elles sont définies à une rotation près autour de $\vec{e}_3$, et l'on peut énoncer :

Les composantes relatives de la connexion induite sont les composantes tangentielles du premier ordre de la surface.

8. La non-holonomie de E' se déduit immédiatement de ses composantes relatives et des équations de structure $[E_2]$ et $[E_3]$ des déplacements à 2 et 3 dimensions. Le déplacement associé [14] à un « parallélogramme élémen-

taire » (¹) d'origine M a pour composantes par rapport au repère attaché au point M

$$\Omega_1 = \varpi'_1 - [\varpi_{12}\varpi_2], \qquad \Omega_2 = \varpi'_2 - [\varpi_1\varpi_{12}], \qquad \Omega_{12} = \varpi'_{12}.$$

Les équations $[E_3]$ qui nous seront utiles sont

$$\omega'_1 = [\omega_{12}\omega_2] + [\omega_3\omega_{31}], \qquad \omega'_2 = [\omega_1\omega_{12}] + [\omega_3\omega_{32}], \qquad \omega'_{12} = [\omega_{32}\omega_{31}].$$

Elles donnent, en tenant compte de $\omega_3 = 0$ et de (7.4) (²)

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \tag{1}$$

$$\Omega_{12} = [\omega_{32}\omega_{31}]. \tag{2}$$

Les équations (1) traduisent l'absence de torsion. L'équation (2) donne la courbure R, par la relation $\Omega_{12} = R[\omega_1\omega_2]$; en prenant le repère intrinsèque (tangent aux lignes de courbure de V) [14], on a

$$\omega_{31} = \frac{-\omega_1}{R_1}, \qquad \omega_{32} = \frac{-\omega_2}{R_2}, \qquad \text{d'où } R = \frac{-1}{R_1 R_2},$$

R_1, R_2 étant les rayons de courbure principaux, et l'on retrouve bien la courbure totale de V.

Enfin le ds^2 est le même que celui de V, ainsi que le confirment les égalités

$$ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_2^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \qquad [\text{d'après (7.4) et } \omega_3 = 0].$$

CHAPITRE II.

LA CONNEXION PONCTUELLE INTRINSÈQUE D'UNE CONGRUENCE D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES.

I. — Éléments linéaires et congruences.

9. Un élément linéaire est l'ensemble d'un point appelé son *centre*, et d'une droite passant par ce point (appelée son *support*). Étant donnés un point M et une droite D, la notation (M, D) représentera l'élément de centre M et de support D. Inversement, étant donné un élément S, la notation M(S) représentera son centre, et D(S) son support. Nous dirons aussi pour abréger qu'un vecteur (par exemple) porté par D(S) est *porté par l'élément* S.

Un élément linéaire est bien défini par son centre et la direction δ du support, qu'on appellera aussi *direction de l'élément;* on le représentera aussi par la notation (M, δ). Étant donné un vecteur libre $\vec{u}$, la notation $(M, \vec{u})$ représentera l'élément linéaire de centre M et parallèle à $\vec{u}$.

(¹) C'est-à-dire au cycle $M, M + dM, M + dM + \delta M + \delta\, dM, M + \delta M, M$, d et δ, étant deux symboles de différentiation échangeables entre eux.

(²) C'est-à-dire les équations (1) du n° 7. Cette notation sera adoptée toutes les fois qu'une relation figure dans un autre numéro que celui où elle est citée.

Nous aurons souvent à associer à S le plan normal en M(S) à D(S). Nous l'appellerons *plan polaire de* S et la représenterons par la notation P(S).

Enfin, nous ne considérerons que des éléments *orientés;* $(M, \vec{u})$ aura par définition le *sens de* $\vec{u}$, et les éléments $(M, \vec{u})$, $(M, -\vec{u})$ ne seront pas considérés comme identiques. Ils seront dits opposés.

10. Dans l'espace euclidien E_3 à trois dimensions, on peut attacher à tout élément S une famille à un paramètre de repères trirectangulaires $R = M\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$, dont l'origine M est au centre de S, et le troisième vecteur $\vec{e_3}$ porté par S et *de même sens* que S.

Soit $R_0 = O\vec{u_1}\vec{u_2}\vec{u_3}$ un repère de base arbitrairement choisi dans E_3, et soit S_0 l'élément linéaire $(O\vec{u_3})$. On peut amener S_0 en S par un déplacement $T_0(S)$ comprenant la translation $\overrightarrow{OM}$ suivie d'une rotation d'axe normal à $\vec{u_3}$. Alors $\vec{u_1}$ vient en $\vec{u_1'}$ et pour amener R_0 en R il faut lui faire subir, après le déplacement $T_0(S)$, une rotation $\Phi(S)$ d'angle $\varphi = \widehat{\vec{u_1'}, \vec{e_1}}$ autour de $\vec{e_3}$. S peut être défini par les 5 paramètres $\lambda_i(S)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ de $T_0(S)$ et les repères attachés à S par le paramètre φ. On les désignera par $R(S, \varphi)$.

11. Une congruence V d'éléments linéaires S est une famille à 2 paramètres de tels éléments (plongés dans l'espace euclidien E_3 à trois dimensions). Les $\lambda_i(S)$ sont alors fonctions de deux variables u_1, u_2, qu'on peut considérer comme les coordonnées de S dans V. Nous supposerons la congruence analytique, c'est-à-dire les $\lambda_i(S)$ fonctions analytiques de u_1, u_2.

La congruence sera dite *ordinaire*, si (comme c'est le cas général) *a.* les centres des éléments forment *effectivement* une surface, et *b.* les éléments ne sont pas tangents en leur centre à cette surface. Nous ne considérerons désormais que des congruences ordinaires.

On appellera *surface des centres* le lieu Σ des centres des éléments d'une congruence ordinaire V. On peut voir qu'alors les droites D(S) décrivent effectivement une congruence (congruence des supports).

Enfin nous dirons que V est une *congruence d'éléments normaux* si D(S) est normale à Σ en M(S), (ou encore *congruence orthogonale*), par opposition à une *congruence de normales* (dont les *supports* sont normaux à une surface).

12. *Repères attachés à une congruence* V. — Les repères $R(S, \varphi)$ attachés aux éléments S de V constituent les repères d'ordre zéro [14] de V. Si φ est une fonction analytique de u_1, u_2, les $R(S, \varphi)$ constituent une famille analytique $\mathcal{F}$ de repères d'ordre zéro de V. La famille la plus générale (analytique) de repères

d'ordre zéro est alors formée des repères $R(S, \varphi + \theta)$, θ étant une fonction (analytique) des u.

Soient $\omega_i, \omega_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ les composantes relatives de $\mathcal{F}$; le repère $R(S', \varphi')$ attaché à l'élément S' voisin de S est défini, au second ordre près, par

$$(1)\qquad \begin{cases} M' = M - \omega_1 \vec{e}_1 - \omega_2 \vec{e}_2 - \omega_3 \vec{e}_3 & (= M + dM) \\ \vec{e}_i' = \vec{e}_i + \sum \omega_{ij} e_j & \left(= \vec{e}_i + d\vec{e}_i\right) \qquad \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \end{cases}$$

Les ω sont des formes de Pfaff bien déterminées des six paramètres $z_1, z_2, \ldots, z_6$ du déplacement euclidien [14] qui définit $R(S, \varphi)$; par exemple ces six paramètres peuvent être les λ_i et φ. Pour la congruence V donnée, elles s'expriment en fonction de u_1, u_2 et de leurs différentielles, et ce sont ces formes à 2 variables attachées à V (et au choix de φ) que nous allons considérer. Nous allons caractériser certaines conditions relatives à V au moyen de ces composantes relatives. Nous donnerons à ω_1, ω_2, ω_{12} le nom de *composantes latérales*.

a. Caractérisation d'une congruence ordinaire. — Soient d et δ deux symboles de différentiation distincts, c'est-à-dire que $[du\delta u] \neq 0$. Si M décrit effectivement une surface, dM et δM ne sont pas colinéaires; et si cette surface n'est pas tangente en $M(S)$ à $D(S)$, $\vec{e}_3$ n'est pas dans le plan dM, δM, et

$$(2)\qquad \left(dM, \delta M, \vec{e}_3\right) \neq 0 \qquad \text{(produit mixte)}.$$

Réciproquement (2) entraîne dM, δM non colinéaires, et $\vec{e}_3$ non situé dans le plan $(dM, \delta M)$, et l'on a bien une congruence ordinaire (n° 11). Le calcul donne immédiatement

$$\left(dM, \delta M, \vec{e}_3\right) = \omega_1(d)\omega_2(\delta) - \omega_1(\delta)\omega_2(d) = [\omega_1 \omega_2].$$

Étant donnée une famille à deux paramètres de repères $M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'élément* $\left(M\vec{e}_3\right)$ *engendre une congruence ordinaire est que les composantes latérales de translation de la famille soient indépendantes*, ce qui se traduit par la relation

$$(3)\qquad [\omega_1 \omega_2] \neq 0.$$

b. Congruence orthogonale; congruence de normales. — Les premières sont visiblement caractérisées par la condition

$$(4)\qquad \omega_3 = 0,$$

qui exprime que dM est dans le plan polaire, donc normal au support.

Les congruences de normales sont caractérisées par

$$\omega_3' = 0. \tag{5}$$

En effet, il *faut et suffit* qu'il existe sur S un point $P = M + \rho \vec{e_3}$ tel que dP soit normal à D(S), donc ait une projection nulle sur $\vec{e_3}$, d'où

$$\omega_3 + d\rho = 0;$$

ω_3 est donc différentielle exacte, d'où la condition (5).

II. — Définition de la connexion induite.

13. Conformément au n° 4, nous avons à définir une carte infinitésimale et une loi de raccordement :

a. La carte infinitésimale $\gamma(S)$ s'obtiendra en projetant le centre d'un élément S′ infiniment voisin de S orthogonalement sur le plan polaire P(S). On a ainsi une correspondance continue associant à S′ un point m' infiniment voisin de M du plan P(S).

Cette correspondance est visiblement biunivoque si la congruence est ordinaire.

b. Le raccordement de P(S′) dans P(S) se fera par la même projection orthogonale sur P(S). Ayant choisi dans tout plan P(S) un repère rectangulaire $\rho(S)$ d'origine M, le raccordement amènera $\rho(S')$ en $\rho_S(S')$ confondu au second ordre près avec la projection de $\rho(S')$ dans P(S), ce qui est possible pour la même raison qu'au n° 2.

Le plan polaire et les opérations *a* et *b* sont intrinsèquement liés à S, et définissent la *carte intrinsèque* de V. En assimilant les éléments voisins de S à leur carte infinitésimale $\gamma(S)$, V réalise ainsi un espace *ponctuel* à connexion *euclidienne* à deux dimensions E′. Cet espace E′ admet pour carte la carte intrinsèque de V.

Cette connexion ponctuelle intrinsèquement induite sur V par l'espace ambiant sera appelée plus brièvement la *connexion* de V.

14. *Composantes relatives*. — Soit $M\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ un repère $R(S, \varphi)$ d'une famille analytique $\mathcal{F}$ d'ordre zéro. Prenons pour $\rho(S)$ le repère $M\vec{e_1}\vec{e_2}$. Soit $m'\vec{\varepsilon_1}\vec{\varepsilon_2}$ le repère $\rho_S(S')$. Les composantes relatives de la connexion de V sont des formes de Pfaff ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} (des variables u) définies par

$$\begin{cases} m' = M + \varpi_1 \vec{e_1} + \varpi_2 \vec{e_2}, \\ \vec{\varepsilon_1} = \vec{e_1} + \varpi_{12} \vec{e_2}. \end{cases} \tag{1}$$

Les équations (12.1) définissent $\rho(S')$ en fonction des composantes relatives ω de $\mathfrak{F}$; en particulier

$$(2)\qquad \begin{cases} M' = M + \varpi_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3. \\ \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2 + \omega_{13}\vec{e}_3. \end{cases}$$

La projection de $\rho(S')$ dans $P(S)$ s'en déduit aisément, et comme elle doit coïncider au second ordre près avec $\rho_S(S')$,

$$(3)\qquad \begin{cases} m' = M + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2 \end{cases} \qquad \text{(au 2e ordre près)};$$

la comparaison de (1) et (3) donne

$$(4)\qquad \boxed{\varpi_1 = \omega_1, \qquad \varpi_2 = \omega_2, \qquad \varpi_{12} = \omega_{12}.}$$

Les ϖ, comme d'ailleurs les composantes latérales ω_1, ω_2, ω_{12}, ne sont définis qu'à une rotation près des repères $\rho(S)$ autour de leur origine, et l'on peut énoncer :

Théorème. — *Les composantes de la connexion induite sont les composantes latérales d'ordre zéro de* V.

Remarque. — La condition (12.3) pour que V soit une congruence ordinaire entraîne bien

$$[\varpi_1 \varpi_2] \neq 0,$$

qui est nécessaire et suffisante pour que les ϖ définissent un espace ponctuel à 2 dimensions.

15. *Courbure et torsion.* — Le déplacement infinitésimal associé à un cycle infiniment petit se calcule comme au n° 8; en conservant les mêmes notations, on a, pour un « parallélogramme élémentaire » [14],

$$(1)\qquad \Omega_1 = [\omega_3 \omega_{31}], \qquad \Omega_2 = [\omega_3 \omega_{32}], \qquad \Omega_{12} = [\omega_{32}\omega_{21}].$$

Ici, ω_3 n'est en général pas nul, ni proportionnel à la fois à ω_{32} et ω_{31}, et la torsion n'est pas nulle.

Si le cycle a une origine fixe réalisée par l'élément S, le déplacement associé est proportionnel à l'aire α du cycle, c'est-à-dire que l'on a, pour la carte dans le plan polaire de S,

$$(2)\qquad \vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 = \alpha \vec{T}, \qquad \Omega_{12} = \alpha R.$$

Nous appellerons $\vec{T}$ le *vecteur torsion de* V *en* S, R la courbure de V en S; et, quand $R \neq 0$, nous appellerons *torsion relative de* V *en* S, le vecteur

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{T}}{R}.$$

Pour un parallélogramme élémentaire, on a

$$\vec{\Omega} = \vec{T}[\omega_1 \omega_2], \qquad \Omega_{12} = R[\omega_1 \omega_2], \tag{3}$$

d'où, d'après (1), le calcul de R et de $\vec{T} = T_1 \vec{e_1} + T_2 \vec{e_2}$ en fonction de u_1, u_2.

16. *Relation entre deux congruences de même connexion.* — Une congruence réalise un espace E′ bien déterminé. Inversement, il peut se faire que le même E′ soit réalisé par plusieurs congruences (*cf.* Chap. IV), par exemple V et V*. Soient S et S* les éléments réalisant un même point m de E′.

Il existe un déplacement amenant S* en S et la carte dans P(S*) de V* sur la carte dans P(S) de V, puisque ces cartes sont égales. Ce déplacement amène S′* homologue de S′ voisin de S en s'^* voisin de S; et d'après la définition de la carte, s'^* passe au deuxième ordre près par m', projection de M(S′) dans P(S), car m' est aussi la projection de M(s') dans P(S); il existe donc un déplacement T(S, S*) qui amène V* dans une position telle que S* soit en S, et, quel que soit S′ voisin de S, S′* rencontre S′ au second ordre près.

Nous verrons, au n° 25, que si le plan polaire P(S) dépend effectivement de deux paramètres et enveloppe une surface φ, il en est de même de P(S*), et que *les surfaces polaires ainsi définies sont applicables l'une sur l'autre*. Cela se produit pour tous les E′ à courbure non nulle.

17. *Interprétation de la connexion induite.* — On peut donner de la connexion induite sur V une interprétation en quelque sorte expérimentale. Imaginons qu'un élément linéaire mobile S soit maintenu dans V par certaines liaisons, et que, pour le déplacer, un observateur « habitant V » lui applique une force $\vec{F}$ normale en son centre à son support. Cet observateur pourrait considérer le déplacement faisant passer S de S_0 à une position voisine S'_0 comme se réduisant à sa projection sur $\vec{F}$ (qui intervient dans le travail de $\vec{F}$) et imaginer que les éléments de V se déduisent de proche en proche par de simples translations normales à leur support.

A ce titre il se croirait dans l'espace holonome $\bar{E}$ formé des éléments se déduisant d'un élément donné par les translations normales à son support. Cet espace $\bar{E}$ est analogue au plan (ponctuel) euclidien : un habitant de V pourrait se croire localement dans un plan euclidien.

Il pourrait prendre en chaque élément S, le repère $\rho = M\vec{e_1}\vec{e_2}$ pour repérer le déplacement de S. Soit ρ_0 et ρ'_0 les repères choisis en S_0 et S'_0. Si, S allant de S_0 à S_0, on entraîne avec lui le repère ρ (initialement en ρ_0) en l'empêchant de tourner autour de S, ρ vient en ρ', et, pour l'amener en ρ'_0, il faut encore lui faire subir la rotation ω_{12}. Le déplacement amenant ρ de ρ_0 à ρ'_0 se réduit donc, pour l'habitant de V, au déplacement de composantes ω_1, ω_2, ω_{12}, le déplacement de composantes ω_3, ω_{31}, ω_{32} étant assuré par les liaisons.

III. — Cas particuliers.

18. *Connexion intrinsèque d'une surface.* — Dans le cas d'une congruence V d'éléments normaux, la définition de la connexion de V (n° 13) est identique à la définition, d'après le n° 2, de la connexion de la surface des centres. Inversement, on peut toujours regarder la connexion intrinsèque d'une surface Σ donnée comme celle de la congruence V des éléments *normaux à* Σ (c'est-à-dire centrés sur Σ et dont les supports sont normaux à Σ), et *la connexion intrinsèque d'une surface est un cas particulier de celle d'une congruence d'éléments linéaires.*

On voit que ce cas correspond à $\omega_3 = 0$, qui entraîne bien une torsion nulle. L'applicabilité des surfaces polaires des congruences de même connexion a comme cas particulier celle des surfaces réalisant le même espace de Riemann.

Une étude directe de la carte met en évidence le fait que la torsion, non nulle dans le cas général, le devient pour une congruence orthogonale. Soit SS'S''S un cycle triangulaire infiniment petit, MM'M'' les centres correspondants; m'' la projection de M'' dans P (S') et μ'' sa représentation dans P (S) quand on raccorde λ(S') dans P(S). Et soient m', M_1'', m_1'' les projections de M', M'' et m'' dans P(S).

Quand on va directement de S à S'' (par une différentiation unique des u) le point représentatif de S'' est M_1''. Quand on parcourt le trajet SS'S'' correspondant à deux différentiations successives non proportionnelles, on arrive au point μ''. L'aire du cycle est de l'ordre de

$$\alpha = \overline{MM'}.\overline{M'M''}.$$

Les longueurs $m_1''\,\mu''$ et $m_1''\,M''$ sont respectivement de l'ordre de

$$\delta_1 = \overline{MM'^2}.\overline{M'M''} = \alpha.\overline{MM'}, \qquad \delta_2 = \overline{MM'}.\overline{M''m''}.$$

a. Si $\omega_3 \neq 0$, $M''m''$ est de l'ordre de $M'M''$ et $m_1''\,M_1''$ est de l'ordre de α ; δ_1 est infiniment petit devant α, et $M_1''\,\mu''$ est de l'ordre de α : la torsion n'est pas nulle.

b. Si $\omega_3 = 0$, $M''m''$ est au contraire de l'ordre de $\alpha\overline{M'M''^2}$ et $\delta_2 = \alpha\overline{M'M''}$; $M_1''\,\mu''$ est en plus de l'ordre de $\alpha(MM' + M'M'')$ et est infiniment petit devant α : la torsion est nulle. On peut d'ailleurs remarquer que la carte des points d'un cycle infiniment petit de Σ se fait par simple projection du cycle sur le plan tangent à l'origine, alors qu'il n'en est pas ainsi (d'après *a*) pour une congruence V quelconque. Remarquons aussi que cette construction valable pour les *points* du cycle, ne l'est pas pour les repères attachés à ces points.

19. *Connexion d'une congruence de droites.* — Soit une congruence Γ de droites D. La connexion ponctuelle intrinsèque de Γ sera, par définition, *celle*

de la congruence des éléments linéaires (M, D), M *étant l'origine du repère intrinsèque attaché à* D *dans* Γ.

a. Si D a deux foyers à distance finie, M est le milieu des foyers. La connexion se confond avec celle de la surface Σ lieu de M si D est normale à Σ ; Γ est alors une congruence de normales à une surface minima.

b. Si Γ a un cône directeur et s'il reste un foyer F à distance finie, M sera défini par $\overrightarrow{MF} = \vec{e}_3$.

c. Si D a toujours un foyer double à l'infini, on peut caractériser l'origine M du repère de Frenet (qui est alors du *second* ordre) par le fait que la trace du lieu de M dans le plan focal soit normale en M à D.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DE LA CONNEXION D'UNE CONGRUENCE D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES.

I. — Courbure et torsion (1).

20. La courbure et le vecteur torsion ont une signification géométrique. Nous allons voir d'abord que la *courbure* est liée de façon très simple aux *distances focales* de V, c'est-à-dire aux distances du centre M(S) aux foyers du support D(S) dans la congruence Γ des supports.

Reprenons le repère R(S, ρ) du n° 12, de composantes relatives ϖ_i, ϖ_{ij}. D'après le n° 15, la courbure R est donnée par

$$[\omega_{32}\omega_{31}] = R[\omega_1\omega_2]. \tag{1}$$

D'autre part les foyers $F = M + \rho\vec{e}_3$ de Γ sont tels que dF forme avec $\vec{e}_3$ un plan indépendant de du, dv; donc tels que les composantes de dF sur $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, à savoir

$$\omega_1 + \rho\omega_{31}, \qquad \omega_2 + \rho\omega_{32},$$

soient dans un rapport indépendant de du, dv, et l'équation aux *distances focales* ρ s'obtient en annulant le produit extérieur de ces composantes

$$[\omega_1 + \rho\omega_{31},\ \omega_2 + \rho\omega_{32}] = 0. \tag{2}$$

Les racines ne sont jamais nulles, ni indéterminées, si l'on a affaire à une congruence ordinaire ($[\omega_1\ \omega_2] \neq 0$). Le produit des racines ρ_1, ρ_2 vérifie

$$[\omega_{31}\omega_{32}]\rho_1\rho_2 = [\omega_1\omega_2]. \tag{3}$$

---

(1) Les principaux résultats de ce paragraphe ont été publiés aux *Comptes rendus* [16 *e*].

Deux cas se présentent : 1° (2) a ses deux racines finies : (1) et (3) donnent alors

$$R = \frac{-1}{\rho_1 \rho_2}; \tag{4}$$

2° (2) n'a pas ses deux racines finies ; c'est alors que

$$[\omega_{31}\, \omega_{32}] = 0. \tag{5}$$

La *direction* $\vec{e_3}$ ne dépend que d'*un* paramètre, et V admet *un cône directeur*. On peut dire qu'alors un foyer (au moins) est rejeté à l'infini et prendre pour ce foyer $\frac{1}{\rho} = 0$. D'autre part, d'après (1) et (5), on a bien $R = 0$, et (4) est encore vérifiée.

D'où la conclusion générale :

Théorème. — *La courbure est le produit, changé de signe, des inverses des distances focales.*

21. *Cas particuliers.* — 1° *Congruence orthogonale.* — La connexion est alors celle de la surface des centres, et l'on retrouve bien pour la courbure de l'espace de Riemann réalisé, la *courbure totale* de cette surface.

2° *Congruence de droites* (M milieu des foyers). — On a alors

$$\rho_1 = -\rho_2 = \rho, \qquad R = \frac{1}{\rho^2},$$

et la courbure est l'inverse du carré de la demi-distance focale.

3° *Courbure nulle.* — Il faut et il suffit que l'on ait (20.5). *Les congruences* V *à cône directeur réalisent des espaces à parallélisme absolu* [14] *et sont les seules à le faire.* Il en est évidemment de même des congruences de *droites*.

4° En particulier une surface Σ (c'est-à-dire une congruence orthogonale) réalise un plan euclidien si les normales ont un foyer au moins à l'infini, et l'on retrouve bien les développables.

22. *Torsion.* — C'est un vecteur du plan polaire. Elle peut toujours s'exprimer, de façon plus ou moins simple, en fonction des *éléments focaux* de V et de la normale en M à Σ. Mais, dans le cas général d'une *courbure non nulle*, la *torsion relative* $\frac{\vec{T}}{R}$ est liée très simplement au point caractéristique Φ du plan polaire. Après avoir examiné ce point de vue nous donnerons d'autres interprétations de la torsion susceptibles de la fournir quand un ou deux foyers sont rejetés à l'infini.

23. *Torsion des espaces à courbure non nulle.* — Comme $|\omega_{32}\,\omega_{31}| \neq 0$, on peut exprimer du_1, du_2 en fonction de ω_{31}, ω_{32} et écrire

$$\omega_3 = a_1\omega_{31} + a_2\omega_{32}. \tag{1}$$

1° Si l'on appelle $d\mu$ la projection de $d\mathrm{M}$ sur $\vec{e}_3$, et si l'on considère le vecteur

$$\vec{\mathrm{A}} = a_2\vec{e}_1 - a_1\vec{e}_2,$$

l'équation (1) donne

$$\vec{d\mu} = \vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{de}_3 \qquad \text{(produit vectoriel)}. \tag{2}$$

On peut donc attacher à tout élément S un vecteur $\vec{\mathrm{A}}$ du plan polaire (M) tels que $\vec{d\mu}$ se déduise de la variation élémentaire $\vec{de}_3$ de la direction de S par la relation (2) : nous appellerons $\vec{\mathrm{A}}$ le *vecteur d'obliquité* de V en S; il est nul pour une congruence orthogonale.

2° D'après le n° 15, la torsion relative $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{R}} = \Pi_1\vec{e}_1 + \Pi_2\vec{e}_2$ est donnée par

$$|\omega_3\,\omega_{31}| = \Pi_1|\omega_{32}\,\omega_{31}|, \qquad |\omega_3\,\omega_{32}| = \Pi_2|\omega_{32}\,\omega_{31}|.$$

En remplaçant ω_3 par son expression (1), il vient

$$\Pi_1 = a_2, \qquad \Pi_2 = -a_1,$$

soit

$$\vec{\Pi} = \vec{\mathrm{A}}. \tag{3}$$

La torsion relative est égale au vecteur d'obliquité de V.

Et l'on peut écrire

$$\omega_3 = \Pi_1\omega_{32} - \Pi_2\omega_{31}. \tag{4}$$

3° Le point caractéristique du plan polaire, soit

$$\Phi = \mathrm{M} + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \tag{5}$$

s'obtient en écrivant que $d\Phi$ a une composante nulle sur $\vec{e}_3$:

$$\omega_3 - x_1\omega_{31} - x_2\omega_{32} = 0. \tag{6}$$

D'où $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, et le point Φ est unique et à distance finie : nous l'appellerons le *pôle* de l'élément S. Le vecteur $\vec{\mathrm{M}\Phi}$ se déduit de $\vec{\mathrm{A}}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$. D'où la conclusion :

Théorème. — *La torsion relative* (*d'une congruence à courbure non nulle*) *se déduit du vecteur* $\vec{\Phi\mathrm{M}}$ *qui joint le pôle au centre par une rotation de* $\frac{\pi}{2}$.

Ce que l'on peut traduire par la formule vectorielle

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{T}}{R} = \overrightarrow{M\Phi} \wedge \vec{e}_3.$$

24. *Remarques.* — 1° Le calcul de Φ au moyen de l'équation (6) n'exige pas l'hypothèse $[\omega_{31}, \omega_{32}] \neq 0$. Mais, si $[\omega_{32}, \omega_{31}] = 0$, on peut voir que Φ est ou bien rejeté à l'infini, ou bien indéterminé (le plan polaire enveloppant alors une développable). La condition pour chaque élément d'avoir un pôle unique à distance finie est donc nécessaire et suffisante pour que la courbure ne soit pas nulle.

2° Pour que $\vec{T} = 0$, il faut et il suffit, si $R \neq 0$, que $\vec{\Pi} \quad \vec{A} = 0$; c'est-à-dire que l'on ait une congruence orthogonale. Les espaces de Riemann (courbure non nulle et torsion nulle) ne peuvent donc être réalisés que par de telles congruences, c'est-à-dire par des surfaces.

Les congruences de *droites* réalisant des espaces de Riemann (ainsi définis) sont les congruences de normales à une surface minima.

3° La torsion en un point de courbure non nulle s'obtient en divisant $\vec{\Pi}$ par R. En un point *isolé* de courbure nulle, on peut opérer un passage à la limite. La construction du n° 27 nous la donnera directement, du moins si l'élément isolé a ses deux foyers distincts.

25. *Correspondance entre les congruences ayant même connexion à courbure non nulle.* — *a.* Nous allons démontrer le théorème énoncé au n° 16, d'après lequel les surfaces polaires $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ de deux congruences V et V* ayant même connexion sont applicables l'une sur l'autre. Remarquons d'abord que d'après une proposition précédente (24. 10), si tout élément S de V a un pôle Φ (unique à distance finie), V a une courbure non nulle, et, si V* a la même connexion que V, elle a aussi une courbure, donc en chaque élément S* un pôle bien défini.

Reprenons le déplacement T(S, S*) qui amène S* en S avec coïncidence des cartes (n° 16). Soit $\mathcal{F}^*$ une famille de repères R(S*) d'ordre 0 de V*, $\mathcal{F}$ la famille qui s'en déduit par les T(S, S*) et qui est une famille d'ordre 0 de V. La superposition des cartes montre que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ ont mêmes composantes latérales, et que l'on a les relations

$$(1) \qquad \omega_1 = \omega_1^*, \qquad \omega_2 = \omega_2^*, \qquad \omega_{12} = \omega_{12}^*, \qquad H_1 = H_1^*, \qquad H_2 = H_2^*.$$

On voit que T(S, S*) amène Φ^* en Φ. Considérons maintenant les repères $R(\Phi)$ et $R(\Phi^*)$ équipollents à R(S) et R(S*) et d'origine $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$: T(S, S*) amène $R(\Phi^*)$ en $R(\Phi)$. D'autre part un calcul simple donne pour les composantes relatives $\tilde{\omega}$ de $R(\Phi)$

$$(2) \qquad \tilde{\omega}_1' = \omega_1 - \cdot DH_2,$$

$$(3) \qquad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 + \cdot DH_1$$

où DH_1, DH_2 sont les différentielles absolues de $\overleftarrow{H}$, définies par

$$(4) \qquad DH_1 = dH_1 - \omega_{12} H_2, \quad DH_2 = dH_2 + \omega_{12} H_1.$$

De même pour $R(\Phi^*)$. Les relations (1) donnent alors

$$(5) \qquad \widetilde{\omega}_1^* = \widetilde{\omega}_1, \qquad \widetilde{\omega}_2^* = \widetilde{\omega}_2.$$

Les $R(\Phi)$ et $R(\Phi^*)$ sont des repères du premier ordre de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^*$, et les relations (5) expriment (1) que les surfaces $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^*$ sont applicables l'une sur l'autre. (C. Q. F. D.)

b. Il ne suffit évidemment pas que $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^*$ soit applicables pour que V et V* réalisent la même connexion. On peut s'en convaincre en prenant $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^*$ confondues, et pour V la congruence orthogonale des éléments normaux à $\mathfrak{p}$ (torsion nulle), tandis que les centres de V* ne seraient pas situés sur $\mathfrak{p}$ (torsion non nulle).

L'applicabilité de $\mathfrak{p}^*$ sur $\mathfrak{p}$ entraîne (2) une correspondance ponctuelle entre les deux surfaces, et l'existence pour tout couple Φ, Φ^* de points homologues, d'un déplacement $T(\Phi, \Phi^*)$ qui amène Φ^* en Φ, et Φ'^* voisin de Φ^* en coïncidence au second ordre près avec son homologue Φ'. Ce déplacement est bien défini pour chaque couple Φ, Φ^*, à condition toutefois que $\mathfrak{p}$ ne se réduise pas à un point. Nous dirons que *ce déplacement réalise l'application de* $\mathfrak{p}^*$ *sur* $\mathfrak{p}$. Nous allons démontrer (*quand* $\mathfrak{p}$ *ne se réduit pas à un point*) la proposition suivante :

Théorème. — *Soit une congruence* V *dont chaque élément a un pôle unique à distance finie, variable avec l'élément. Pour que* V* *réalise la même connexion que* V, *il faut et il suffit :* 1° *que sa surface polaire soit applicable sur celle de* V; 2° *que le déplacement qui réalise l'application en deux points homologues amène en coïncidence les éléments qui admettent pour pôles ces deux points.*

La condition est nécessaire. — D'après (5), si V* a la même connexion que V, $T(S, S^*)$ réalise l'application de $\mathfrak{p}^*$ sur $\mathfrak{p}$; $T(\Phi, \Phi^*)$ étant bien déterminé (car $\mathfrak{p}$ ne se réduit pas à un point), est donc confondu avec $T(S, S^*)$ et amène bien S^* en S.

La condition est suffisante. — En effet, prenons sur $\mathfrak{p}^*$ une famille de repères $R(\Phi^*)$ du premier ordre, et soit $R(\Phi)$ le repère déduit de $R(\Phi^*)$ par $T(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*)$; c'est un repère du premier ordre de $\mathfrak{p}$, et les composantes $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}^*$ de $R(\mathfrak{p})$ et de $R(\Phi^*)$ vérifient les relations (5) et de plus (en tenant compte des équations de structure de l'espace, *cf.* [15]), la relation

$$(6) \qquad \widetilde{\omega}_{12}^* = \widetilde{\omega}_{12}.$$

(1) *Cf.* É. Cartan [15], p. 227.
(2) *Cf.* É. Cartan [15], p. 230.

Soient $\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ les vecteurs de base de $R(\Phi)$; on a pour le centre M de l'élément S de pôle Φ

$$M = \Phi - \Pi_1 \vec{e_2} + \Pi_2 \vec{e_1}. \tag{7}$$

De même pour S^*, et l'hypothèse donne

$$\Pi_1 = \Pi_1^*, \qquad \Pi_2 = \Pi_2^*. \tag{8}$$

Prenons pour repères en S, S^* dans V et V^* des repères équipollents aux $R(\Phi)$, $R(\Phi^*)$; ils auront mêmes composantes de rotation que ces derniers et, d'après (6), on aura

$$\omega_{12}^* = \omega_{12}. \tag{9}$$

Les équations (6), (8), (4) ont pour conséquence

$$D\Pi_1 = D\Pi_1^*, \qquad D\Pi_2 = D\Pi_2^*,$$

d'où, d'après (5) et (2),

$$\omega_1 = \omega_1^*, \qquad \omega_2 = \omega_2^*. \tag{10}$$

Les équations (9) et (10) expriment que V et V^* ont mêmes composantes latérales. C. Q. F. D.

Remarque. — Il peut se faire que la correspondance ponctuelle entre ρ et ρ^* ne soit pas bien définie (exemple : 2 sphères égales). Il suffirait alors qu'il existe un choix de cette correspondance tel que les déplacements $T(\Phi, \Phi^*)$ correspondants vérifient la condition du théorème.

26. *Torsion dans le cas de deux foyers distincts.* — L'un d'eux au moins F_1 est à distance finie. Soit ρ_1 la distance focale correspondante. L'angle X d'un plan focal avec $\vec{e_1}$ vérifie

$$\operatorname{tang} X = \frac{\omega_2 + \rho_1 \omega_{32}}{\omega_1 + \rho_1 \omega_{31}}. \tag{1}$$

a. Prenons $\vec{e_1}$ dans le plan focal (p_1) relatif à F_1. On a alors, pour (p_1), $X = 0$, d'où

$$\omega_{32} = -\frac{\omega_2}{\rho_1}. \tag{2}$$

b. Soit $\vec{H} = p\vec{e_1} + q\vec{e_2} + \vec{e_3}$ le vecteur normal en M à Σ qui se projette en $\vec{e_3}$ sur S. Quels que soient du_1, du_2, on a $\vec{H}.d\vec{M} = 0$, d'où

$$\omega_3 = -p\omega_1 - q\omega_2. \tag{3}$$

c. La composante T_2 de la torsion sur $\vec{e_2}$, c'est-à-dire *sur le plan normal à* (p_1) *passant par* S, est donnée par

$$|\omega_3 \omega_{32}| = T_2 |\omega_1 \omega_2|.$$

d'où

$$T_2 = \frac{P}{\rho_1}. \tag{4}$$

Or $\frac{P}{\rho_1}$ est la composante sur $\vec{e_2}$ du produit vectoriel

$$\overrightarrow{Mg_1} = \frac{1}{\rho_1}\vec{e_3} \wedge \vec{H}. \tag{5}$$

Nous réserverons désormais le nom de *torsion* (en S de V) au vecteur torsion pris avec M(S) comme origine. D'après (4) et (5) *l'extrémité de la torsion est sur la parallèle menée par g_1 à la trace polaire de* (p_1).

En recommençant avec le second foyer supposé aussi à distance finie, on aurait un second vecteur $\overrightarrow{Mg_2}$ (d'ailleurs colinéaire à $\overrightarrow{Mg_1}$), et une seconde droite δ_2 non parallèle à δ_1 (puisque, les foyers étant distincts, les plans focaux le sont aussi). D'où le vecteur $\vec{T}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{Mg}$ peuvent être imaginaires; l'extrémité de la torsion est alors le point réel de δ_1.

On aurait aussi la torsion relative en remplaçant $\overrightarrow{Mg_1}$ par

$$\overrightarrow{Mg_1'} = -\rho_2\vec{e_3} \wedge \vec{H} = \vec{H} \wedge \overrightarrow{MF_2},$$

et de même $\overrightarrow{Mg_2}$ par

$$\overrightarrow{Mg_2'} = \vec{H} \wedge \overrightarrow{MF_1}.$$

27. *Cas d'un foyer simple à l'infini.* — La construction de la torsion est une extension de la précédente.

Si $[\omega_{32}\omega_{31}] = 0$, quand le point $P = M + \lambda\vec{e_3}$ s'éloigne à l'infini sur D, les plans $(\vec{e_3}, dt)$ qui dépendent de $\frac{du_2}{du_1}$ ont une même position limite indépendante de du_1, du_2, et qui fait avec $\vec{e_1}$ l'angle X vérifiant

$$\tan X = \operatorname{Lim}_{\lambda=\infty} \frac{\lambda\omega_{32} + \omega_2}{\lambda\omega_{31} + \omega_1} = \frac{\omega_{32}}{\omega_{31}}. \tag{11}$$

On voit que X est bien défini si ω_{31} et ω_{32} ne sont pas tous deux nuls et vérifient $[\omega_{31}\omega_{32}] = 0$.

a. $\omega_{31} = \omega_{32} = 0$. On a alors une congruence d'*éléments parallèles* $(\overrightarrow{de_3} = 0)$. Il résulte immédiatement de l'expression générale de la torsion (n° 15) que *la torsion est nulle*. Comme $R = 0$, une telle congruence réalise le plan euclidien. D'autre part, il n'y a alors aucun foyer à distance finie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b. Si ω_{31} et ω_{32} ne sont pas tous deux nuls, la position limite du plan $(\vec{e_3}, d\mathrm{P})$ est *le plan focal de l'infini*. Si V a un cône directeur, ce plan est d'ailleurs parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice parallèle à S.

Prenons $\vec{e_1}$ dans ce plan focal (p'); X = 0 donne

$$\omega_{32} = 0, \tag{2}$$

d'où

$$T_2 = |\omega_{31}\omega_{32}| = 0. \tag{3}$$

La torsion est dans le plan focal de l'infini.

c. Si l'on a un foyer F_1 à distance finie, on peut lui appliquer la construction du n° 26; et $\vec{T}$ est alors la projection de $\mathrm{M}\vec{g_1}$ parallèlement à (p_1) sur la trace polaire de (p'). Ces constructions sont réelles, si du moins S et V le sont. On a donc la proposition suivante :

Théorème. — *La torsion dans le cas d'un foyer simple à l'infini est la projection sur la trace polaire du plan focal de l'infini et parallèlement à l'autre plan focal du vecteur*

$$\vec{g} = \frac{1}{\rho}\vec{e_3} \wedge \vec{\mathrm{H}},$$

où ρ *désigne la distance focale finie,* $\vec{e_3}$ *le vecteur unitaire de* S, $\vec{\mathrm{H}}$ *le vecteur normal à la surface des centres qui se projette orthogonalement en* $\vec{e_3}$ *sur* S.

Dans le cas d'une congruence de *droites*, on a $\vec{\mathrm{FM}} = \vec{e_3}$, c'est-à-dire $\rho = -1$, et le vecteur à considérer dans l'énoncé précédent est le vecteur

$$\vec{g} = \vec{\mathrm{MF}} \wedge \vec{\mathrm{H}}.$$

28. *Réalisations du plan euclidien.* — Nous dirons qu'une congruence, dont chaque élément a en général un foyer simple à l'infini, admet un *cône directeur simple*. La nullité de $\vec{T}$ exige alors :

a. Soit que $\vec{e_3}$ et $\vec{\mathrm{H}}$ soient colinéaires; congruence orthogonale, la surface des centres étant une développable.

b. Soit que $\vec{g}$ se trouve dans le plan focal à distance finie : remarquons que $\vec{g}$ est toujours tangent à la surface des centres Σ; dans l'hypothèse envisagée, la congruence s'obtient donc en coupant la surface des centres par des plans dépendant d'un paramètre, et se compose des cylindres admettant pour sections droites les sections ainsi définies.

29. *Torsion des congruences à cône directeur double* (c'est-à-dire dont chaque élément a un foyer double à l'infini). — L'équation en ς (20.2) n'a jamais de racine finie, donc

$$[\omega_{31}\omega_{32}] = [\omega_1\omega_{32}] + [\omega_2\omega_{31}] = 0. \tag{1}$$

Écartons l'hypothèse $\omega_{31} = \omega_{32} = 0$ examinée au n° 27 *a*. Le plan focal est bien déterminé, et en prenant $\vec{e_1}$ dans le plan focal on a (n° 27 *b*) $\omega_{32} = 0$. C'est donc que $\omega_{31} \neq 0$.

Or en faisant dans l'hypothèse (1) $\omega_{32} = 0$, il vient

$$[\omega_2\omega_{31}] = 0,$$

d'où

$$\omega_{31} = K\omega_2 \qquad (K \neq 0). \tag{2}$$

D'autre part

$$\omega'_{32} = 0,$$

donc

$$[\omega_{31}\omega_{12}] = 0$$

et

$$\omega_{12} = A\omega_2. \tag{3}$$

Le tableau des composantes des repères est alors le suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array}\right\} [\omega_1\omega_2] \neq 0, \qquad \begin{array}{ll} \omega_{31} = K\omega_2 & (K \neq 0); \\ \omega_{32} = 0; \end{array}$$
$$\omega_3 = -p\omega_1 - q\omega_2, \qquad \omega_{12} = A\omega_2. \tag{4}$$

Le cylindre de la congruence passant par S est défini par $d\vec{e_3} = 0$, donc $\omega_{31} = 0$. On a alors

$$\omega_2 = \omega_{31} = \omega_{12} = 0.$$

Ce cylindre est donc le plan Me_1e_3, c'est-à-dire le plan focal (p) de S. Quand S varie, (p) dépend d'un paramètre; car s'il était fixe on aurait $\omega_2 \equiv 0$, et la congruence ne serait pas ordinaire. A chaque génératrice (ζ) du cône directeur correspond un plan $p(\zeta)$ bien déterminé, et les éléments S décrivent les plans $p(\zeta)$ en restant parallèles à (ζ).

D'après (4) et le n° 15, on a, pour la torsion,

$$T_2 = 0, \qquad T_1 = -pK,$$

soit

$$\vec{T} = -K\left(p\vec{e_1}\right). \tag{5}$$

La torsion est donc la projection orthogonale, sur la trace polaire du plan focal, du vecteur

$$\vec{\gamma} = -K\vec{H}.$$

La signification de K varie suivant que A est nul ou non.

1° $A = 0$. — Alors $\omega_{12} \equiv \omega_{32} \equiv 0$ et $\overrightarrow{de_2} \equiv 0$, (p) a une *direction* fixe. *Le cône directeur est un plan.* On peut repérer S par la distance z de $p(\hat{c})$ à un plan fixe $p(\hat{c}_0)$ et l'angle $\theta(z) = \widehat{\hat{c}_0, \hat{c}}$. On a alors

$$\omega_2 = dz, \qquad \omega_{31} = d\theta$$

et

$$K = \frac{d\theta}{dz}. \tag{6}$$

On peut regarder z et θ comme la plus courte distance et l'angle de S avec un élément de base fixe S_0 pris dans V.

2° $A \neq 0$. — Le plan (p) n'a plus une direction fixe. Sa droite caractéristique est parallèle à S. Les éléments S de V sont *tangents à l'infini à la développable* (Δ) enveloppée par ce plan.

Considérons l'arête de rebroussement (A) de (Δ). Son repère de Frenet $\bar{R}$ a pour composantes, en prenant $\overrightarrow{e_3}$ tangent et $\overrightarrow{e_1}$ sur la normale principale,

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_{32} = 0, \qquad \varpi_{31} = \frac{\varpi_3}{R_a}, \qquad \varpi_{12} = \frac{\varpi_3}{T_a}, \qquad \text{avec } R_a, T_a \text{ finis } (^1), \tag{7}$$

R_a et T_a étant les inverses de la courbure et de la torsion de (A) au point P origine de $\bar{R}$.

Le repère R de composantes (4) se déduit de $\bar{R}$ par la translation $\overrightarrow{PM} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_3}$, et l'on a en particulier

$$\omega_2 = \varpi_2 + \lambda\varpi_{12} + \mu\varpi_{32} = \frac{\lambda}{T_a}\varpi_3, \qquad \omega_{31} = \frac{\varpi_3}{R_a} = K\omega_2, \tag{8}$$

d'où

$$K = \frac{T_a}{\lambda R_a}. \tag{9}$$

Résumons les résultats obtenus :

THÉORÈME. — *La torsion en* S *d'une congruence* V *à cône directeur double est la projection orthogonale, sur la trace polaire du plan focal, du vecteur* $-K\overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{H}$ *étant le vecteur normal à la surface des centres qui se projette sur* S *suivant le vecteur unitaire, et* K *ayant l'une ou l'autre des significations suivantes :*

1° *Si le cône est un plan,* K *est la dérivée de l'angle de* S *avec un élément* S_0 *fixe de* V *par rapport à la plus courte distance de* S *à* S_0.

2° *Si le cône n'est pas un plan, et si* λ *est la distance de* S *à la génératrice* $(\hat{c})$ *parallèle à* S *de la développable* (Δ) *à laquelle les éléments* (S) *restent tangents à*

(1) (A) ne peut être plane, sans quoi les S seraient tous dans son plan (congruence non ordinaire), ou alors (A) serait une droite, et l'on aurait une congruence d'éléments parallèles, hypothèse que nous avons exclue.

l'infini, R_a *et* T_a *les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement de* (Δ) *en son point de contact avec* $(\hat{c})$, *on a*

$$K = \frac{T_a}{\lambda R_a}.$$

30. *Congruences de droites à cône directeur double.* — Dans le cas d'un plan directeur, elles admettent le groupe des translations parallèles à ce plan directeur. L'origine du repère intrinsèque est incomplètement déterminée, mais doit pourtant vérifier $\omega_3 = 0$ quand $\omega_2 = 0$; alors $p = 0$, $\vec{T} = 0$.

Dans le cas d'un cône directeur non plan, on peut prendre pour origine du repère intrinsèque la projection sur D du point P de l'arête de rebroussement de (Δ) où elle admet le plan focal de D comme plan osculateur. Le repère intrinsèque se déduit alors du repère $\bar{R}$ du n° 29 par la translation

$$\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{e_1}$$

et l'on a, pour ses composantes,

$$\omega_3 = \varpi_2 + \lambda \varpi_{12} = \varpi_3 (1 + \lambda A), \qquad \omega_{31} = \varpi_{31} = \frac{\varpi_3}{R_a},$$

ce qui entraîne

$$[\omega_3 \omega_{31}] = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{T} = 0.$$

D'autre part $\omega_1 = dr$ et $[\omega_1 \varpi_3] \neq 0$: on a bien une congruence ordinaire; enfin, d'après (29.8), ω_3 ne dépend que de ω_2 (proportionnel à ϖ_3) et non de ω_1; l'origine du repère de Frenet est caractérisée par $p = 0$ conformément à la définition du n° 19.

Dans tous les cas, les congruences de droites à cône directeur double sont caractérisées par $p = 0$ et réalisent le plan euclidien.

31. *Réalisations du plan euclidien.* — Reprenons une congruence V à cône directeur double. Remarquons d'abord que, si le cône est un plan, $\frac{d\theta}{dz} \neq 0$ si la congruence n'est pas formée d'éléments parallèles; si le cône n'est pas un plan, on a vu que $\frac{1}{R_a} \not\equiv 0$; *dans tous les cas* $K \not\equiv 0$, il faut et il suffit que $p = 0$, donc qu'on ait la connexion d'une congruence de droites.

Les possibilités de réalisation du plan euclidien ont été complètement examinées dans les numéros précédents. Ce sont :

a. Les surfaces développables (n° 28 *a*).

b. Les congruences à cône directeur simple, dont la surface des centres coupe les cylindres suivant des sections droites (n° 28).

c. Les congruences de *droites* à cône directeur double (n°s 30 et 31).

d. Les congruences d'éléments linéaires parallèles (n° 27 *a*).

32. *Autres expressions de la torsion.* — Nous nous bornerons à signaler les résultats :

1° *Foyers confondus à distance finie.* — Trois cas sont à distinguer, la congruence pouvant être formée :

a. d'éléments à supports tangents aux asymptotiques d'une surface;

b. d'éléments à supports tangents à une développable le long d'une courbe;

c. d'éléments passant par un point fixe.

La torsion relative peut se mettre sous la forme

$$\vec{\Pi} = \vec{H} \wedge \overrightarrow{MF} + p A \vec{e_1}, \tag{1}$$

$\vec{\Pi}$ et p ayant la signification donnée plus haut; M, F étant le centre et le foyer de l'élément; $\vec{e_1}$ le vecteur unitaire de la trace polaire du plan focal; et A ayant, suivant le cas envisagé, les expressions suivantes :

a. A est le rayon de torsion de l'asymptotique tangente à D(S).

b. s désignant l'arc de l'arête de rebroussement, T_a, R_a les rayons de torsion et de courbure de cette arête au point de contact P avec la génératrice passant par F, λ la mesure de $\overrightarrow{PF}$ et φ l'angle $\widehat{PF, D}$,

$$A = -T_a\left(1 + \frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{R_a}\cot\varphi\right). \tag{2}$$

c. *Pour une congruence d'éléments passant par un point fixe*, $A = 0$ et

$$\vec{\Pi} = \vec{H} \wedge \overrightarrow{MF}. \tag{3}$$

2° *Composantes de la torsion par rapport au repère de Frenet de* V. — Quand les deux foyers sont distincts, les plans focaux le sont aussi. Soient ρ_1, ρ_2, X_1, X_2 les distances focales et les angles des plans focaux avec $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$. Les équations

$$\omega_2 + \rho_1\omega_{32} = \operatorname{tang} X_1(\omega_1 + \rho_1\omega_{31}), \qquad \omega_2 + \rho_2\omega_{32} = \operatorname{tang} X_2(\omega_1 + \rho_2\omega_{31})$$

donnent ω_{31}, ω_{32} en fonction des ω_1, ω_2, des ρ et des X.

a. *Deux foyers à distance finie.* — On prendra pour le repère intrinsèque de la congruence (d'éléments linéaires) le vecteur $\vec{e_1}$ dans un plan bissecteur des plans focaux. Alors

$$X_1 = -X_2 = X$$

et

$$\Pi_1 = aq - \rho p\cot X, \qquad \Pi_2 = \rho q\operatorname{tang} X - ap,$$

avec

$$a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = MF_0, \qquad \rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} = F_0F_1 \qquad (F_0 \text{ milieu des foyers}).$$

En particulier, pour une congruence *de droites* ($\rho_1 = -\rho_2 = \rho =$ demi-distance focale)

$$\Pi_1 = -p\rho \cot X, \qquad \Pi_2 = q\rho \operatorname{tang} X.$$

b. Congruence V *à cône directeur.* — On prendra $\vec{e}_1$ dans le plan focal relatif à ce foyer rejeté à l'infini; alors

$$\frac{1}{\rho_1} = 0, \qquad \operatorname{tang} X_1 = 0; \qquad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}, \qquad \operatorname{tang} X_2 = \operatorname{tang} X$$

et l'on a

$$T_2 = 0 \qquad T = T_1 = \frac{-p}{\rho} \cot X - \frac{q}{\rho}.$$

Dans le cas d'une congruence *de droites*, $\rho = -1$. On trouve alors

$$\omega_{31} = \omega_1 - \omega_2 \cot X.$$

Or $\omega_{31} = 0$ donne un cylindre de la congruence. Le long de ce cylindre

$$\omega_3 = -p(\omega_2 \cot X) - q\omega_2 = -T\omega_2.$$

D'autre part, toujours le long de ce cylindre, $dM = dF$; T est donc le rapport de ω_3 à ω_2 quand F décrit le cylindre passant par D. Ce qui donne le résultat suivant :

La torsion d'une congruence de droites à cône directeur est donnée par

$$T = \frac{\cot \psi}{\sin X},$$

ψ *étant l'angle avec* D *de la courbe de contact du cylindre passant par* D *avec la surface focale, et* X *l'angle des plans focaux.*

II. — Pseudo-lignes. Droites et géodésiques.

33. La correspondance établie entre les éléments de V et les points de l'espace E réalisé entraîne une correspondance entre les lignes (L′) tracées dans (E′) et les variétés (L) à une dimension, que nous appellerons *pseudo-lignes*, situées dans V. D'après la définition même de la connexion de V et de E′, le développement de E′ suivant une ligne L′ n'est autre que celui de V suivant la pseudo-ligne (L) correspondante.

Pour étudier les pseudo-lignes de V, nous utiliserons les *composantes générales d'ordre* zéro de V, c'est-à-dire les composantes relatives du repère $R = R(S, \varphi + \theta)$ le plus général d'ordre zéro, θ étant une fonction arbitraire, φ une fonction choisie arbitrairement une fois pour toutes. Le repère $\bar{R}$ dépend de trois paramètres, u_1, u_2 et θ. Le repère $R(S, \varphi)$ ayant pour composantes ω_i,

ω_{ij}, qui sont (pour une congruence donnée) *des formes données de* u_1, u_2, le repère $\overline{\mathrm{R}}$ a pour composantes

$$(1)\qquad \begin{cases} \varpi_1 = \omega_1\cos\theta + \omega_2\sin\theta, & \varpi_{31} = \omega_{31}\cos\theta + \omega_{32}\sin\theta; \\ \varpi_2 = -\omega_1\sin\theta + \omega_2\cos\theta, & \varpi_{32} = -\omega_{31}\sin\theta + \omega_{32}\cos\theta; \\ \varpi_3 = \omega_3, & \varpi_{12} = \omega_{12} + d\theta. \end{cases}$$

Nous désignerons par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs de base de $\overline{\mathrm{R}}$. Sur une pseudo-ligne (L) de V, on prendra $\vec{e}_1$ *dans le plan tangent à* (L) *en* M. La pseudo-ligne est alors définie par $\varpi_2 = 0$, et le choix d'une fonction $\theta(u_1, u_2)$. La pseudo-ligne $\theta = f(u_1, u_2)$ passant par un élément donné S_0, est le lieu de l'élément $(M\vec{e}_3)$ quand le repère $\overline{\mathrm{R}}$ décrit la famille à 1 paramètre définie par

$$\theta = f(u_1, u_2), \qquad \varpi_2 = 0$$

et la condition que S_0 soit une position particulière de $M\vec{e}_1$.

Dans l'espace E′ réalisé, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} sont les composantes du repère le plus général; sur une ligne (L′) de E′ on peut prendre le premier vecteur du repère tangent à (L′) et la ligne est encore définie par $\varpi_2 = 0$ et la fonction $\theta(u_1, u_2)$. *Une ligne et la pseudo-ligne correspondante sont alors définies toutes deux par la même fonction* θ.

34. *Définitions relatives à* E′. — On distinguera dans E′ les *droites*, qui seront par définition les lignes dont la tangente reste de proche en proche parallèle à elle-même, et les *géodésiques* qui sont les lignes de longueur minima. Une droite est donc caractérisée par

$$(1)\qquad \varpi_2 = \varpi_{12} = 0$$

et une géodésique par la propriété d'être une extrémale de $\int\sqrt{\varpi_1^2 + \varpi_2^2}$ prise entre deux de ses points.

Une *droite géodésique* est une ligne jouissant des deux propriétés. Quand la torsion n'est pas nulle ce sont des droites exceptionnelles.

Nous aurons enfin à considérer les *lignes de torsion*, qui sont par définition tangentes en chacun de leurs points au vecteur de torsion de ce point.

35. *Définitions relatives aux congruences.* — Nous utiliserons, dans l'étude des pseudo-droites d'une congruence V, les définitions suivantes (données avec les notations du n° 9).

1° Deux éléments linéaires sont dits *normaux* s'ils ont même centre et des supports perpendiculaires.

2° On appellera *variété conjuguée* $\overline{w}$ d'une pseudo-ligne w d'éléments S, la variété engendrée par les éléments S′ normaux à S et situés dans le plan tangent à w en M(S).

Une variété w admet ainsi une conjuguée bien définie $\overline{w}$. Il y a en général réciprocité. Le cas d'exception est celui où $\overline{w}$ est une développable dont la ligne des centres [lieu de M(S)] est l'arête de rebroussement. Dans ce cas particulier, il y a une infinité de pseudo-lignes admettant $\overline{w}$ comme conjuguée, mais une seule d'entre elles est la conjuguée de $\overline{w}$.

3° On appellera *complexe normal à* V, soit K_V, le complexe des éléments σ normaux aux éléments de V. Il est formé d'éléments dont le centre décrit la surface $\Sigma(V)$; les éléments de centre donné sont dans le plan polaire P(S) de l'élément S de V ayant ce point pour centre.

4° On appellera *variété normale* à une dimension de K_V, toute variété engendrée par des éléments σ (appartenant à K_V et dépendant d'un paramètre) qui est *normale* au plan polaire P(S) au centre $M(\sigma)$ de ses éléments, ou, le cas échéant, le long de leur support $D(\sigma)$.

La conjuguée d'une variété normale w *de* K_V *est une pseudo-ligne* $\overline{w}$ *de* V, *et il y a réciprocité*, c'est-à-dire que w est alors la conjuguée de $\overline{w}$; mais la *réciproque de cette proposition* n'est pas toujours vraie, c'est-à-dire qu'il peut exister des pseudo-lignes w_1 de V dont la conjuguée $\overline{w}_1$ ne soit pas une variété normale de K_V; ces pseudo-lignes exceptionnelles sont caractérisées par le fait que leurs éléments générateurs sont des *normales non principales* à la ligne des centres ($\varpi_2 = \varpi_3 = 0$, $\varpi_{12} \neq 0$).

36. *Pseudo-droites.* — Nous allons établir à leur sujet le théorème suivant :

Théorème. — *Les pseudo-droites d'une congruence* V *sont les conjuguées des développables normales du complexe normal à* V.

a. Soit en effet une pseudo-droite w de V; les composantes du repère $\overline{R}$ attaché à w vérifient, par définition des droites de E′,

$$\varpi_2 = \varpi_{12} = 0. \tag{34.1}$$

La variété conjuguée $\overline{w}$ est le lieu de l'élément $\left(M\overrightarrow{e_1}\right)$. Or cet élément décrit une développable. En effet, si l'on prend un point $P = M + \lambda\overrightarrow{e_1}$ sur cet élément, la composante de dP sur $\overrightarrow{e_2}$, à savoir

$$\varpi_2 + \lambda\varpi_{12},$$

est constamment nulle quel que soit λ, et le plan tangent reste fixe tout le long

de la génératrice $(\overrightarrow{Me_1})$ de $\overline{\omega}$: ce plan n'est autre d'ailleurs que le plan $\overrightarrow{Me_1}\overrightarrow{e_3}$ qui est normal au plan polaire, et ω est bien une *développable normale* de K_V.

b. Réciproquement, si $(\overrightarrow{Me_1})$ décrit une développable normale de K_V, cette développable admet pour plan tangent le long de $(\overrightarrow{Me_1})$ le plan $\overrightarrow{Me_1}\overrightarrow{e_3}$ et le repère admet pour composantes $\varpi_1 = \varpi_{12} = 0$: $(\overrightarrow{Me_3})$ engendre bien une pseudo-droite de V. C. Q. F. D.

Remarque. — Si la congruence V contient *un plan*, c'est-à-dire si une pseudo-ligne de V est située dans un plan, la variété conjuguée de cette pseudo-ligne est le plan lui-même, donc c'est une développable, qui d'autre part est visiblement normale au plan polaire : *les plans d'une congruence sont des pseudo-droites.*

Cas particuliers. — Quand V est une congruence orthogonale, les plans polaires sont les plans tangents à la surface des centres Σ; les développables du complexe normal ont pour arête de rebroussement les courbes (γ) de Σ, les développables normales sont celles dont le plan osculateur en M à (γ) est normal en M à Σ (M étant le centre de l'élément générateur), et l'on retrouve bien pour les courbes (γ) *les géodésiques de* Σ.

37. *Parallélisme.* — Soient deux éléments infiniment voisins S et S' ; un élément normal à S représente une *pseudo-direction de* V issue de S. Deux pseudo-directions δ, δ' sont parallèles, d'après la définition de la connexion, si la projection de δ' sur le plan polaire de S est parallèle à D. Il revient au même de dire que δ et δ' font le même angle avec la développable normale de K_V passant par S, S'.

On peut définir un parallélisme entre deux points A et B non infiniment voisins, au moyen de cette dernière propriété. Ce parallélisme sera bien défini s'il ne passe qu'une pseudo-droite par A et B, et le postulat d'Euclide est alors vérifié. Mais, si l'espace n'est pas à parallélisme absolu, étant donnés trois points A, B, C, deux pseudo-directions issues de B et de C et parallèles à une même troisième issue de A ne sont pas en général parallèles.

38. *Géodésiques.* — La distance élémentaire de E' est donnée par

$$ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_2^2.$$

Or, si $d\sigma$ est l'arc d'une courbe (γ) de Σ décrite par M(S), et α l'angle (compris entre zéro et π) de (γ) avec D(S), on a

$$ds = d\sigma \sin\alpha,$$

et par suite *les pseudo-géodésiques ont pour trace dans* Σ *les extrémales de* $\int \sin\alpha\, d\sigma$.

On retrouve bien les géodésiques de Σ quand on a une congruence orthogonale (puisque alors $\sin\alpha = 1$).

Définition d'une distance dans V. — On peut considérer les pseudo-géodésiques comme de véritables géodésiques de V, en prenant

$$dS = SS' = d\sigma \sin\alpha$$

comme distance de deux éléments linéaires S, S′ infiniment voisins. Cette définition est cohérente, puisque $SS' = S'S$ au second ordre près (ou, si l'on oriente la courbe et la pseudo-ligne, $\overline{SS'} = -\overline{S'S}$). La longueur d'une pseudo-ligne (L) joignant A et B est alors, en valeur absolue,

$$l = AB = BA = \int_B^A d\sigma \sin\alpha.$$

On peut interpréter cette longueur comme le travail d'une force $\vec{F}$ d'intensité 1, qui appliquée dans les conditions du n° 17 [normalement en M(S) à D(S)], transporterait S de $\mathfrak{A}$ à B le long de (L). En supposant une résistance du milieu opposée au déplacement latéral de D et fonction uniquement de la vitesse $\frac{dS}{dt}$, les géodésiques seraient les *trajectoires de travail minimum* pour une vitesse constante donnée; elles sont d'ailleurs indépendantes de la vitesse constante choisie.

On peut aussi regarder la longueur l comme la limite du quotient par λ, quand $\lambda \to 0$, de l'aire balayée par le vecteur $\lambda\vec{e_3}$ d'origine M quand S va de A à B le long de (L). Si l'on désigne par $\mathfrak{A}(\lambda, \mu)$ l'aire balayée par le segment PQ de S défini par $P = M + \lambda\vec{e_3}$, $Q = M + \mu\vec{e_3}$, on a

$$l = \frac{\partial \mathfrak{A}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} \qquad \text{pour } \lambda = 0.$$

39. *Repères attachés aux géodésiques.* — Soit une pseudo-ligne (L); les repères $\overline{R}$ attachés à (L), c'est-à-dire tels que $\vec{e_1}$ soit tangent à (L) (*cf.* n° 33), dépendent d'un paramètre t. Considérons une famille à un paramètre x de pseudo-ligne $L(x)$ passant par deux éléments donnés A et B. Les $\overline{R}(t)$ attachés aux diverses $L(x)$ constituent une famille à deux paramètres de repères $\overline{R}(t, x)$, dont on désignera par $\widetilde{\omega}$ les composantes relatives; comme pour x fixe, soit $x = x_1$, $\overline{R}(t, x_1)$ a sa composante ω_2 nulle, on peut dire que :

1° $\widetilde{\omega}_2$ ne dépend pas de dt, elle est de la forme $\widetilde{\omega}_2 = f(x, t)\, dx$;

2° L'élément d'arc de $L(x_1)$ est $ds = \widetilde{\omega}_1(x_1, t, dx = 0, dt)$.

Les géodésiques sont les extrémales de $\int_A^B \tilde{\varpi}_1(x_1, t, dx = 0, dt)$, donc leur paramètre x_0 vérifie la condition nécessaire et suffisante [7]

$$\tilde{\varpi}'_1(x_0, t, dx, dt) = 0. \tag{1}$$

En désignant par $\overline{T_1}$ la projection de la torsion $\vec{T}$ sur $\vec{e_1}$, les équations de structure donnent pour cette condition

$$\tilde{\varpi}'_1 \equiv [\tilde{\varpi}_{12}\tilde{\varpi}_2] + \overline{T_1}[\tilde{\varpi}_1\tilde{\varpi}_2] = 0. \tag{2}$$

Il en résulte que $\tilde{\varpi}_{12}$ est de la forme

$$\tilde{\varpi}_{12} = -\overline{T_1}\tilde{\varpi}_1 + \mathcal{L}(x, t)\tilde{\varpi}_2 \tag{3}$$

et comme $\tilde{\varpi}_2(x_0, t, dx = 0, dt)$ est nul, on a pour l'extrémale

$$\varpi_{12} = -\overline{T_1}\varpi_1. \tag{4}$$

Réciproquement, soit une pseudo-ligne (L) dont le repère $\overline{R}(t)$ vérifie la condition (4); et soit une famille $\overline{R}(t, x)$ se réduisant à $\overline{R}(t)$ pour $x = x_0$; alors, pour $x = x_0$, $dx = 0$ entraîne (4), et par suite la composante ϖ_{12} de $\overline{R}(t, x)$ est de la forme (3), donc (2) est vérifiée. Conclusion :

Les géodésiques sont caractérisées par

$$\boxed{\varpi_2 = \varpi_{12} + \overline{T_1}\varpi_1 = 0.} \tag{5}$$

Le calcul est le même qu'on se place dans E′ ou dans V.

Variétés conjuguées des géodésiques. — Dans E′, la *courbure* d'une géodésique g' est donc $-\overline{T_1}$; c'est celle du développement sur un plan de g', et par suite aussi de la pseudo-ligne g correspondante. Le repère $\overline{R}$ attaché à g est le *repère intrinsèque* de g. C'est aussi le repère intrinsèque de la variété conjuguée g^*, qui est une variété normale du complexe K_1 normal à V; $\overline{T_1}$ est alors au signe près l'invariant différentiel $I = \frac{\varpi_{12}}{\varpi_1}$ de g^*; cet invariant serait nul si g^* était une développable normale de K_1 et caractérise ainsi la différence entre g^* et une telle développable. Et l'on peut caractériser les géodésiques par la propriété d'*avoir pour conjuguées les variétés g^* du complexe normal, dont l'invariant* I *est égal et de signe contraire à la projection de la torsion sur le plan tangent à g^*.*

40. *Droites géodésiques.* — Les droites de E′ ne sont toutes des géodésiques que si la torsion $\vec{T}$ est partout nulle [8]. Si $\vec{T} \not\equiv 0$, certaines droites peuvent être

des géodésiques; il faut et suffit pour cela que la projection T_1 de $\vec{T}$ sur une telle droite soit nulle en chacun de ses points, ainsi qu'il résulte d'un calcul direct de variations [8], ou encore de la comparaison des conditions (34.1) et (39.5), ou encore des résultats relatifs aux variétés conjuguées des pseudo-droites et des géodésiques (n^{os} 36 et 39). La notion de trajectoires orthogonales s'étend d'elle-même aux pseudo-lignes de V, et *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une pseudo-droite soit géodésique est qu'elle soit trajectoire orthogonale des lignes de torsion, ou bien qu'elle soit une pseudo-ligne de torsion nulle.* Nous désignerons par (A) cette condition.

Quand la congruence n'a pas de cône directeur, il existe une relation entre les pseudo-droites géodésiques et les géodésiques de la surface polaire.

Théorème. — *Pour qu'un élément* S *décrive une pseudo-droite géodésique d'une congruence à surface polaire non dégénérée, il faut et il suffit que son pôle* Φ *décrive une géodésique de la surface polaire, et que la tangente en* Φ *à cette géodésique passe par le centre de* S.

Démonstration. — Soit une congruence V sans cône directeur (engendrée par des éléments S dont le centre M est à distance finie). Le théorème s'applique à un domaine de V correspondant à un domaine à distance finie de la surface polaire.

Quand S décrit dans V une pseudo-ligne (L), Φ décrit dans (φ) une ligne (λ). On désignera par Φ'_λ la tangente en Φ à (λ). Soit $(\overline{L})$ la variété conjuguée de (L), elle est engendrée par la droite δ tangente en M(S) à (L) et normale à S.

a. La condition du théorème est nécessaire, c'est-à-dire que si (L) est une pseudo-droite géodésique, (λ) est une géodésique de (φ) et Φ'_λ passe par M.

En effet, d'après la condition (A), ou bien la torsion en S est nulle, ou bien elle est normale en M à (L). Comme $R \neq 0$, c'est ou bien que M est en Φ, ou bien que, $\vec{T}$ étant normal à MΦ (n° 23), MΦ est tangente à (L); dans les deux cas (δ) passe par M et par Φ.

(L) étant une pseudo-droite, $(\overline{L})$ est une développable normale au plan polaire P(S), donc normale en Φ à (φ); il en résulte [1] que (λ) est son arête de rebroussement, donc que Φ'_λ et δ sont confondues et Φ'_λ passe bien par M, et d'autre part que (λ) est une géodésique de (φ).

b. La condition est suffisante. — Si (λ) est une géodésique de (φ), Φ'_λ engendre une développable normale en Φ à (φ) donc à P(S). Si Φ'_λ passe par M, cette développable est la conjuguée de (L), donc (L) est une pseudo-droite.

---

[1] La tangente Φ'_λ est située dans le plan tangent à la développable, et dans le plan P(S) tangent à (φ); ces deux plans étant distincts (perpendiculaires) Φ'_λ est leur intersection, qui n'est autre que (δ); et (λ) est l'enveloppe de (δ).

Si Φ est en M, la torsion $\vec{T}$ est nulle. Si Φ n'est pas en M, $\vec{T}$ est normale à ΦM, c'est-à-dire au plan tangent en M à (L). De toute manière $\overline{T_1} = 0$.

C. Q. F. D.

Construction de congruences admettant des pseudo-droites géodésiques. — On peut définir une congruence V à partir de sa surface polaire $(\dot{\gamma})$ en prenant dans tout plan P(S) tangent (en Φ) à $(\dot{\gamma})$, un point M, et en prenant pour élément générateur l'élément S de centre M et normal à P.

On aura une congruence V admettant une pseudo-droite géodésique, en partant d'une géodésique (γ) de $(\dot{\gamma})$ et en prenant, dans tout plan P tangent à $(\dot{\gamma})$ en un point Φ de (γ) le point M sur la tangente Φ'_1 en Φ à (γ).

Si l'on opère ainsi sur toutes les géodésiques d'une famille à un paramètre décrivant $(\dot{\gamma})$, la congruence obtenue est telle que *par chacun de ses éléments il passe une pseudo-droite géodésique.*

Remarque. — Pour que toutes les pseudo-droites soit géodésiques, il faudrait que M soit sur la tangente en Φ à toutes les géodésiques passant par Φ, donc soit en Φ, ce qui donne bien $\vec{T} \equiv 0$.

41. *Congruences admettant par chaque élément une pseudo-droite géodésique.* — Elles réalisent les espaces admettant en tout point une droite géodésique, c'est-à-dire ceux dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites.

a. Définitions. — Deux congruences ordinaires sont dites *normales l'une à l'autre* si les éléments de l'une sont normaux à ceux de l'autre.

La *congruence des torsions* d'une congruence V d'éléments S, est la congruence normale à V engendrée par le support de la torsion $\vec{T}$ de V en S. Nous nous bornerons à la définir pour des congruences V *à torsion non nulle* (c'est-à-dire de façon plus précise : nulle en aucun élément).

La *congruence conjuguée* de la congruence V est la congruence normale à la fois à V et à la congruence des torsions de V.

b. Théorème. — *Pour qu'il passe par tout élément d'une congruence à torsion non nulle, une pseudo-droite géodésique, il faut et il suffit que la congruence conjuguée soit une congruence de normales.*

Prenons en chaque élément S le repère $R(a_1, a_2)$ dont le vecteur $\vec{e}_2$ est porté par la torsion $\vec{T}$ en S. S'il passe par S une pseudo-droite géodésique (L), le vecteur $\vec{e}_1$ est tangent à (L), car $T_1 = 0$, et la variété (L) est définie par $\varpi_2 = 0$. C'est donc que pour le repère R, $\varpi_2 = 0$ entraîne $\varpi_{12} = 0$ (*cf.* 34.1).

Or, pour le repère $\overline{R}$ (à deux paramètres), $\overline{T_1} = 0$, donc

$$[\varpi_2\ \varpi_{21}] = 0. \tag{1}$$

Si d'autre part $\varpi_2 = 0$ entraîne $\varpi_{12} = 0$, c'est que

$$[\varpi_{12}\varpi_2] = 0. \tag{2}$$

Il en résulte

$$\varpi'_1 = [\varpi_2\varpi_{21}] - [\varpi_{12}\varpi_2] = 0, \tag{3}$$

et cela exprime que $\left(M\vec{e}_1\right)$ engendre une congruence de normales (n° 12).

Réciproquement, (3) et (1) entraînent (2), et si la congruence conjuguée, c'est-à-dire celle des éléments $\left(M\vec{e}_1\right)$, est une congruence de normales, les variétés $\varpi_2 = 0$ sont des pseudo-droites géodésiques, et il en passe bien une par tout élément S. C. Q. F. D.

c. Si la torsion est identiquement nulle, la congruence conjuguée est indéterminée: d'autre part, toute pseudo-droite est géodésique; il passe donc alors par tout élément, une infinité de pseudo-droites géodésiques.

Si $R \neq 0$, le pôle Φ est bien défini; la congruence conjuguée n'est autre que celle des droites $M\Phi$; on pourrait voir directement que $M\Phi$, dont un plan focal est $P(S)$, admet, d'après le n° 40, un second plan focal normal à $P(S)$, ce qui caractérise bien une congruence de normales.

d. Considérons la congruence V^* des torsions. Si $[\varpi_1\varpi_3] \neq 0$, c'est-à-dire si (12.3) $\vec{T}$ n'est pas tangent à Σ, c'est une congruence ordinaire. Elle réalise alors un espace E'^* dont la torsion $\vec{T}^*$ a une composante $\overline{T_1^*}$ nulle d'après (2); donc $\vec{T}^*$ est nulle ou portée par $\vec{e}_3$; dans cette dernière hypothèse qui est le cas général, V^* a même conjuguée que V, et vérifie par suite la condition du théorème précédent. Donc :

Théorème. — *Si par tout élément d'une congruence* V *à torsion non tangente à la surface des centres, il passe une pseudo-droite géodésique, il en est de même dans la congruence des torsions, si du moins cette dernière n'a pas une torsion nulle.*

Dans le cas d'exception $\vec{T}^* \equiv 0$, les pseudo-droites et les géodésiques de V^* sont confondues; alors comme $[\varpi_2\varpi_{23}] = 0$, $\varpi_2 = 0$ a pour conséquences $\varpi_{12} = \varpi_{32} = 0$, et $\vec{e}_2$ a une direction fixe le long d'une pseudo-droite géodésique de V; ces dernières sont donc situées dans les plans $P_{13} = M\vec{e}_3\vec{e}_1$; nous dirons, en abrégé, que *les pseudo-droites géodésiques sont des plans.*

III. — Congruences à cône directeur.

42. *Parallélisme.* — Les congruences à cône directeur réalisent des espaces E′ à *parallélisme absolu* (n° 21); le parallélisme en deux éléments A et B (défini au n° 37) y a une signification absolue, et *deux pseudo-directions parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.*

Nous aurons à distinguer par la suite entre le *parallélisme dans l'espace* (auquel nous réserverons le nom de parallélisme) et le parallélisme induit, que nous appellerons aussi *pseudo-parallélisme.* C'est ce dernier qui intervient dans l'énoncé ci-dessus. On appellera *pseudo-parallèles* des *pseudo-droites* pseudo-parallèles.

Nous appellerons *angle de deux pseudo-lignes* qui se coupent en S, l'angle de leurs plans tangents en M(S), centre de l'élément S. Cet angle est orienté, par l'orientation de S et celle de l'espace.

L'angle en S *d'une pseudo-ligne passant par* S *avec un plan* (p) *de l'espace*, est l'angle orienté que fait avec (p) le plan tangent à la pseudo-ligne en M(S).

Le postulat d'Euclide et le théorème relatif aux angles de deux parallèles avec une sécante sont vrais dans E′ et ce dernier théorème correspond au suivant dans V :

Deux pseudo-parallèles font le même angle avec une pseudo-droite sécante arbitraire et réciproquement.

43. *Droites géodésiques.* — La congruence V ayant un cône directeur, $\vec{T}$ est, en chaque élément S, dans le plan focal (p) de l'infini de S; considérons les repères $R(u_1, u_2)$ obtenus en prenant $\vec{e_2}$ dans (p). Ils vérifient

$$\omega_{31} = 0 \qquad \left[cf.\ 27.2,\ \text{avec } \vec{e_1} \text{ dans } (p)\right] \tag{1}$$

et l'on a $T_1 = 0$. En dehors des lignes de torsion nulle, les pseudo-droites géodésiques sont alors des variétés $\omega_2 = 0$ de la congruence; il passe une telle variété par tout élément S: pour qu'il passe par tout élément S, une pseudo-droite géodésique, il faut donc, et il suffit, que $\omega_2 = 0$ entraîne $\omega_{12} = 0$ (*cf.* n° 41), c'est-à-dire que l'on ait

$$|\omega_{12}\omega_2| = 0. \tag{2}$$

En tenant compte des équations de structure

$$\omega'_{31} \equiv |\omega_{12}\omega_{32}| = 0, \tag{3}$$

les équations (2), (3) entraînent soit $\omega_{12} \equiv 0$, et l'on verra qu'alors le cône directeur est un plan (n° 45), soit, si le cône directeur n'est pas un plan,

$$[\omega_{32}\omega_2] = 0. \tag{4}$$

44. *Congruence à cône directeur non plan admettant en chaque élément une pseudo-droite géodésique.* — Les équations (1), (4) du n° 43 ont pour conséquence

$$\omega_3' \equiv [\omega_{31}\omega_1] + [\omega_{32}\omega_2] = 0 \tag{1}$$

et la congruence V est une congruence de normales ($\omega_3 \equiv 0$) à une développable ($\hat{c}$). Considérons en effet le point

$$m = M - z\vec{e}_3 \tag{2}$$

avec

$$dz = z\omega_{33}. \tag{3}$$

En tenant compte de (43.1) sa différentielle est

$$dm = \omega_1\vec{e}_1 - (\omega_2 - z\omega_{32})\vec{e}_2 \tag{4}$$

et, le long d'une pseudo-ligne $\omega_2 = 0$, (43.4) entraîne

$$dm = \omega_1\vec{e}_1. \tag{5}$$

D'autre part, le long d'une telle pseudo-ligne les équations (43.1, 2 et 4) montrent que le repère R a une direction fixe :

a. Les éléments S restent parallèles à eux-mêmes : le plan tangent en *m* au lieu de *m* a une direction fixe [d'après (4)].

b. D'après (5), *m* décrit une droite.

Le lieu de *m* est bien une développable ($\hat{c}$); on voit aussi que les pseudo-lignes $\omega_2 = 0$ sont les plans normaux à ($\hat{c}$) le long de ses génératrices, et que les éléments S d'une telle pseudo-ligne sont parallèles entre eux.

Réciproquement, si V est une congruence de normales à une développable ($\hat{c}$), elle admet un cône directeur non plan [sauf si ($\hat{c}$) est elle-même un plan, auquel cas le cône se réduit à une droite, et la congruence réalise le plan euclidien]. Les équations (41.1) et (43.1) entraînent (43.4), d'où d'après (43.3) et $\omega_{12} \not\equiv 0$, l'équation (43.2) : les variétés $\omega_2 = 0$ sont des pseudo-droites géodésiques. On a donc la proposition suivante :

Théorème I. — *Les congruences à cône directeur non plan et à torsion non nulle, qui admettent par chaque élément une pseudo-droite géodésique sont les congruences de normales à une développable.*

D'après les remarques faites sur les pseudo-lignes $\omega_2 = 0$, qui sont précisément les pseudo-droites géodésiques, on a pour ces pseudo-lignes la caractéristique suivante :

Théorème II. — *Les pseudo-droites géodésiques sont les plans normaux le long des génératrices de la développable.*

Les éléments d'une pseudo-droite géodésique sont parallèles entre eux.

De cette dernière propriété résulte la propriété suivante de deux pseudo-parallèles (d'après le n° 42) :

THÉORÈME III. — *Deux pseudo-parallèles sont parallèles dans l'espace au centre de leurs éléments d'intersection avec les plans normaux à la développable.*

45. *Congruences à plan directeur.* — Prenons en chaque élément S un repère dont le vecteur $\vec{e}_1$ est normal au plan directeur; dans la famille ainsi définie, $\vec{e}_1$ est équipollent à un vecteur fixe, et $d\vec{e}_1 \equiv 0$, soit

$$\omega_{12} = 0, \tag{1}$$

$$\omega_{31} = 0. \tag{2}$$

Le plan focal et le vecteur torsion sont parallèles au plan directeur. D'autre part, dans l'espace réalisé E', le repère de composantes $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ a, d'après (1), une direction fixe, et comme par rapport à ce repère $T_1 = 0$ [d'après (2)], *la torsion* $\vec{T}$ *a une direction fixe dans* E'.

THÉORÈME I. — *Les congruences à plan directeur, et à torsion non partout nulle, réalisent des espaces non holonomes à parallélisme absolu, à torsion de direction fixe, et sont les seules à le faire.*

On vient d'en démontrer la première partie. Réciproquement, soit une congruence V réalisant un espace non holonome E', à parallélisme absolu et à torsion de direction fixe. On en déduit, en prenant $\vec{e}_2$ sur le vecteur torsion de V, l'équation (2) ($T_1 = 0$) et l'équation (1) ($\vec{T}$ est une pseudo-direction fixe). Les équations (1) et (2) expriment que $d\vec{e}_1 = 0$, donc que $\vec{e}_1$ a une direction fixe, et que S $(= M\vec{e}_3)$ est parallèle à un plan fixe.

Si la torsion est nulle le long d'une pseudo-ligne (Λ) de V, le théorème est démontré pour les éléments S extérieurs à (Λ); l'angle de S avec le plan directeur est constamment nul pour S extérieur à (Λ), donc l'est encore pour S sur (Λ), d'après l'hypothèse de continuité de V (*cf.* n° 11).

COROLLAIRE. — *Les pseudo-lignes de torsion et leurs trajectoires orthogonales sont des pseudo-droites. Par tout élément il passe une pseudo-droite géodésique.*

Revenons d'autre part à la détermination, d'après le n° 43, des congruences admettant par chaque élément une pseudo-droite géodésique. On les a déterminées dans l'hypothèse $\omega_{12} \not\equiv 0$, et ce sont alors les congruences du n° 44. L'hypothèse $\omega_{12} \equiv 0$, jointe à (43.1) donne $d\vec{e}_1 = 0$, et un plan directeur. Les congruences cherchées sont donc soit les congruences de normales à une développable, soit les congruences à plan directeur.

Lignes de torsion. Parallélisme. — Les pseudo-lignes de torsion sont des *pseudo-droites*, et de façon plus précise, ce sont les pseudo-lignes $\omega_1 = 0$. Comme d'autre part $\omega_{31} = \omega_{12} = 0$, ces variétés sont les plans parallèles au plan directeur. Par suite :

Théorèmes : II. — *Toute pseudo-droite fait un angle constant avec le plan directeur.* III. — *Deux pseudo-parallèles font le même angle avec le plan directeur.*

(Ce sont des corollaires immédiats des propositions du n° 42 et de la propriété qui vient d'être établie au sujet des plans parallèles au plan directeur.)

Nature des pseudo-droites géodésiques. — Ce sont les trajectoires orthogonales dans V des plans parallèles au plan directeur. En général, ce sont des surfaces réglées admettant le plan directeur comme cône asymptotique, et la ligne des centres comme ligne de striction. Exceptionnellement, elles peuvent être des plans normaux au plan directeur.

46. *Espaces dont les lignes de torsion sont des droites.* — On peut leur étendre certaines des propriétés précédentes (celles du parallélisme). Déterminons d'abord les congruences susceptibles de réaliser de tels espaces; ce sont :

1° Les congruences à plan directeur.

2° Les congruences à cône directeur non plan, dans lesquelles, pour le repère R du n° 43, $\omega_1 = 0$ entraîne $\omega_{12} = 0$. Comme $\omega_{12} \not\equiv 0$, l'équation (43.3) donne alors

$$[\omega_1 \omega_{32}] = 0.$$

Comme d'autre part, d'après (43.1) et l'existence du cône directeur, on a respectivement

$$[\omega_2 \omega_{31}] = 0, \qquad [\omega_{32} \omega_{21}] = 0,$$

la congruence vérifie les conditions du n° 29 qui expriment qu'elle a en chaque élément un foyer double à l'infini. Donc :

Théorème. — *Les congruences à cône directeur double non plan, et les congruences à plan directeur (simple ou double), réalisent (dans le cas général où leur torsion n'est pas partout nulle) des espaces non holonomes à parallélisme absolu dont les lignes de torsion sont des droites, et sont seules à le faire.*

Parallélisme dans le cas d'un cône directeur double (non plan). — On sait que les éléments sont tangents à l'infini à une développable $(\mathcal{C})$, que nous appellerons la *développable directrice*.

Les plans tangents à $(\mathcal{C})$, qui sont les plans focaux de la congruence V, constituent aussi les cylindres de V et en même temps les lignes de torsion de V.

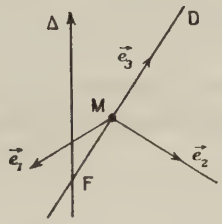
Les pseudo-droites lignes de torsion sont les plans tangents à la développable directrice; les éléments d'une telle pseudo-droite sont parallèles entre eux.

Deux plans focaux ne sont pas pseudo-parallèles : une pseudo-droite ne fait donc pas le même angle avec les plans focaux de ses divers éléments. Mais deux pseudo-parallèles issues de deux éléments S_1, S_2 d'un même plan focal sont parallèles dans l'espace aux centres de S_1, S_2.

THÉORÈME. — *Deux pseudo-parallèles sont parallèles dans l'espace au centre de leurs éléments d'intersection avec un plan tangent à la développable directrice.*

47. *Exemple de congruence à cône directeur. Congruence des* droites D *coupant à angle constant* α *une droite fixe* Δ. — Prenons pour paramètre l'abscisse z du foyer F sur Δ, et l'angle polaire θ du plan (Δ, D) par rapport à

Fig. A.



un plan fixe passant par Δ. On a pour le repère $M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ défini par $\overrightarrow{MF} = \vec{e}_3$, et $\vec{e}_2$ dans le plan focal

$$(I)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \sin\alpha\, dz, & \omega_{31} = 0, \\ \omega_2 = -\sin\alpha\, d\theta, & \omega_{32} = -\sin\alpha\, d\theta, \\ \omega_3 = \cos\alpha\, dz, & \omega_{12} = \cos\alpha\, d\theta. \end{cases}$$

ou bien, en prenant comme nouvelles variables

$$(1)\qquad u = z\sin\alpha.$$

$$(2)\qquad \psi = -\theta\sin\alpha.$$

et, en posant $k = \cot\alpha$,

$$(II)\qquad \begin{cases} \omega_1 = du, & \omega_{31} = 0, & \omega_3 = k\omega_1, \\ \omega_2 = d\psi, & \omega_{32} = \omega_2, & \omega_{12} = -k\omega_2. \end{cases}$$

a. La torsion est portée par e_2 et vaut

$$(3)\qquad T_2 = T = k.$$

La courbure est nulle. La congruence Γ ainsi définie pour θ et z variant de $-\infty$ à $+\infty$ réalise globalement un espace à parallélisme absolu E' dont la torsion

a une grandeur constante, et dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites. Γ est visiblement formée des normales aux cônes de révolution de sommet sur Δ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$; les propriétés générales du n° 44 lui sont applicables; en particulier *les pseudo-droites géodésiques sont les plans passant par* Δ. (Ce qu'on peut retrouver d'ailleurs en faisant $d\psi = 0$.)

b. Les pseudo-droites (d) sont définies par les équations différentielles :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} d\psi = -\operatorname{tang}\beta\, du, \\ d\beta = -k\, d\psi, \end{cases}$$

β étant l'angle du plan tangent à (d) en M avec le vecteur $\vec{e_1}$. La pseudo-droite passant par l'élément $D_0 = D(u_0, \psi_0)$ donné, et dont la direction est définie par $\beta = \beta_0$ en D_0 est donnée par la résolution du système (III) :

$$(4) \qquad u - u_0 = \frac{1}{k}\log\frac{\sin[\beta_0 - k(\psi - \psi_0)]}{\sin\beta_0} = -\frac{1}{k}\log[\cos k(\psi - \psi_0) - \cot\beta_0 \sin k(\psi - \psi_0)].$$

Pseudo-droites passant par deux éléments donnés. — β_0 doit vérifier (4) pour $u = u_1$, $\psi = \psi_1$ correspondant au deuxième élément. Cela donne

$$\cot\beta_0 = \cot k(\psi_1 - \psi_0) - \frac{e^{-k u_1 - u_0}}{\sin k(\psi_1 - \psi_0)}.$$

Une solution et une seule correspond à toute valeur de $(u_1 - u_0,\ \psi_1 - \psi_0)$. Donc *une infinité dénombrable* de droites par 2 points donnés $\left(\text{puisque } \psi_1 - \psi_0 \text{ n'est défini qu'à un multiple près de } \frac{2\pi}{\sin\alpha}\right)$.

c. Pseudo-géodésiques. — Ce sont les extrémales de $\int \sqrt{du^2 + d\psi^2}$, donc elles vérifient

$$\psi - \psi_0 = A(u - u_0) \qquad (A = \text{const}),$$

où, d'après (1) et (2),

$$\frac{\theta - \theta_0}{z - z_0} = B \qquad (B = \text{const}).$$

Le point M décrit alors une hélice d'axe Δ. *Une infinité dénombrable de solutions* par 2 éléments donnés, l'une d'entre elles réalisant effectivement, en général, le minimum de la distance (il peut, exceptionnellement, y en avoir deux).

d. On passe par continuité à un espace holonome quand $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. Alors pour les pseudo-droites

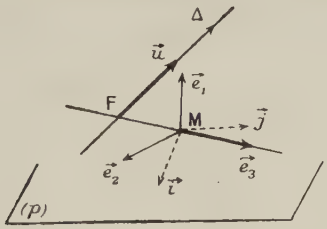
$$d\beta = 0, \qquad \beta = \beta_0, \qquad \frac{\theta - \theta_0}{z - z_0} = \text{const}.$$

Cet espace est analogue au cylindre de révolution. Le nombre de géodésiques (au sens large) et de droites (confondues d'ailleurs avec les précédentes) est le même que précédemment.

e. Remarquons enfin que la congruence admet le groupe des déplacements hélicoïdaux d'axe Δ, et que les géodésiques admettent un sous-groupe à un paramètre de ces déplacements.

48. *Exemple de congruence à plan directeur. Congruence des droites parallèles à un plan donné* (p) *et s'appuyant sur une droite donnée* (Δ). — Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de Δ, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{e_1}$, 3 vecteurs unitaires trirectangulaires, le dernier étant

Fig. B.



perpendiculaire à (p), et le second parallèle au plan $\vec{u}, \vec{e_1}$. Prenons comme paramètres l'abscisse s de F sur Δ, et l'angle

$$\sigma = \widehat{\vec{e_3}, \vec{i}} \qquad \left(\vec{e_3} = \overrightarrow{FM}\right).$$

En désignant par r l'angle $\widehat{\vec{j}, \vec{u}}$, on a pour le repère $M\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3} = R$:

$$(I) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \sin r\, ds, & \omega_{21} = 0, \\ \omega_2 = d\sigma - \cos r \cos\sigma\, ds, & \omega_{12} = 0, \\ \omega_3 = -\cos r \sin\sigma\, ds, & \omega_{32} = d\sigma. \end{cases}$$

a. *Torsion*. — Elle vérifie

$$\vec{T} = -\sin\sigma \cot r\, \vec{e_2}.$$

Elle a une pseudo-direction fixe ($\omega_{12} = 0$). Elle a de plus une valeur fixe quand $d\sigma = 0$, c'est-à-dire ($\omega_{32} = 0$) le long d'un cylindre de la congruence.

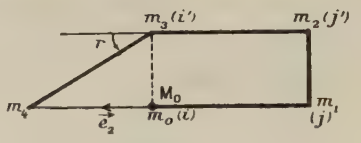
Ces cylindres sont des plans passant par Δ et sont d'ailleurs des pseudo-droites (n° 36). Les plans passant par Δ et perpendiculaires à (p) sont des pseudo-droites géodésiques.

La *carte* le long d'un cycle fermé fini donne un repère final parallèle au repère initial, avec une translation parallèle à l'axe e_2. Le cycle fermé (i, j, j', i', i) défini par 4 droites parallèles aux vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et de cotes s, s' a la carte de la figure 1 ; pour le repère final $m_4 \vec{e_1} \vec{e_2}$ on a

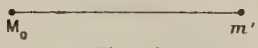
$$M_0 m_4 = (s' - s) \cos r.$$

Ce cycle est réductible à un élément par déformation continue. Au contraire, pour le cycle obtenu en déplaçant D dans un plan parallèle au plan directeur,

Fig. C.



(Fig. 1.)



(Fig. 2.)

et en lui faisant subir un tour complet de D_0 en D_0, le cycle à la carte de la figure 2. Le repère final a son origine en m', et $M_0 m' = 2\pi$ est indépendant de r.

b. Les *pseudo-droites* font un angle constant (pour chacune d'elles) avec le plan directeur, ou ce qui revient au même, avec $\vec{e_1}$. Soit α cet angle

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \operatorname{tang} \alpha, \qquad \text{d'où} \quad d\sigma - \cos r \cos \sigma \, ds = \operatorname{tang} \alpha \sin r \, ds$$

et

$$ds = \frac{d\sigma}{\cos r \cos \sigma + \operatorname{tang} \alpha \sin r}.$$

Soit

$$I(\alpha, \sigma) \equiv \int \frac{d\sigma}{\cos r \cos \sigma + \operatorname{tang} \alpha \sin r}.$$

Les pseudo-droites passant par $D_0(\sigma_0, s_0)$ sont données par

$$s - s_0 = I(\alpha, \sigma) - I(\alpha, \sigma_0),$$

en fonction du paramètre α. Les pseudo-droites passant par D_0 et par $D_1 = D(\sigma_1, s_1)$, ont leur angle α défini par

$$s_1 - s_0 = I(\alpha, \sigma_1) - I(\alpha, \sigma_0).$$

On peut voir qu'on a une infinité dénombrable de pseudo-droites passant par D_0, D_1 (à toute valeur de $\sigma_1 - \sigma_0$ correspond une valeur de α).

c. On passe par continuité à un espace euclidien quand $r \to \frac{\pi}{2}$. L'espace euclidien réalisé globalement est alors le cylindre de révolution (auquel se réduit la surface Σ des centres M). La carte du 1er cycle fermé considéré se referme ($\cos r = 0$), mais celle du second reste ouverte, ce qui correspond à la différence topologique qui existe entre le cylindre et le plan euclidien.

CHAPITRE IV.

RÉALISATION DES CONNEXIONS EUCLIDIENNES PONCTUELLES A DEUX DIMENSIONS.

I. — Généralités.

49. Nous avons défini au Chapitre II la connexion d'une congruence ordinaire d'éléments linéaires, de sorte qu'une telle congruence réalise un espace généralisé E′. Nous allons maintenant traiter la réciproque, et démontrer à son sujet la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Toute connexion euclidienne ponctuelle à deux dimensions est localement réalisable par des congruences d'éléments linéaires de l'espace ordinaire.*

Les congruences réalisant une connexion donnée dépendent généralement de deux fonctions arbitraires d'un argument. Dans certains cas particuliers, elles dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.

C'est une généralisation aux espaces à torsion du théorème bien connu relatif aux espaces de Riemann, et qui correspond au cas particulier de la réalisation par une congruence orthogonale. Un autre cas particulier serait celui d'une congruence de *droites* (*cf.* n° 19). Nous montrerons que cette dernière réalisation est en général impossible, et déterminerons certaines conditions de possibilité. La question a été traitée dans les Notes [16*a*] et [16*b*] aux *Comptes rendus*. (La Note [16*c*] indique une autre réalisation des connexions euclidiennes ponctuelles à deux dimensions les plus générales, par des congruences de *plans* de l'espace à quatre dimensions.)

Signalons d'autre part qu'il se présentera certains *points exceptionnels* au voisinage desquels le théorème ne sera pas démontré (*cf.* n° 62). Une réalisation au voisinage de ces points est alors donnée, dans l'espace à quatre dimensions, par un théorème d'existence du Chapitre V (n° 87).

50. Nous nous bornerons exclusivement au problème local, que nous ramènerons à l'étude de systèmes différentiels. Au sujet du problème global, rappelons seulement que, même si la réalisation locale par une certaine congruence V est valable dans tout l'espace E′, il ne s'ensuit pas que V réalise globalement E′. (Exemple : plan et cylindre de révolution.)

51. Se donner une connexion E', c'est se donner en fonction de deux variables u_1, u_2 et de leurs différentielles, les composantes relatives ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} de la connexion, c'est-à-dire trois formes de Pfaff (des variables u), formes que l'on peut choisir de façon tout à fait arbitraire pourvu que

$$|\varpi_1 \varpi_2| \neq 0.$$

Nous les prendrons *analytiques*, c'est-à-dire que leurs coefficients seront des fonctions analytiques de u_1, u_2.

Ces composantes peuvent être considérées comme celles d'un repère $R(u_1, u_2)$ rectangulaire attaché idéalement à tout point (u_1, u_2) de E'. On peut, sans changer E', remplacer ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} par les formes ϖ_1^*, ϖ_2^*, ϖ_{12}^* qui s'en déduisent par une rotation $\theta(u_1, u_2)$ arbitraire autour de l'origine.

52. Réaliser localement E' par une congruence V, c'est (n° 14) associer à tout point (u_1, u_2) d'un certain voisinage de E', un élément linéaire $S(u_1, u_2)$ tel qu'une famille de repères d'ordre zéro, soit $R(u_1, u_2)$ de la congruence obtenue, ait pour composantes latérales

$$(1) \qquad \omega_1 = \varpi_1, \qquad \omega_2 = \varpi_2, \qquad \omega_{12} = \varpi_{12}.$$

La condition (51.1) entraîne alors

$$(1) \qquad |\omega_1 \omega_2| \neq 0$$

et l'on a une congruence ordinaire (*cf.* 12.3).

Réaliser E' par V c'est en somme associer à tout point (u_1, u_2) de E' le repère $R(u_1, u_2)$. Or les composantes d'un repère sont six formes de Pfaff bien déterminées des six paramètres $z_1, z_2, \ldots, z_6$ du déplacement qui amène en R un repère de base R arbitrairement choisi (*cf.* n° 12 et [14]) : les équations (1) constituent donc un système différentiel

$$(2) \qquad \sigma(z, u) = \sigma(\omega, \varpi)$$

aux six fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_6$, des deux variables indépendantes u_1, u_2. Toute solution de ce système fournit une réalisation locale de E'.

La lettre E' désignera seulement un voisinage de l'espace donné.

53. Mais les composantes de E' ne sont définies qu'à une rotation près $\theta(u_1, u_2)$ des repères attachés à E'. On pourrait aussi bien prendre le système

$$(1) \qquad \sigma^*(z, u) = \sigma(\omega, \varpi^*),$$

avec, θ désignant une fonction analytique de u_1, u_2,

$$\begin{aligned} \varpi_1^* &= \varpi_1 \sin\theta + \varpi_2 \cos\theta, \\ \varpi_2^* &= -\varpi_1 \cos\theta + \varpi_2 \sin\theta, \\ \varpi_{12}^* &= \varpi_{12} + d\theta. \end{aligned}$$

Si la congruence V vérifie σ, elle réalise localement E', donc vérifie σ^*, et l'on peut dire que tous ces systèmes σ, σ^* sont géométriquement équivalents. Mais les $R(u_1, u_2)$, c'est-à-dire les fonctions z obtenues à partir de σ et de σ^* ne sont pas les mêmes dans une même variété V; on peut prévoir que les $R^*(u_1, u_2)$, de paramètres z^*, trouvés pour V à partir de σ^*, se déduisent des $R(u_1, u_2)$ trouvés à partir de σ. par la rotation $\theta(u_1, u_2)$ autour de $\vec{e_3}$.

De façon plus précise. considérons la transformation

$$z^* = \Theta(z)$$

dépendant de la fonction arbitraire $\theta(u_1, u_2)$, qui donne. en fonction des paramètres z d'un repère R *quelconque*, les paramètres z^* de celui qui s'en déduit par la rotation θ autour de $\vec{e_3}$.

On a, pour $s = 1, 2, 12$, les mêmes relations entre les $\omega_s(z)$ et $\omega_s(z^*)$ qu'entre les ϖ_s et les ϖ_s^* (*cf.* n° 51); et *le système transformé de* σ *par la transformation* Θ est

$$\Theta(\sigma) \equiv \sigma^*(z^*, u) \equiv \sigma[\omega(z^*), \varpi^*].$$

Si les z vérifient $\sigma(z)$, les z^* vérifient $\sigma^*(z^*)$, c'est-à-dire σ^*. Les familles $R(u_1, u_2)$ et $R^*(u_1, u_2)$ sont attachées à la même congruence V.

Cette transformation Θ nous servira bientôt à donner une condition simple d'involution du système σ. Rappelons que le système σ^* n'est autre que le système σ défini à partir d'un autre choix (soit R^*) des repères de E'.

54. Le système σ n'est pas en involution. Nous allons montrer que *ses solutions vérifient une autre équation linéaire en* ω.

Soient R la courbure, T_1, T_2 les composantes de la torsion dans le système des repères $\bar{R}$ des composantes ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12}. On a

$$(1) \qquad \varpi_1' - [\varpi_{12}\varpi_2] = T_1[\varpi_1\varpi_2],$$
$$(2) \qquad \varpi_2' - [\varpi_1\varpi_{12}] = T_2[\varpi_1\varpi_2],$$
$$(3) \qquad \varpi_{12}' = R[\varpi_1\varpi_2].$$

D'après σ et les équations de structure de l'espace à trois dimensions, *les équations de fermeture de* σ sont

$$(II) \quad \begin{cases} (4) & [\omega_3\omega_{31}] = T_1[\varpi_1\omega_2], \\ (5) & [\omega_3\omega_{32}] = T_2[\varpi_1\varpi_2], \\ (6) & [\varpi_{32}\omega_{31}] = R[\varpi_1\varpi_2]. \end{cases}$$

Elles ont pour conséquences :

1° Si $R \not\equiv 0$, et si l'on pose $\vec{T} = R\vec{\Pi}$,

$$[\omega_3\omega_{31}] = \Pi_1[\omega_{32}\omega_{31}], \qquad [\omega_3\omega_{32}] = \Pi_2[\omega_{32}\omega_{31}]$$

et, comme $[\omega_{32}\omega_{31}] \neq 0$,

$$\boxed{\omega_3 = \Pi_1 \omega_{32} - \Pi_2 \omega_{31}]. \tag{7}}$$

2° Si $R \equiv 0$, (6) donne

$$[\omega_{32}\omega_{31}] \equiv 0. \tag{8}$$

a. $T_2 \not\equiv 0$. — D'après (5), on a alors $\omega_{32} \not\equiv 0$, donc (8) donne, A désignant une fonction de u_1, u_2,

$$\boxed{\omega_{31} = A\,\omega_{32}} \tag{9}$$

et, d'après (4) et (5),

$$A = \frac{T_1}{T_2}. \tag{10}$$

b. $T_2 \equiv 0$. — Si $\omega_{32} \not\equiv 0$, (5) et (8) entraînent $[\omega_3\omega_{31}] = 0$ et $\vec{T} \equiv 0$. Si la torsion n'est pas partout nulle, c'est donc que $T_2 \equiv 0$ entraîne $\omega_{32} \equiv 0$; et l'on a, dans tous les cas où $\vec{T} \not\equiv 0$,

$$\boxed{T_2\omega_{31} = T_1\omega_{32}.} \tag{11}$$

On voit que les équations de fermeture du système σ entraînent comme conséquence (quand E′ n'est pas holonome), l'équation (7) ou l'équation (11). Donc σ n'est pas en involution. Et, d'autre part, toute solution de σ vérifie (7) ou (11).

Nous sommes ainsi amenés à étudier suivant les cas, les systèmes $[\sigma, (7)]$ ou le système $[\sigma, (11)]$. En adjoignant à un tel système ses équations de fermeture, c'est-à-dire les équations (II) et celles qui résultent de la dérivation extérieure de l'équation supplémentaire (7) ou (11), on obtient un système fermé que nous désignerons par

$$\Sigma \equiv \Sigma[\omega(x), \varpi(u), J],$$

la lettre J représentant des quantités telles que T_1, T_2, R, Π_1, Π_2, ou leurs dérivées covariantes. Nous allons montrer que Σ est en involution. La méthode employée (1) est généralisable aux connexions à n dimensions (*cf.* Chap. I) et c'est ce qui nous l'a fait choisir.

55. 1° Considérons une famille (f) d'éléments (e), par exemple les éléments intégraux d'un système de Pfaff, définie par un système (s) d'égalités : les égalités (s) sont nécessaires et suffisantes pour que (e) fasse partie de (f). Toute égalité, vérifiée éventuellement par un élément (e) de (f), et qui ne fait pas partie de (s) sera dite *égalité superflue*.

---

(1) C'est l'application au système Σ de la méthode employée par M. É. Cartan dans la démonstration du théorème de Schläfli [11].

L'élément *générique* de (f) n'introduit par définition (¹) aucune égalité superflue.

2° Soit un système de Pfaff Σ_n à n variables indépendantes imposées $u_1, \ldots, u_n$, et désignons par $\overline{\Sigma_n}$ le même système dans lequel on ne distingue plus les u comme variables independantes. *Un élément intégral à p dimensions de Σ_n est par définition un élément intégral à p dimensions de $\overline{\Sigma_n}$* (¹), *qui introduit exactement $n - p$ relations entre les du.*

3° Rappelons enfin que l'on a alors (¹) la *condition nécessaire et suffisante d'involution* suivante, que nous énoncerons dans le cas du système Σ qui nous intéresse ($n = 2$), et que nous designerons par condition A.

Condition A. — *a. Par le point intégral générique passe un élément intégral à une dimension; b. par l'élément intégral générique à une dimension passe un élément intégral à deux dimensions* I_2.

56. Le système Σ vérifie la condition (Aa). Considérons en effet les u et les z comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un espace auxiliaire E_8 à huit dimensions; limitons E à un domaine où $[\varpi_1, \varpi_2]$ n'est *jamais* nul. On peut prendre pour paramètres directeurs d'un élément linéaire de E_8, ϖ_1, ϖ_2 et les ω, puisque ϖ_1, ϖ_2 sont indépendants en *du*, et les ω indépendants en *dz* et indépendants des *du*.

Par tout point intégral, c'est-à-dire par tout point (u, z) du domaine $[\varpi_1 \varpi_2] \neq 0$, passent des élémen s intégraux à une dimension, pour lesquels on peut prendre arbitrairement, d'après la forme du système Σ, les paramètres ϖ_1, ϖ_2; il suffit de ne pas prendre $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$ pour que l'élément choisi introduise exactement une relation entre les *du*. C. Q. F. D.

Reste à vérifier la condition (Ab). Elle exprime qu'étant donné un élément intégral I_1 :

b_1. ou bien on peut affirmer qu'il passe par lui un I_2;

b_2. ou bien I_1 vérifie une égalité superflue, c'est-à-dire non nécessaire pour qu'il soit élément intégral à une dimension de Σ.

De façon plus précise, il existe un système (s') d'égalités superflues, c'est-à-dire qu'un élément peut être intégral à une dimension sans vérifier une seule des égalités de (s'). Dans le cas (b_2), I_1 vérifie une ou plusieurs égalités de (s').

57. Nous allons simplifier les calculs relatifs à la condition (Ab) en faisant intervenir les transformations Θ. Cette simplification a été introduite par M. É. Cartan, dans la démonstration du théorème de Schlaëfli [11].

(¹) *Cf.* É. Cartan [17].

La transformation $\Theta(z)$ du n° 53 transforme Σ en

$$\Sigma^* \equiv \Sigma[\omega(z^*), \varpi^*, J^*], \tag{1}$$

les ϖ^* et J^* étant les expressions des ϖ et J dans le système des repères $\overline{R^*}$ déduits des $\overline{R}$ par la rotation $\theta(u_1, u_2)$ autour de l'origine.

Étant donné un élément I_1, c'est-à-dire un point (u, z) de E_8 et des paramètres directeurs ϖ_1, ϖ_2, ω, l'équation

$$-\varpi_1 \sin\theta + \varpi_2 \cos\theta = 0 \tag{2}$$

définit un angle θ, donc une transformation Θ. Elle transforme R en R^*, et le transformé I_1^* de I_1 par Θ vérifie

$$\varpi_2^* = 0.$$

C'est un élément intégral à une dimension de Σ^*, car il vérifie bien le système, et, d'autre part, Θ ne modifiant pas les u, J^* introduit exactement autant de relations entre les du que l'élément I_1, c'est-à-dire *une* relation.

Ce raisonnement est d'ailleurs général et tout élément intégral I de Σ est transformé par Θ en un élément intégral I^* de Σ^*; et inversement, tout élément intégral I'^* de Σ^* est transformé par Θ^{-1} en un élément intégral I' de Σ. Par suite, un élément intégral I_2^* à deux dimensions de Σ^* passant par I_1^* est transformé par Θ^{-1} en un élément intégral à deux dimensions de Σ passant par I_1 :

La recherche des I_2 *passant par* I_1 *est ainsi ramenée à celle des* I_2^* *de* Σ^* *qui passent par* I_1^*. Or, un I_2^* passant par I_1^* est défini par un élément à une dimension ε_2^* intégral de Σ^* et en involution avec I_1^* (c'est-à-dire de même centre u^*, z^* et vérifiant avec lui les équations de fermeture). On peut prendre pour ε_2^* n'importe quel élément de I_2^* non colinéaire à I_1^*, et, comme I_2^* ne doit introduire aucune relation entre les du, et que I_1^* vérifie $\varpi_2^* = 0$, l'élément ε_2^* *ne doit pas vérifier* $\varpi_2^* = 0$. Il existe dans I_2^* un élément vérifiant n'importe quelle relation autre que cette dernière entre les du et, par exemple la relation

$$\varpi_1^* = 0.$$

Nous désignerons par I_1^0 tout élément intégral à une dimension vérifiant $\varpi_2 = 0$; par ε_2^0 tout élément intégral à une dimension vérifiant $\varpi_1 = 0$. *La recherche des* I_2 *passant par* ε_1 *est donc ramenée a celle des* ε_2^0 *en involution avec un* I_1^0, *dans un certain système* Σ^*, *c'est-à-dire dans le système* Σ *correspondant à un certain choix des repères de* E'.

58. Avec ces notations, on peut établir la condition suivante d'involution, dont il nous importe surtout d'utiliser le caractère suffisant.

Condition B. — *Pour le choix générique des repères de* E', *il existe pour l'*I_1^0 *générique, un* ε_2^0 *en involution avec lui.*

En effet I_1^* est un élément I_1^0 relatif au système Σ^*, c'est-à-dire au repère R^*. Si la condition B est vérifiée, ou bien on peut affirmer qu'il passe par I_1^* un I_2^*,

donc par I_1 un I_2, et l'on est dans le cas (Ab_1) du n° 56, ou bien l'on a l'une ou l'autre des circonstances suivantes :

α. R^* n'est pas un repère générique, c'est-à-dire vérifie une *condition* d'égalité.

β. R^* est un repère générique, mais I_1^* est un I_1^0 vérifiant une égalité superflue.

La circonstance (α) entraîne que I_1 est un élément intégral de Σ' pour lequel ϖ_1 et ϖ_2 sont liés par une certaine relation d'égalité [qui n'est d'ailleurs autre que (57.2) avec pour θ une valeur particulière θ_0 correspondant au repère particulier R^*]. C'est une égalité superflue, puisque pour l'élément générique ϖ_1 et ϖ_2 sont arbitraires (et $\theta \neq \theta_0$). I_1 n'est pas générique, on est dans le cas (Ab_2).

La circonstance (β) est celle où θ n'a pas une valeur particulière, mais où I_1^* vérifie une condition d'égalité superflue : l'existence d'une telle relation est conservée par Θ^{-1}, et l'on a encore un élément I_1 non générique : on est encore dans le cas (Ab_2).

En définitive I_1 vérifie soit (Ab_1), soit (Ab_2) donc vérifie (Ab) : par l'I_1 générique passe un I_2. C. Q. F. D.

Il est de même facile d'établir que la condition B est nécessaire.

Application de la condition B. — Les paramètres directeurs étant définis à un facteur constant près, on prendra, pour I_1^0,

$$\varpi_1 = 1, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \omega_s = a_{s1},$$

et pour ε_2^0,

$$\varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 1, \qquad \omega_s = a_{s2},$$

l'indice s pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 31, 32, 12. Ces principes posés, passons à l'étude des deux systèmes Σ obtenus suivant que R est partout nul ou non. Nous examinerons aussi en passant les possibilités de réalisation par des congruences de droites.

II. — Connexions à courbure non partout nulle.

a. Réalisation par des congruences d'éléments linéaires.

59. On a alors le système Σ (*cf.* n° 54).

$$(I)\quad \begin{cases} (1)\ \omega_1 = \varpi_1, \\ (2)\ \omega_2 = \varpi_2, \\ (3)\ \omega_{12} = \varpi_{12}, \\ (4)\ \omega_3 = \Pi_1 \omega_{32} - \Pi_2 \omega_{31}. \end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} (5)\ [\omega_3\ \omega_{31}] = T_1[\varpi_1 \varpi_2], \\ (6)\ [\omega_3\ \omega_{32}] = T_2[\varpi_1 \varpi_2], \\ (7)\ [\omega_{32} \omega_{31}] = R\ [\varpi_1 \varpi_2], \\ (8)\ [\omega_{31} \varpi_1\ ] + [\omega_{32} \varpi_2] = (\Pi_1 \omega_{32} - \Pi_2 \omega_{31})'. \end{cases}$$

En fonction des dérivées absolues de $\vec{\Pi}$ (*cf.* n° 25) définies par

$$D\Pi_i = d\Pi_i - \varpi_{ij}\Pi_j = \Pi_{i,1}\varpi_1 + \Pi_{i,2}\varpi_2 \qquad (i, j = 1, 2),$$

on trouve, pour (8), l'équation

$$(9) \qquad \Pi_{1,1}[\varpi_1\omega_{32}] + (1 - \Pi_{2,1})[\varpi_1\omega_{31}] = -\Pi_{2,2}[\omega_{31}\varpi_2] + (1 + \Pi_{1,2})[\omega_{32}\varpi_2].$$

Étude de ce système. — Les équations (5), (6) sont conséquences de (I) et de (7). Le système Σ se réduit donc aux équations [(I), (7), (9)].

Par un point intégral passent toujours ∞^3 éléments I_1 ; on peut choisir arbitrairement les paramètres directeurs ϖ_1, ϖ_2, ω_{31}, ω_{32}. Les autres sont alors bien définis.

Soient, pour les paramètres directeurs :

1° de I_1^0 :

$$\varpi_1 = 1, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \omega_{31} = a_1, \qquad \omega_{32} = a_2;$$

2° de ε_2^0 :

$$\varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 1, \qquad \omega_{31} = x_1, \qquad \omega_{32} = x_2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ε_2^0 soit en involution avec I_1^0 est qu'ils vérifient (7) et (9), soit, en fonction des a et des x, les équations

$$(7') \qquad a_1x_2 - a_2x_1 = R,$$

$$(9') \qquad \Pi_{1,1}x_2 + (1 - \Pi_{2,1})x_1 = -\Pi_{2,2}a_1 + (1 + \Pi_{1,2})a_2.$$

On a deux équations linéaires aux inconnues x_1, x_2. Le déterminant Δ n'est, en général, pas nul, à moins que $\Pi_{1,1} \equiv 1 - \Pi_{2,1} \equiv 0$. Si $\Delta \not\equiv 0$, il existe pour I_1^0 un élément ε_2^0 en involution avec lui. Si $\Delta = 0$, quatre cas se présentent :

α. $\Pi_{1,1} \equiv 1 - \Pi_{2,1} \equiv 0$ quel que soit le point intégral (c'est-à-dire u_1, u_2) et quel que soit le choix des repères. Nous examinerons plus loin le cas d'un tel espace E′.

β. $\Pi_{1,1} \equiv 1 - \Pi_{2,1} \equiv 0$ quel que soit le choix des repères, pour l'origine de I_1^0, cette relation n'étant vraie qu'en certains points de E′ : l'origine de I_1^0 est particulière et I_1^0 n'est pas générique.

γ. $\Pi_{1,1} = 1 - \Pi_{2,1} = 0$ pour les repères R, mais pas pour un repère quelconque : le choix des repères n'est pas générique.

δ. $\Pi_{1,1}$ et $1 - \Pi_{2,1}$ ne sont pas nuls tous deux. Δ n'est nul que pour des valeurs particulières de a_1, a_2, donc l'I_1^0 considéré n'est pas générique.

60. *Conclusion dans le cas général.* — Soit un espace E′ *ne vérifiant pas la condition* (α). Pour le choix générique du repère [(γ) non vérifiée] et pour l'I_1^0 générique [(β) et (δ) non vérifiées], le déterminant Δ n'est pas nul, et il existe un ε_2^0 en involution avec I_1^0. La condition B est vérifiée et Σ est en involution. Il admet donc des solutions.

Degré d'arbitraire de la solution générale. — Le nombre d'I_2 passant par l'I_1 générique est celui des ε_2^* en involution avec I_1^0 ; il y en a ici un et un seul. La solution générale dépend par suite [17] de fonctions arbitraires d'un argument au plus.

D'après la théorie des systèmes en involution [17], le nombre ν de fonctions arbitraires d'*un* argument dont dépend la solution générale est alors donné par

$$\nu = n - p - s_0,$$

n étant le nombre total de variables (ici 8), p celui des variables indépendantes (ici 2), et s_0 le nombre des paramètres arbitraires de l'I_1^0 passant par un point intégral donné (ici 4). On a donc $\nu = 2$, d'où la partie du théorème du n° 49 qui concerne le cas général ici envisagé.

Les solutions d'un système Σ donnent visiblement des congruences *distinctes*, c'est-à-dire non toutes déductibles de l'une d'entre elles par des déplacements. La relation géométrique entre ces congruences a été caractérisée au n° 25.

61. *Problème de Cauchy dans ce cas général.* — Le fait que la solution générale dépend ici de deux fonctions arbitraires d'un argument peut se traduire par la proposition suivante :

Théorème. — *Dans la réalisation de* E_2' *dans* E_3, *on peut faire correspondre à une courbe* γ *donnée de* E_2' *une courbe arbitrairement choisie* (C) *dans* E_3 *comme lieu des centres des éléments homologues des points de* (γ).

Démonstration. — La solution générale V est définie par une famille $\mathcal{F}$ de repères R dont les composantes relatives vérifient

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \varpi_1 ; \quad \omega_2 = \varpi_2 ; \quad \omega_{12} = \varpi_{12}, \\ \omega_3 = \Pi_1 \omega_{32} - \Pi_2 \omega_{31}, \end{cases}$$

cette famille $\mathcal{F}$ dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument, soient f_1 et f_2.

A la courbe γ de E_2' définie par $u_2 = f(u_1)$ est associée la pseudo-ligne Γ de V qui vérifie la même équation. Prenons dans E_2' des repères $\bar{R}$ tels que les repères attachés aux points de γ vérifient $\varpi_2 = 0$. Les autres composantes sont des formes $\varpi(u)$ à une variable. Les repères R correspondant dans E_3 vérifient $\omega_1 = \varpi_1(u)$, ..., et leur origine engendre une courbe (C) qui dépend des fonctions f_1 et f_2.

On peut choisir f_1 et f_2 de façon que (C) soit une courbe donnée (C_0) de E_3. Soit en effet

$$\widetilde{\omega_1} = ds, \qquad \widetilde{\omega_{12}} = \rho\, ds.$$
$$\widetilde{\omega_2} = \widetilde{\omega_3} = \widetilde{\omega_{31}} = 0, \qquad \widetilde{\omega_{32}} = \tau\, ds$$

les composantes du repère de Frenet $M\vec{e_i}$ de (C_0) ; une rotation d'angle V

autour de $\widetilde{e_1}$ amène ce repère en $M\widetilde{e_i^*}$; une rotation d'angle θ autour de $\widetilde{e_2^*}$ amène $M\widetilde{e_i^*}$ en $M\overrightarrow{e_i^*}$ et l'on a

$$\begin{aligned}
\omega_1^* &= ds\cos\theta, & \omega_{12}^* &= (\rho\cos V\cos\theta+\tau\sin\theta)\,ds-\sin\theta\,dV;\\
\omega_2^* &= 0, & \omega_{31}^* &= \rho\sin V\,ds+d\theta;\\
\omega_3^* &= -ds\sin\theta, & \omega_{32}^* &= (-\rho\cos V\sin\theta+\tau\cos\theta)\,ds-\cos\theta\,dV.
\end{aligned}$$

Les équations différentielles

$$\begin{aligned}
\omega_1^* &= \varpi_1(u),\\
\omega_{12}^* &= \varpi_{12}(u),\\
\omega_3^* &= \Pi_1(u)\omega_{32}^*-\Pi_2(u)\omega_{31}^*
\end{aligned}$$

expriment que (C_0) est une courbe (C) lieu des centres des éléments homologues des points de γ. Ce sont des équations à trois fonctions inconnues s, V, θ de la variable u. Elles sont d'ailleurs visiblement compatibles en $\frac{ds}{du}, \frac{dV}{du}, \frac{d\theta}{du}$, et finalement compatibles en s, V, θ. D'où trois constantes arbitraires pour la solution générale correspondant à (C_0). *La réalisation serait complètement déterminée si l'on se donnait l'élément* S *homologue d'un point donné* $\overline{M}$ *de* E_n', *et la courbe* (C_0) *lieu des centres des éléments homologues des points d'une courbe* γ *passant par* $\overline{M}$.

Caractéristiques. — La correspondance entre γ et C définit une courbe (K) de l'espace des (u, z). Les résultats précédents ne sont valables que dans le cas général où les éléments de contact de (K) ne sont pas des éléments intégraux singuliers de Σ.

Les courbes caractéristiques de Σ (dans l'espace des u, z) sont définies par

$$\frac{a_1}{\Pi_{1,1}}=\frac{a_2}{\Pi_{2,1}-1}, \tag{1}$$

relation qui entraîne la nullité du déterminant des équations (59.7′) et (59.9′).

Si (K) *est une caractéristique, le problème de Cauchy est en général impossible* [17]. On peut énoncer une condition *nécessaire* de possibilité qui est la compatibilité des équations (59.7′) et (59.9′), auquel cas l'on a

$$\frac{a_1}{\Pi_{1,1}}=\frac{a_2}{\Pi_{2,1}-1}=\frac{R}{-\Pi_{2,2}a_1+(1+\Pi_{1,2})a_2}. \tag{2}$$

Alors a_1 et a_2 sont donnés par (2), et, pour les courbes (C) correspondantes, V et θ sont données en fonction de l'*arc u de* γ par les *deux relations finies*

$$\begin{cases}
\rho\cos V &= (\eta\cos\theta-a_2\sin\theta)\cos\theta,\\
-\operatorname{tang}\theta &= \Pi_1 a_2-\Pi_2 a_1,
\end{cases} \tag{3}$$

où η désigne la courbure de γ ($\varpi_{12} = \eta_1 du$); ces deux relations résultent de l'élimination de dV, ds entre les équations $\omega_1^* = du$, $\omega_{12}^* = \eta_1 du$, $\omega_{32}^* = a_2 du$ et $\omega_3^* = (\Pi_1 a_2 - \Pi_2 a_1) du$.

Ainsi, à toute courbe γ de E_2' correspond une famille de courbes (C) de E_3 définissant avec γ une courbe (K) caractéristique. Cette famille dépend d'une fonction arbitraire, par exemple la fonction $a_2(u)$; a_1 est alors donné par (1), et V et θ vérifient (3). Les courbes (C) pour lesquels le problème est peut-être possible vérifient de plus (2).

62. *Points exceptionnels.* — On a défini au n° 60 une réalisation de E_2' au voisinage d'un point (u_1, u_2) générique de E_2'. On a écarté *a priori* les points de courbure nulle. On peut se dispenser de les écarter, en remplaçant l'équation (54.7) par la suivante :

$$R\omega_3 = T_1\omega_{32} - T_2\omega_{31}. \tag{1}$$

qui est valable dans tous les cas, et fournit encore [après une discussion un peu plus longue (1)] un système Σ en involution. Le théorème d'existence des solutions de Σ ne permet pas d'affirmer l'existence de réalisations au voisinage de tout point de E_2'. On montrerait que les points exceptionnels (2) sont dans le cas général envisagé ici, des trois types suivants :

1° Points à courbure non nulle pour lesquels

$$\Pi_{1,1} = \Pi_{2,2} = 1 - \Pi_{1,2} = 1 - \Pi_{2,1} = 0. \tag{2}$$

2° Points où la courbure est à la fois nulle et stationnaire, et où, de plus, la direction de la torsion est stationnaire.

3° Points où la courbure et la torsion sont nulles.

---

(1) L'équation (1) peut s'écrire, si $R \neq 0$, $R\tilde{\omega} = 0$ en posant $\tilde{\omega} = \omega_3 - \Pi_1\omega_{32} - \Pi_2\omega_{31}$. Alors l'équation dérivée (1') $[dR\ \tilde{\omega}] + R\tilde{\omega}' = 0$ devient [puisque $\tilde{\omega} = 0$ d'après (1)] $\tilde{\omega} = 0$, et l'on est ramené à la discussion précédente.

Points à courbure nulle. — L'équation (1') s'écrit

$$[dR\omega_3] = [DT_1\omega_{32}] - [DT_2\omega_{31}] \tag{1'}$$

et l'équation (1) se réduit à

$$T_1\omega_{32} = T_2\omega_{31}. \tag{1}$$

Si $\vec{T} = R = 0$ le point intégral (u_1, u_2, z) est singulier, car (1) s'évanouit (d'où la 3e catégorie).

Si $\vec{T} \neq 0$ (donc $T_1T_2 \neq 0$ pour le repère générique), une discussion analogue à celle du n° 59 montre que ces points sont en général réguliers, et conduit à la 2e catégorie de points exceptionnels.

(2) Ce sont les points (u_1, u_2) tels que les points intégraux (u_1, u_2, z) ne soient *pas réguliers*, c'est-à-dire tels que par ces points il ne passe aucun élément intégral régulier (*cf.* [17]).

Conclusion. — *Étant donné un espace* E'_2 *à courbure, on peut, dans le cas général où tous les points à courbure non nulle ne vérifient pas* (2), *affirmer l'existence d'une réalisation dans* E_3 *au voisinage de tout point n'entrant dans aucune des catégories ci-dessus.*

63. *Cas particulier.* — Nous allons maintenant examiner les connexions vérifiant

$$\Pi^*_{1,1} \equiv 1 - \Pi^*_{2,1} \equiv 0, \qquad R \neq 0 \tag{1}$$

en tout point (u_1, u_2), et quel que soit le choix des repères $R^*(u_1, u_2')$, c'est-à-dire quels que soient u_1 u_2, θ. Nous les appellerons *connexions* E'_0.

Le calcul montre qu'il faut et suffit pour cela que (1) soit vérifiée pour deux valeurs de θ ne différant pas entre elles d'un multiple de π, par exemple pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce qui donne, pour (1), la condition nécessaire et suffisante

$$\Pi_{1,1} \equiv 1 - \Pi_{2,1} \equiv \Pi_{2,2} \equiv 1 + \Pi_{1,2} \equiv 0. \tag{2}$$

L'équation (59.9′) est identiquement vérifiée. Pour l'I^0_1 générique (ne vérifiant pas $a_1 = a_2 = 0$), il existe ∞^1 éléments ε^0_2 associés. Par l'I_1 générique, il passe donc ∞^1 I_2, et la solution générale dépend d'*une fonction arbitraire de deux arguments.*

Signification géométrique de (2) *pour l'espace* E'_0. — Prenons $\vec{e_2}$ sur la torsion; on a alors

$$\Pi_1 = 0, \qquad d\Pi_1 = 0, \qquad D\Pi_1 = d\Pi_1 - \omega_{12}\Pi_2 = -\omega_{12}\Pi; \tag{3}$$

$$\Pi_2 = \Pi, \qquad d\Pi_2 = d\Pi, \qquad D\Pi_2 = d\Pi_2 + \omega_{12}\Pi_1 = d\Pi. \tag{4}$$

L'hypothèse (2) donne

$$D\Pi_1 = -\omega_2, \qquad D\Pi_2 = \omega_1. \tag{5}$$

D'où, d'après (3) et (4),

$$\omega_1 = d\Pi, \tag{6}$$

$$\omega_{12} = \frac{\omega_2}{\Pi}. \tag{7}$$

La relation (7) exprime que les trajectoires orthogonales ($\omega_2 = 0$), des lignes de torsion sont des droites; (6) exprime que, le long d'une ligne de torsion l_0 ($\omega_1 = 0$), la torsion a une grandeur constante Π_0, et (7) exprime que Π_0 est la courbure de (l_0); on peut dire que les espaces E'_0 ont pour lignes de torsion des cercles (au sens courbure constante) et que la torsion le long de ces cercles est constamment égale à leur rayon (de courbure).

Réciproquement, dans un espace jouissant de ces propriétés, ω_1 est de la forme $A\,d\Pi$, et ω_{12} est de la forme $B\omega_1 + \frac{\omega_2}{\Pi}$; si les trajectoires orthogonales

des lignes de torsion sont des droites, $B \equiv 0$, et l'on a (7). Alors

$$\Pi\omega'_{12} = \Pi R[\omega_1\omega_2] = [\omega_1\omega_{12}] + \Pi R[\omega_4\omega_2] - [d\Pi\omega_{12}],$$

d'où

$$(A-1)[d\Pi\omega_{12}] = 0,$$

et finalement $A = 1$, d'où (6). Or (6) et (7) entraînent (2). Conclusion :

Les espaces vérifiant (2), *espaces* E'_0, *sont ceux dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites, et dont les lignes de torsion sont des cercles, la torsion le long d'un tel cercle étant égale au rayon de courbure.*

Signification de (2) *dans les congruences réalisantes.* — Les équations (25.2) et (25.3) montrent, comme conséquence de (2) que les composantes, $\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2$ du repère parallèle à $R(u_1, u_2)$, et d'origine le pôle de l'élément S décrivant la congruence réalisante, sont toutes deux nulles, ainsi bien entendu que $\widetilde{\omega}_3$ qui l'est toujours : le pôle de S reste donc fixe quand S décrit la congruence; d'où l'énoncé suivant, qui précise le cas particulier envisagé dans le théorème général :

Théorème. — *Les espaces* E'_0 *sont réalisables par des congruences dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments. Dans toute congruence réalisante, la surface polaire est réduite à un point.*

b. Réalisations par des congruences de droites.

64. Pour que le repère obtenu soit celui d'une congruence de droites, il faut et il suffit que son origine soit le milieu des foyers, donc que la somme des racines de l'équation (20.2)

$$[\omega_1 + \rho\omega_{31} \quad \omega_2 + \rho\omega_{32}] = 0 \tag{20.2}$$

soit nulle. C'est-à-dire que l'on ait

$$[\omega_1\omega_{32}] = [\omega_2\omega_{31}]. \tag{1}$$

Le système Σ' à résoudre est formé du système Σ et de l'équation quadratique (1) [13, 17]. Les éléments ε_2^0 en involution avec I_1^0, doivent vérifier l'équation supplémentaire (avec les notations du n° 59)

$$a_1 + x_2 = 0, \tag{2}$$

x_1 et x_2 étant en général bien déterminés par (59.7') et (59.9'), (2) est alors impossible et le système Σ' n'est pas en involution.

Pour qu'il le soit, il faudrait que ces équations soient compatibles avec (2) en tirant x_2 de (2), elles deviennent

$$a_2 x_1 = -R + a_1^2, \tag{3}$$

$$(1 - \Pi_{2,1}) x_1 = (\Pi_{1,1} - \Pi_{2,2}) a_1 + (1 + \Pi_{1,2}) a_2. \tag{4}$$

Leur compatibilité entraînerait une relation entre a_1, a_2 donc un I_1^0 non générique, sauf si (4) s'évanouit, c'est-à-dire dans l'hypothèse

$$1 - \Pi_{2,1} \equiv \Pi_{1,1} - \Pi_{2,2} \equiv 1 + \Pi_{1,2} \equiv 0. \tag{5}$$

Ceci doit être réalisé *en tout point* (u_1, u_2) sinon I_1^0 ne serait pas générique. Le calcul montre que les équations (5) sont réalisées quel que soit θ pourvu qu'elles le soient pour une valeur particulière de θ. Le choix des axes est alors générique, et par tout I_1 générique passe un I_2 bien déterminé *du système* Σ'. Comme on a encore $s_0 = 4$, la solution générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Conclusion. — *Les espaces vérifiant la condition* (5) *sont réalisables par des congruences de droites, qui dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

Cela ne veut pas dire qu'une connexion, qui ne vérifie pas (5), n'est en aucun cas réalisable par des congruences de droites. Il peut se faire que, pour certaines connexions, le système Σ', bien que non en involution, soit tout de même compatible. La Note [16*b*] constitue, en somme, une étude complète de la compatibilité de Σ' et indique, en dehors de la condition (5), certaines conditions de possibilité.

III. — Cas du parallélisme absolu.

65. Nous n'aurons à considérer que des espaces effectivement non holonomes, puisque les réalisations locales du plan euclidien ont été données (au n° 31). Les espaces E′ étudiés par la suite seront donc des espaces à parallélisme absolu dont la torsion n'est pas partout nulle.

On pourrait leur appliquer la méthode précédente. On peut alors simplifier les calculs en se limitant aux repères R pour lesquels $\varpi_{1,2} = 0$, et par suite aux transformations Θ d'angle θ indépendant de u_1, u_2, ce qui ne modifie pas la condition d'involution B. Pour le repère générique et l'élément I_1^0 générique, T_1 et T_2 ne sont pas nuls, sans quoi l'on aurait $\vec{T} \equiv 0$; cela permet de prendre l'équation à associer à ω pour former Σ (n° 54) sous la forme

$$\omega_{31} = A\,\omega_{32} \qquad \text{avec} \quad A = \frac{T_1}{T_2}.$$

En opérant comme précédemment, on trouverait encore un ε_2^0 et un seul en involution avec I_1^0, dans le cas général où l'équation (1′) dérivée de (1) n'est pas identiquement vérifiée. On a encore alors deux fonctions arbitraires d'un argument, c'est-à-dire le théorème du n° 49 (¹).

Si (1′) est identiquement vérifiée, Σ est encore en involution, et les variétés réalisantes dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Ce cas correspond à $dA \equiv 0$, c'est-à-dire aux E′ dont la torsion a une direction fixe; énonçons ce résultat, qui complète le théorème précédent :

Théorème. — *Les espaces* E′ *à parallélisme absolu à torsion de direction fixe sont réalisables par des congruences à plan directeur qui dépendent, pour un* E′ *donné, d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

Pour la réalisation par des *congruences de droites*, il faut, puisque $\vec{T} \not\equiv 0$, qu'il y ait un foyer simple à l'infini, et l'origine du repère intrinsèque est caractérisée par le fait qu'une distance focale est égale à -1; cela donne d'après (20.2), la condition nécessaire et suffisante

$$[\omega_1 - \omega_{21} \quad \omega_2 - \omega_{22}] = 0. \tag{2}$$

Le système $\Sigma' \equiv [\Sigma, (2)]$ admet comme condition d'involution $A = \text{const}$.

Théorème. — *Les espaces* E′ *à parallélisme absolu à torsion de direction fixe sont réalisables par des congruences de* droites *qui, pour un* E′ *donné dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

Quand Σ' n'est pas en involution, il peut cependant admettre des solutions, du moins pour certains espaces E′. Elles ont été données dans la Note [16*a*]. Nous allons les retrouver (n° 76) en faisant une étude directe de la réalisation de E′. Nous ferons ici cette étude *dans le cas général d'une réalisation par des congruences d'éléments linéaires*, de façon à expliciter les résultats et surtout à indiquer *certaines formes géométriques* auxquelles peuvent se réduire les solutions (n^{os} 66 à 75).

66. Pour l'étude directe que nous allons faire, nous prendrons comme inconnues, non plus les paramètres z du repère R de la congruence cherchée, mais *les formes de Pfaff à deux variables* que sont les composantes de R quand l'élément $(\overrightarrow{Me_3})$ décrit la congruence.

a. Donnée de E′. — E′ est donné par trois formes de Pfaff analytiques ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} de deux variables u_1, u_2. T_1 et T_2 sont alors des fonctions analytiques

(¹) Pour la solution générale, seule en vue ici, aucune courbe intégrale de Σ ne passe par les points u_1, u_2, où $\vec{T} = 0$: la réalisation locale est donc *limitée aux domaines de torsion jamais nulle* (du moins pour la solution générale).

de u_1, u_2 : *nous nous placerons exclusivement dans des domaines* E′ *où la torsion n'est jamais nulle*. L'angle de la torsion avec les axes du repère donné est alors une fonction analytique de u_1, u_2, et une rotation analytique des axes permet de prendre $\vec{e}_2$ sur le vecteur torsion.

On peut donc prendre en chaque point $\overline{M}(u_1, u_2)$ un repère $\overline{R}$ dont le deuxième axe est porté par la torsion $\vec{T}$, et dont les composantes ϖ_1, ϖ_2, ϖ_{12} restent analytiques. On posera alors

$$\vec{T} = T\vec{e}_2.$$

On peut, d'autre part, par un nouveau choix de coordonnées (u, v), prendre

$$(1) \qquad \varpi_1 = X(u, v)\,du,$$

$$(2) \qquad \varpi_2 = Y(u, v)\,dv.$$

Enfin, la courbure étant nulle, $\varpi'_{12} = 0$ donne

$$(3) \qquad \varpi_{12} = d\varphi \qquad (\varphi = \text{fonction de } u, v).$$

En général $\varpi_{12} \neq 0$ et φ ne se réduit pas à une constante. On peut alors prendre, comme coordonnées dans E′, φ et une des variables u, v. D'où les divers cas examinés plus loin.

b. Réalisation de E′. — Le problème consiste à assujettir les composantes ω_s d'un repère $R(u, v)$ de l'espace à trois dimensions, aux équations

$$(I) \qquad (4)\ \omega_1 = \varpi_1, \qquad (5)\ \omega_2 = \varpi_2, \qquad (6)\ \varpi_{12} = \varpi_{12},$$

c'est-à-dire à trouver six formes de Pfaff ω_s des deux variables u, v, vérifiant (1) et les six équations de structure $[\omega_s]$ de l'espace ordinaire. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que l'élément $(M\vec{e}_3)$ de la famille de repères $R(u, v)$ engendre une congruence réalisant E′.

1° Les équations $[\omega_1]$, $[\omega_{12}]$, $[\omega_2]$ s'écrivent

$$[\omega_3\omega_{31}] = 0, \qquad [\omega_{32}\omega_{31}] = 0, \qquad [\omega_3\omega_{32}] = T[\omega_1\omega_2].$$

Si ω_{31} n'était pas partout nul, les deux premières entraîneraient $[\omega_3\omega_{32}] = 0$, donc $T = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$(7) \qquad \omega_{31} \equiv 0.$$

2° Alors $[\omega_{32}]$, qui s'écrit $[\omega_{31}\omega_{12}] = \omega'_{32}$, montre que $\omega'_{32} = 0$ et que ω_{32} est une différentielle totale exacte

$$(8) \qquad \omega_{32} = d\sigma,$$

σ étant une fonction *inconnue* de (u, v).

Il reste donc à déterminer σ et la forme ω_3; comme (7) entraîne $[\omega_1]$ et $[\omega_{12}]$, et que (8) entraîne alors $[\omega_{32}]$, σ et ω_3 doivent vérifier $[\omega_{31}]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$.

3° $[\omega_{31}]$ s'écrit, en tenant compte de (7),

$[\omega_{31}]$ $$[\omega_{32}\omega_{12}] = [d\sigma\ \varpi_{12}] = 0.$$

On a donc à envisager deux cas suivant que ϖ_{12} est nul ou non.

67. Si $\varpi_{12} \equiv d\varphi \not\equiv 0$, $[\omega_{31}]$ montre que σ est fonction seulement de φ :

(9) $$\omega_{32} = p(\varphi)\, d\varphi.$$

Signification de $p(\varphi)$. — Si (γ) désigne l'indicatrice sphérique du cône directeur, et s son arc, α l'angle du plan osculateur à (γ) avec le plan tangent à la sphère, les expressions de $\overrightarrow{de_3}$ et $\overrightarrow{de_2}$ montrent que

$$ds = p(\varphi)\, d\varphi, \qquad \operatorname{tang}\alpha = p(\varphi).$$

La fonction $p(\varphi)$ *caractérise donc le cône directeur.* En tenant compte de la signification de l'hypothèse $\varpi_{12} \not\equiv 0$, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Les espaces à parallélisme absolu* E′ *dont la torsion n'a pas une direction fixe sont localement réalisables par des congruences à cône directeur non plan : étant donné un espace* E′, *on peut prendre, pour cône directeur, un cône (non plan) arbitraire, et les congruences réalisant* E′, *et admettant ce cône directeur, dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable (de la variable* φ*).*

Nous le démontrerons d'abord dans le cas général où φ dépend de u et de v, puis nous examinerons le cas particulier où φ ne dépend que de u (qui ne change rien à la démonstration), et nous étendrons enfin la démonstration au cas où φ ne dépend que de v.

68. *Cas général où* φ *dépend de* u *et de* v. — En prenant v et φ comme coordonnées, le tableau (T) des composantes de E′ et de la congruence réalisante est le suivant :

(T)

$\omega_1 = \varpi_1 = \xi\, d\varphi + \zeta\, dv,$	$\omega_{31} = 0,$
$\omega_2 = \varpi_2 = \eta\, dv,$	$\omega_{32} = p(\varphi)\, d\varphi,$
$\omega_{12} = \varpi_{12} = d\varphi,$	$\omega_3 = \mathrm{P}(v, \varphi)\, d\varphi + \mathrm{Q}(v, \varphi)\, dv.$

Les fonctions données ξ, η, ζ vérifient par hypothèse (d'après le choix des repères et les équations de structure de E′) les relations

(1) $$\eta = \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\xi}{\partial v},$$

(2) $$\frac{1}{\xi\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} + \zeta\right) = \mathrm{T}.$$

Les fonctions inconnues p, P, Q doivent vérifier les relations nécessaires et suffisantes $[\omega_2]$ et $[\omega_3]$, soit ici

$[\omega_2]$ $$(3)\qquad Qp = -T\xi\eta,$$

$[\omega_3]$ $$(4)\qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial \varphi} - p\eta.$$

On peut prendre $p(\varphi) \not\equiv 0$ arbitraire. Alors Q est bien déterminé par (3)

$$(5)\qquad Q = \frac{-T\xi\eta}{p}$$

soit

$$(6)\qquad Q = \frac{-1}{p}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} + \zeta\right) = \frac{-1}{p}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi\,\partial v} + \zeta\right).$$

Et P est donné par (4), et dépend d'une fonction arbitraire $H(\varphi)$,

$$(7)\qquad P = P_0(v, \varphi) + H(\varphi)$$

avec

$$(8)\qquad P_0 = \int_{v_0}^{v}\left(\frac{\partial Q}{\partial\varphi} + p\eta\right)dv.$$

La solution dépend bien de deux fonctions arbitraires (conformément au théorème général); ce sont deux fonctions arbitraires *de* φ (p et H),

La signification de $p(\varphi)$ donnée au n° 67, montre qu'on peut prendre arbitrairement le cône directeur, pourvu qu'on ne prenne pas un plan ($p \not\equiv 0$), et, ce cône étant choisi, les congruences réalisantes dépendent encore de la fonction arbitraire $H(\varphi)$, ce qui démontre le théorème du n° 67. On peut prendre par exemple un cône *de révolution* arbitraire.

69. *Cas où* φ *ne dépend que de u.* — C'est le cas précédent avec

$$(1)\qquad \zeta = 0.$$

Dans ce cas, P s'écrit sans signe d'intégration; car

$$Q = \frac{-1}{p}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} = \frac{1}{p}\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi\,\partial v} \qquad [\text{d'après (66.1)}]$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial\varphi} = \frac{-p'}{p^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi\,\partial v} + \frac{1}{p}\frac{\partial^3\xi}{\partial\varphi^2\,\partial v} \qquad \left(\text{avec } p' = \frac{dp}{d\varphi}\right).$$

D'où, finalement,

$$(2)\qquad P_0 = p\frac{\xi}{\cdot} - \frac{p'}{p^2}\frac{\partial\xi}{\partial\varphi} + \frac{1}{p}\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}.$$

Signification géométrique de l'hypothèse. — Les lignes de torsion de E′ sont les lignes $\varpi_1 = 0$; alors $\varpi_{12} = 0$, ce sont donc des droites. Réciproquement

d'ailleurs, si, la torsion n'ayant pas une direction fixe, les lignes de torsion sont des droites $[\varpi_1 \varpi_{12}] = 0$ et $[du\, d\varphi] = 0$: φ ne dépend que de u.

On trouve comme réalisations des congruences à cône directeur double, puisque

$$[\omega_1 \omega_{32}] = [\omega_2 \omega_{31}] = [\omega_{32} \omega_{31}] = 0 \qquad \text{(pas de racine finie dans l'équation 20.2)}.$$

70. *Cas où φ ne dépend que de v.* — Comme $[\varpi_{12} \varpi_2] = 0$, on a $\varpi_1' = 0$, et un changement de variable u permet de prendre $\varpi_1 = du$.

D'autre part

$$\omega_3' = [\omega_{31} \omega_1] + [\omega_{32} \omega_2] = 0,$$

ce qui donne

$$\omega_3 = dz, \tag{1}$$

z étant une fonction inconnue de u et de φ. Le tableau (T) s'écrit alors

$$(T_1) \qquad \begin{array}{ll} \omega_1 = \varpi_1 = du, & \omega_{31} = 0, \\ \omega_2 = \varpi_2 = \eta\, d\varphi, & \omega_{32} = p(\varphi)\, d\varphi, \\ \omega_{12} = \varpi_{12} = d\varphi, & \omega_3 = dz. \end{array}$$

L'équation $[\varpi_3]$ étant alors vérifiée, les deux fonctions inconnues $p(\varphi)$ et $z(u, \varphi)$ sont assujetties à vérifier la condition nécessaire et suffisante $[\varphi_2]$ qui s'écrit

$$\varpi_2' = [\varpi_1 \varpi_{12}] = [\omega_3 \omega_{32}] \tag{2}$$

soit

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} - 1 = p \frac{\partial z}{\partial u}. \tag{3}$$

D'où, en prenant arbitrairement $p(\varphi) \neq 0$, c'est-à-dire pour cône directeur un cône non plan arbitraire, il reste encore une fonction arbitraire $H(\varphi)$ et

$$z = \frac{\eta - u}{p(\varphi)} + H(\varphi). \tag{4}$$

Le théorème du n° 67 est donc démontré.

Signification géométrique de l'hypothèse. — $\omega_{12} \not\equiv 0$ et $[\varpi_2 \varpi_{12}] \equiv 0$ équivalent à dire que la torsion n'a pas une direction fixe et que *les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites*. On trouve pour les réalisations des congruences de normales ($\omega_3 = 0$) à une développable non plane (*cf.* n° 44) et l'on peut choisir arbitrairement le cône asymptotique de la développable (qui est supplémentaire du cône directeur).

71. $\varphi = 0$. *Espaces à torsion de direction fixe.* — Le cas $\varphi = 0$ a été identifié (n° 45) à celui des espaces dont la torsion a une direction fixe. On a alors

$\varpi'_1 = 0$, et l'on peut choisir u tel que $\varpi_1 = du$. On a vu d'autre part (n° 66) que $\omega_{32} = d\sigma$.

a. Donnons-nous arbitrairement une fonction $\sigma(u, v)$, dépendant effectivement de u. On pourra alors définir ω_3 par

$$\omega_3 = P\,d\sigma + Q\,dv,$$

P et Q étant des fonctions inconnues de σ et de v. Le tableau des composantes de E′ et de la congruence cherchée est alors

(T_2)

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = \varpi_1 = du, & \omega_{31} = 0, \\ \omega_2 = \varpi_2 = \eta(\sigma, v)\,dv, & \omega_{32} = d\sigma, \\ \omega_{12} = \varpi_{12} = 0, & \omega_3 = P\,d\sigma + Q\,dv. \end{array}$$

Les fonctions P et Q sont assujetties à vérifier les équations nécessaires et suffisantes $[\omega_2]$, $[\omega_3]$, soit ici

$[\omega_2]$ (1)
$$Q = \frac{-\partial\eta}{\partial\sigma}$$

$[\omega_3]$
$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial\sigma} - \eta$$

d'où

(2)
$$P = -\int\left(\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial\sigma}\right)dv + H(v).$$

Si l'on se donne pour σ une fonction arbitraire de deux variables dépendant effectivement de u, les solutions correspondantes dépendent encore de la fonction arbitraire $H(v)$.

b. Si l'on se donne pour σ une fonction arbitraire *de la variable v seulement*, on a

$$\omega'_3 \equiv [\omega_{31}\omega_1] + [\omega_{32}\omega_2] = 0, \qquad \omega_3 = dz.$$

En posant alors $\varpi_2 = \overline{\eta}(u, \sigma)\,d\sigma$, la fonction inconnue $z(u, \sigma)$, qui n'est plus assujettie qu'à $[\omega_2]$, doit vérifier

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial\overline{\eta}}{\partial u},$$

d'où

(3)
$$\boxed{z = \eta + H(\sigma).}$$

Pour ces solutions, soit W, on a deux fonctions arbitraires d'une variable, $\sigma(v)$ et $H(\sigma)$, c'est-à-dire deux fonctions arbitraires de v.

En définitive, on peut prendre pour σ une fonction arbitraire de u et de v ne se réduisant pourtant pas à une constante (car alors $\omega_{32} \equiv 0$ et l'espace serait

holonome). La solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments (conformément au théorème du n° 65).

Rappelons que les congruences réalisantes ont un *plan directeur* (n° 45).

72. *Forme particulière des réalisations des espaces à torsion de direction fixe.*

Théorème. — *Tout espace* E′ *à parallélisme absolu, dont la torsion a une direction fixe, est localement réalisable par des congruences de normales à une droite (c'est-à-dire engendrée par des éléments dont le support coupe, à angle droit, une droite fixe). Ces solutions dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.*

Les solutions envisagées dans ce théorème ne sont autres que celles que l'on obtient en faisant $H \equiv 0$ dans les solutions W du n° 71 *b*. Remarquons d'abord en passant que les solutions W sont des congruences de normales ($\omega'_3 = 0$) à des cylindres (à cause du plan directeur); soient $\widetilde{\omega}_i$ les composantes relatives du repère parallèle à K et d'origine $P = M - z\vec{e}_3$. On a, d'après (T_2) et (71.3),

$$\widetilde{\omega_1} = \omega_1 - z\omega_{31} = du,$$
$$\widetilde{\omega_2} = \omega_2 - z\omega_{32} = -H(\sigma)\,d\sigma,$$
$$\widetilde{\omega_3} = \widetilde{\omega_{31}} = \widetilde{\omega_{12}} = 0, \qquad \widetilde{\omega_{32}} = d\sigma.$$

Les courbes $d\sigma = 0$ du lieu de P sont des droites ($\widetilde{\omega}_1$ seul non nul), et ces droites, parallèles à $\vec{e}_1$, ont une direction fixe ($\widetilde{\omega}_{31} \equiv \widetilde{\omega}_{12} \equiv 0$), et décrivent un cylindre. Ce cylindre se réduit à une droite si $H \equiv 0$, et les supports de V coupent cette droite à angle droit. C. Q. F. D.

De telles solutions dépendent de la fonction arbitraire $\sigma(v)$ (*cf.* n° 71 *b*).

73. *Études de ces réalisations. Congruences de normales à une droite.* — On a, pour le tableau des composantes de E′ et de la congruence V envisagée,

$\omega_1 = \varpi_1 = du,$	$\omega_{12} = \varpi_{12} = 0,$	$\omega_{32} = d\sigma,$
$\omega_2 = \varpi_2 = r_1(u, \sigma)\,d\sigma,$	$\omega_{31} = 0$	$\omega_3 = dr_1.$

avec (1), $r_1(u, \sigma) = r_{10}(u, v)$, σ étant une fonction de v choisie arbitrairement, r_{10} une fonction donnée de u et de v.

En coordonnées semi-polaires d'axe Ou porté par la droite Δ sur laquelle s'appuie V, u est la cote de M, et σ son angle polaire. Son rayon vecteur ρ est égal à r_1, et l'équation de la surface des centres Σ est

$$\rho = r_1(u, \sigma). \tag{2}$$

Les pseudo-lignes de torsion sont les plans perpendiculaires à Δ; leurs trajectoires orthogonales sont les plans passant par Δ. Ces lignes sont aussi des pseudo-droites. Les dernières sont en même temps des géodésiques.

Cas particulier. — Si l'on peut choisir σ de façon que $r_1(u, \sigma)$ ne dépende que de u, on aura, pour Σ, une surface de révolution; cela donne lieu à la proposition suivante :

Théorème. — *Les espaces à parallélisme absolu* E_0 *à torsion de direction fixe et* de grandeur constante le long d'une ligne de torsion *sont réalisables (localement) par une congruence* V_0 *de normales à une droite fixe* Δ *et dont les centres décrivent une surface de révolution d'axe* Δ.

En effet, l'hypothèse faite sur E' revient à dire que T ne dépend que de u. Or

$$T = \frac{1}{r_{10}} \frac{\partial r_{10}}{\partial u}.$$

C'est donc que $\frac{\partial}{\partial u}(\log r_{10})$ ne dépend pas de v et que $\log r_{10}$ est de la forme $\log r_{11}(u) + \log A(v)$, d'où

$$r_{10} = r_{11}(u) A(v);$$

et il suffit de prendre

$$d\sigma = A(v)\, dv$$

pour avoir

$$r_1(u, \sigma) = r_{11}(u)$$

indépendant de σ. C. Q. F. D.

La solution de cette forme est bien déterminée (H et σ l'étant), du moins à un déplacement près.

La réciproque est d'ailleurs vraie et toute congruence du type V_0 réalise un espace E_0. On a en effet alors $r_1(u, o) = r_1(u)$ et T ne dépend que de u $\left(T = -\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)$ On peut le voir aussi en remarquant que la normale à Σ rencontre Δ et que le produit vectoriel $\vec{e_3} \wedge H$ (n° 27) est porté par $\vec{e_2}$ et égal à $\vec{T}$; or ce produit est constant le long d'un parallèle de Σ_0.

Autre réalisation des espaces E_0. — Si l'on prend

$$dv = \frac{d\sigma}{\cos(\sigma - \sigma_0)},$$

on a

$$\rho \cos(\sigma - \sigma_0) = r_1$$

et la surface des centres Σ_1 est un cylindre de génératrices perpendiculaires à Δ, admettant pour section droite une méridienne de Σ_0. Une telle réalisation V_1 est encore unique (à un déplacement près).

Rappelons d'autre part que la réalisation n'est valable que dans un domaine où $(\varpi_1 \varpi_2) \neq o$, et que les congruences réalisantes sont ordinaires : donc aucun centre ne peut être sur (Δ) et la méridienne de Σ_0 est un arc de courbe (γ) ne rencontrant pas (Δ). Les espaces réalisés globalement par V_0 et V_1 définies par

cet arc (γ) ne sont pas topologiquement les mêmes, et ne sont, par suite, pas globalement applicables.

74. *Étude d'un cas particulier d'espaces* E_0. — Nous allons considérer le cas où

$$(1) \qquad \gamma_1 = 1 - \frac{u}{A} \qquad (A = \text{const.}).$$

On a alors

$$(2) \qquad T = \frac{1}{u - A}.$$

La surface de révolution Σ_0 est un cône (c). Considérons Δ comme verticale. Le cône (c) passe par le cercle horizontal (c_0) de centre o et de rayon 1, et a un sommet au point de Δ d'abscisse $-A$.

La congruence V_0 limitée à $u > -A$ réalise globalement un espace E_0 dont les composantes relatives sont les composantes latérales de V_0 :

$$\varpi_1 = du, \qquad \varpi_2 = \left(1 + \frac{u}{A}\right) d\sigma, \qquad \varpi_{12} = 0 \qquad \text{avec} \quad u > -A.$$

La congruence V_1 a pour surface des centres un plan. Limitée aussi à $u > -A$, elle réalise un espace E_1 de mêmes composantes relatives que E_0, mais non globalement applicable sur E_0.

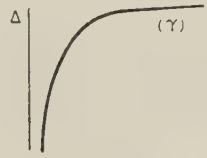
Quand $A \to \infty$, *on passe par continuité* à des espaces holonomes : V_0 tend vers un cylindre de révolution, V_1 vers un plan.

75. *Cas d'une torsion constante (et de direction fixe).* — Soit $\vec{T} = T\vec{e}_2$ avec T constant; on a alors

$$(1) \qquad \gamma_1 = e^{Tu}.$$

On obtient encore un espace holonome par continuité quand T tend vers zéro. La méridienne (γ) de la surface des centres Σ_0 (et en même temps la section droite de Σ_1) est la courbe $\zeta = e^{Tu}$. La congruence V_0 est ordinaire en

Fig. 10.



tout élément S quand u et σ varient de $-\infty$ à $+\infty$. De même V_1, avec u quelconque, mais σ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (bornes exclues). Elles réalisent

globalement des espaces E_0' et E_1' de mêmes composantes relatives, mais non globalement applicables. Le second est simplement connexe.

Quand $T \to 0$, E_0' et E_1' tendent respectivement vers un cylindre de révolution et vers un plan.

Pseudo-droites. — On sait qu'elles font un angle constant le long de chacune d'elles avec le plan directeur; soit donc x l'angle d'une pseudo-droite avec le plan horizontal; on a, dans V_0,

$$e^{Tu}\frac{d\sigma}{du} = \operatorname{tang} x. \tag{3}$$

dans V_1,

$$e^{Tu}\frac{d\sigma}{\cos\sigma\, du} = \operatorname{tang} x. \tag{4}$$

Soient dans V_0 deux éléments $S_1(u_1, \sigma_1)$ et $S_2(u_2, \sigma_2)$. Les droites passant par S_1, S_2 sont données par

$$\sigma_2 - \sigma_1 = -\frac{1}{T}e^{-T\frac{u_2+u_1}{2}}\operatorname{tang} x. \tag{5}$$

L'angle polaire σ n'étant défini qu'à $2k\pi$ près, il en est ainsi de $\sigma_2 - \sigma_1$, et il y a une infinité dénombrable de droites passant par S_1, S_2.

Au contraire, dans V_1, il faudrait remplacer (5) par (6),

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{d\sigma}{\cos\sigma} = -\frac{1}{T}e^{-T\frac{u_2+u_1}{2}}\operatorname{tang} x \tag{6}$$

et, σ variant seulement de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ (bornes exclues), σ_1 et σ_2 et par suite le premier membre sont bien déterminés par la donnée de deux éléments, et il y a une pseudo-droite et une seule par deux éléments donnés.

76. *Réalisation des espaces à parallélisme absolu par des congruences de droites.* — Nous allons reprendre les divers cas rencontrés à propos de la réalisation par des congruences d'éléments linéaires et voir s'il existe des solutions pour lesquelles le repère $R(u, v)$ est celui d'une congruence de droites. Comme on a toujours $\omega_{31} = 0$, la condition qu'il doit vérifier (*cf.* n° 65) s'écrit

$$|\omega_1\omega_2| = |\omega_1\omega_{32}|. \tag{1}$$

En conservant les notations précédentes (n°s 66 à 71) on a les divers cas suivants :

1° ζ *dépend de* u *et de* v (n° 68). — La relation (1) donne alors

$$\xi\eta = p\zeta. \tag{2}$$

Il faut donc que $\frac{\xi\gamma_i}{\varphi}$ soit fonction de φ seulement. Cela suffit, puisqu'on peut prendre p arbitraire pour une congruence d'éléments linéaires V réalisante, et qu'il suffira par suite de prendre

$$p = \frac{\xi\gamma_i}{\varphi} \tag{3}$$

pour que V soit une congruence de droites. Le cône directeur des congruences de *droites* Γ réalisantes est bien déterminé par (3). Reste pour Γ une fonction arbitraire de φ.

Remarquons que, si l'on pose

$$d\varphi = \varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2, \tag{4}$$

on a

$$\frac{\xi\gamma_i}{\varphi} = \varphi_2. \tag{5}$$

La condition nécessaire et suffisante de possibilité est que φ_2 ne dépende que de φ. Il reste alors une fonction arbitraire de l'argument φ.

2° φ *ne dépend que de* u. — Les congruences d'éléments linéaires réalisantes ont un cône directeur double. Une congruence de droites à cône directeur double réalise un plan euclidien. Donc le problème est impossible (si $T \neq 0$) pour les espaces E′ dont les lignes de torsion sont des droites.

3° φ *ne dépend que de* v. — Les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites. La condition (1) donne, avec les notations du n° 70,

$$\gamma_i = p(\varphi). \tag{6}$$

D'autre part, on a ici

$$\varphi_2 = \gamma_i.$$

et la conclusion est la même que dans le cas général. On a une fonction arbitraire $H(\varphi)$ et

$$\omega_2 = -d\left[\frac{u}{\varphi_2} + H\right]. \tag{7}$$

Cas particulier : espaces dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites, et dont la torsion a une grandeur constante. Comme

$$\frac{\partial\gamma_i}{\partial u} = 1 + T\gamma_i.$$

cette hypothèse entraîne

$$\gamma_i = \frac{g(\varphi)e^{\frac{u}{T}} - 1}{T},$$

g étant une fonction donnée arbitraire de φ. D'après (τ), il faut et il suffit, par suite, que $g \equiv 0$ et

$$r_1 = \frac{-1}{T} (= const).$$

En prenant $H \equiv 0$, les composantes de la congruence de *droites* réalisantes $(p = r_1)$ sont

$$\omega_1 = \varpi_1 = du, \qquad \omega_{31} = 0;$$
$$\omega_2 = \varpi_2 = \frac{-d\varphi}{T}, \qquad \omega_{32} = \frac{-d\varphi}{T};$$
$$\omega_{12} = d\varphi, \qquad \omega_3 = T\,du.$$

Le foyer $F\left(= M - \overrightarrow{e_3}\right)$ reste fixe quand $du = 0$. Quand $d\varphi = 0$, dF a une direction fixe par rapport au repère, qui a lui-même une direction fixe dans l'espace : F décrit une droite Δ, que les éléments D de la congruence coupent sous un angle constant α défini par

$$\cot\alpha = T.$$

On a la congruence des droites coupant sous un angle constant une droite fixe. De telles congruences ont été étudiées au n° 47.

4° $d\varphi \equiv 0$: *torsion de direction fixe*. — Avec les notations du n° 69, (1) devient

$$[du\,d\sigma] = r_1 [du\,dv], \tag{8}$$

d'où

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = r_1 \tag{9}$$

et

$$\sigma = \int r_1\,dv + K(u). \tag{10}$$

La réalisation du n° 71 *a* est donc une congruence de *droites* si l'on prend σ vérifiant (10); elle dépend alors de deux fonctions arbitraires d'un argument : la fonction $K(u)$ et la fonction $H(\varphi)$.

Conclusion générale relative aux congruences de droites (¹). — 1° *La réalisation est toujours possible quand la torsion a une direction fixe* (deux fonctions arbitraires d'un argument; Σ' en involution).

2° *Si la torsion n'a pas une direction fixe, il faut et il suffit que* φ_2 *soit une fonction de* φ *non identiquement nulle* (Σ' non en involution; une fonction arbitraire d'un argument; cône directeur bien déterminé).

Rappelons enfin que le problème n'est jamais possible quand les lignes de torsion sont des droites.

(¹) Les principaux résultats de ce n° 76 ont été publiés aux *Comptes rendus* [16 *a*].

CHAPITRE V.

LES CONNEXIONS PONCTUELLES EUCLIDIENNES A n DIMENSIONS (1).

77. On peut définir par projection orthogonale, comme pour $n=2$, la connexion intrinsèque d'une variété ponctuelle à n dimensions plongée dans l'espace euclidien à $N(>n)$ dimensions. On obtient ainsi un espace de Riemann (sans torsion) dont le ds^2 est le même que celui de la variété. D'après le théorème de Schlaëfli, on peut réaliser ainsi tous les espaces de Riemann, pourvu que $N \geq \frac{n(n+1)}{2}$ (condition suffisante).

Mais les connexions ainsi définies [8] sont toutes dépourvues de torsion. Dans le cas de $n=2$, les congruences d'éléments linéaires nous ont donné une connexion ponctuelle à torsion généralement non nulle. Pour n quelconque, *les variétés à n dimensions d'éléments q-plans plongées dans l'espace* E_{n+q} *à* $n+q$ *dimensions* sont susceptibles de jouer le même rôle. Nous allons définir, sur une telle variété, une connexion ponctuelle intrinsèque, et montrer que toutes les connexions euclidiennes sont susceptibles d'être ainsi réalisées. Ce sera, à la valeur près de q, une généralisation du théorème de Schlaëfli.

I. — Les variétés à n dimensions d'éléments q-plans de E

78. *Repères euclidiens.* — Tous les repères que nous considérerons seront des repères rectangulaires. Dans l'espace E_p (euclidien à p dimensions), un repère euclidien $R = M\vec{e}_s$ sera formé de p vecteurs $\vec{e}_s$ unitaires et rectangulaires entre eux, et d'origine commune M. Un tel repère est bien défini quand on connaît les $\nu = \frac{p(p+1)}{2}$ paramètres $z_1, \ldots, z_\nu$ du déplacement $T(z)$ qui amène en R un repère de base R_0 arbitrairement choisi. Les quantités z sont les paramètres ou coordonnées de R, qu'on désignera aussi par $R(z)$.

Soit un repère $R' = R(z+dz) = M'\vec{e}'_s$ infiniment voisin de R. Et soient (1)

$$(1) \qquad \begin{cases} M' - M = dM = \omega_s \vec{e}_s \\ \vec{e}'_s - \vec{e}_s = d\vec{e}_s = \omega_{sl}\vec{e}_l \end{cases} \qquad (s, l = 1, 2, \ldots, p;\ \omega_{sl} + \omega_{ls} = 0).$$

(1) Dans tout ce Chapitre, nous supprimerons le signe somme Σ devant une expression dans laquelle figure deux fois le même indice, c'est-à-dire que par convention, et sauf indication contraire, $a_i b_i$ représentera la somme de toutes les quantités $a_i b_i$ correspondant aux diverses valeurs de i.

Les ω sont un système de composantes relatives de $R(z)$. Ce sont des formes de Pfaff de z et dz. On peut choisir la représentation paramétrique du groupe des déplacements de façon qu'elles soient *analytiques* par rapport aux z. Un tel choix sera adopté une fois pour toutes; et les ω seront des formes bien déterminées $\omega(z, dz)$ (1).

79. *Éléments q-plans.* — Un élément q-plan est l'ensemble d'un point appelé son *centre* et d'un q-plan passant par ce point; ce q-plan est le *support* de l'élément. La notation (M, Q) représentera l'élément de centre M et de support Q. Inversement, étant donné un élément S, nous représenterons son centre par $M(S)$ et son support par $Q(S)$.

Nous appellerons *plan polaire* de S le *n-plan* $P(S)$ totalement perpendiculaire en $M(S)$ à $Q(S)$, le nombre de dimensions de l'espace étant $n+q$.

Nous dirons encore que la direction de Q est *celle de l'élément*, et que des éléments de supports parallèles sont *des éléments parallèles*.

Enfin, soit α un indice pouvant prendre q valeurs différentes. Si les vecteurs $\vec{e_\alpha}$ sont linéairement indépendants, ils définissent un q-plan Q que nous représenterons par $[e_\alpha]$, et la notation $(M, [e_\alpha])$ représentera l'élément (M, Q).

Les éléments S dépendent de $\mu = n + q + nq$ paramètres, soient $y_1, \ldots, y_\mu$.

On peut associer à tout élément S une famille de repères de E_{n+q}, soient $R(S)$, d'origine $M(S)$, et dont les q derniers vecteurs $\vec{e_\alpha}$ sont dans Q. Pour un élément S donné, les $R(S)$ ont pour composantes relatives

$$\omega_i = \omega_{\alpha\beta} = \omega_{i\alpha} = 0 \qquad (\omega_{ij} \text{ et } \omega_{\alpha\beta} \text{ arbitraires}).$$

Ils dépendent de $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2}$ paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$.

80. *Variétés à n dimensions d'éléments* S. — Une telle variété V est décrite par des éléments S dont les paramètres y dépendent de n variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, qu'on peut considérer comme les coordonnées de S dans V.

a. Si l'on attache à tout élément S de V un repère $R(S)$ bien déterminé, les paramètres z des $R(S)$ ainsi obtenus sont, quand S décrit V, des fonctions des u. Nous dirons que la variété est *analytique*, si, pour un choix convenable des repères $R(S)$, les z sont des fonctions *analytiques des u*. Les variétés analytiques sont en somme engendrées par les éléments $(M, [e_\alpha])$, quand les paramètres du repère $M\vec{e_i}\vec{e_\alpha}$ varient en fonction analytique de n variables indépendantes.

(1) *Cf.* É. Cartan [14].

Les repères $M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha$ constituent alors une famille analytique $\mathcal{F}$ de repères d'ordre o de V.

b. Variétés ordinaires. — Une variété V sera dite *ordinaire si* M(S) *décrit effectivement une variété ponctuelle* Σ *à n dimensions, à laquelle aucune droite de* Q(S) *n'est tangente en* M(S).

Pour qu'une variété analytique soit ordinaire, il faut et il suffit que *sur* V

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots, \omega_n] \neq 0. \tag{1}$$

Cette condition équivaut, en effet, au fait que $\omega_i \vec{e}_i$ n'est jamais nul, quel que soit le choix des *du*.

Nous ne considérerons désormais que des variétés V *ordinaires et analytiques.*

c. Variétés orthogonales. — Une variété V sera dite *orthogonale* si ses éléments S sont totalement perpendiculaires en M(S) au lieu Σ des centres. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est visiblement

$$\omega_\alpha = 0 \qquad (\alpha = n+1, \ldots, n+q). \tag{2}$$

81. *Repères d'ordre* o. — Étant donnée une famille analytique $\mathcal{F}$ d'ordre o, les autres familles analytiques s'en déduisent par des rotations Θ de paramètres analytiques en *u*. Ces Θ sont, pour un repère donné, soit les rotations Θ_α autour de P (c'est-à-dire laissant fixes tous les points de P), soit les rotations Θ_i autour de Q.

Les rotations Θ_i ont pour équations

$$\vec{e}'_i = a_{ij}\vec{e}_j, \qquad \vec{e}'_\alpha = \vec{e}_\alpha \qquad (j \leq n), \tag{1}$$

et les Θ_α

$$\vec{e}'_\alpha = b_{\alpha\beta}\vec{e}_\beta, \qquad \vec{e}'_i = \vec{e}_i \qquad (\beta > n). \tag{2}$$

Soient ω_s, ω_{st} les composantes relatives de la famille $\mathcal{F}$; $\widetilde{\omega}_s$, $\widetilde{\omega}_{st}$ celles d'une famille $\mathcal{F}_i$ s'en déduisant par une rotation Θ_i (a_{ij} = fonctions données des *u*). Alors : 1° $\widetilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha$, $\widetilde{\omega}_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}$; 2° $\widetilde{\omega}_i$ et $\widetilde{\omega}_{ij}$ s'expriment linéairement en ω_i, ω_{ij}, da_{ij}. Ces expressions linéaires *sont visiblement les mêmes que dans une rotation* Θ_i *d'équations* (1) *effectuée dans l'espace à n dimensions* sur une famille de repères de cet espace ayant pour composantes relatives ω_i, ω_{ij}.

De même pour les Θ_α. En particulier si $\widetilde{\omega}^*_s$, $\widetilde{\omega}^*_{st}$ sont les composantes d'une famille $\mathcal{F}_\alpha$ se déduisant de $\mathcal{F}$ par une rotation Θ_α ($b_{\alpha\beta}$ fonctions des *u*), on a

$$\widetilde{\omega}^*_i = \omega_i, \qquad \widetilde{\omega}^*_{ij} = \omega_{ij}.$$

82. *Connexion ponctuelle induite sur* V. — Comme au n° 13, nous allons définir une carte ponctuelle infinitésimale et une loi de raccordement.

a. La carte infinitésimale $\gamma(S)$ représentera tout élément S′ infiniment voisin de S par la projection orthogonale m' de son centre $M(S')$ dans le plan polaire $P(S)$ de S. Cette correspondance est biunivoque pour une variété *ordinaire*.

b. Le raccordement se fera par la projection orthogonale de $P(S')$ dans $P(S)$, projection qui, au second ordre près, est un déplacement.

Choisissons dans tout plan $P(S)$ un repère euclidien $\rho(S)$ d'origine $M(S)$: le raccordement de $P(S')$ dans $P(S)$ amènera $\rho(S')$ en $\rho_S(S')$ confondu, au second ordre près, avec la projection de $\rho(S')$ dans $P(S)$.

Le plan polaire est intrinsèquement lié à S: les opérations géométriques définies en *a* et *b* le sont aussi, et définissent la carte intrinsèque de V.

En assimilant les éléments S′ infiniment voisins de S à la projection de leur centre dans le plan polaire de S, on fait ainsi de V un espace ponctuel à connexion euclidienne, soit E_n. Cet espace admet pour carte la carte intrinsèque de V.

83. *Composantes de la connexion induite.* — Considérons de nouveau la famille $\mathcal{F}$. Soit $M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha$ le repère de $\mathcal{F}$ attaché à l'élément S; prenons pour $\rho(S)$ le repère $M\vec{e}_i$, et soit $m'\vec{\varepsilon}_i$ le repère $\rho_S(S')$. Les composantes relatives de la connexion de V sont les quantités ϖ_i, ϖ_{ij} définies par

$$(1)\qquad \begin{cases} m' = M + \varpi_i \vec{e}_i \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \varpi_{ij}\vec{e}_j \end{cases} \qquad (i, j \leqq n).$$

Les équations (76. 1) définissent $\rho(S')$ en fonction des composantes $\omega(u, du)$ de $\mathcal{F}$:

$$(2)\qquad \begin{cases} M' = M + \omega_i \vec{e}_i + \omega_\alpha \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_i' = \vec{e}_i + \omega_{ij}\vec{e}_j + \omega_{i\alpha}\vec{e}_\alpha \end{cases} \qquad (i, j \leqq n;\ \alpha > n).$$

La projection de $\rho(S')$ dans $P(S)$ s'en déduit aisément, et, comme elle doit coïncider au 2e ordre près avec $m'\vec{\varepsilon}_i$:

$$(3)\qquad \begin{cases} m' = M + \omega_i \vec{e}_i, \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \omega_{ij}\vec{e}_j, \end{cases}$$

d'où, par comparaison de (1) et (3), les composantes de la connexion de V

$$(4)\qquad \boxed{\varpi_i = \omega_i \quad \varpi_{ij} = \omega_{ij}.}$$

Nous désignerons encore les composantes ω_i, ω_{ij} de $\mathcal{F}$ du nom de *composantes latérales*. D'après la remarque du n° 81 relative à l'effet des rotations Θ

sur les composantes latérales, on vérifie qu'on obtient bien la même connexion quelle que soit la famille d'ordre o choisie. D'où l'énoncé :

THÉORÈME. — *Les composantes de la connexion de* V *sont les composantes latérales d'ordre* o *de* V.

Remarquons que la condition (79.1), qui exprime que la variété V est ordinaire, entraîne celle que doivent vérifier les ϖ pour définir une connexion ponctuelle à n dimensions, à savoir

$$[\varpi_1 \varpi_2 \dots \varpi_n] \not\equiv 0. \tag{5}$$

84. *Courbure et torsion.* — Rappelons que les équations de structure de l'espace euclidien E_p à p dimensions sont

$$[E_p] \qquad \begin{cases} \Omega_s \equiv \omega'_s - [\omega_t\ \omega_{ts}] = 0 \\ \Omega_{st} \equiv \omega'_{st} - [\omega_{tr}\omega_{sr}] = 0 \end{cases} \qquad (s, t, r = 1, 2, \dots, p).$$

Les tenseurs de torsion et de courbure de l'espace E′ réalisé par V sont définis par

$$[E'_n] \qquad \begin{cases} \overline{\Omega_i} = \varpi'_i - [\varpi_h\ \varpi_{hi}] = T_{ihk}[\varpi_h \varpi_k] \\ \overline{\Omega_{ij}} = \varpi'_{ij} - [\varpi_{jh}\varpi_{ik}] - R_{ijhk}[\varpi_h \varpi_k] \end{cases} \qquad (h, k, i, j = 1, 2, \dots, n)$$

et vérifient par suite, en tenant compte des équations E_{n+q}, et de (83.4),

$$(1) \qquad \begin{cases} [\omega_\alpha\ \omega_{\alpha i}] = T_{ihk}\,[\omega_h \omega_k] \\ [\omega_{\alpha j}\omega_{\alpha i}] = R_{ijhk}[\omega_h \omega_k] \end{cases} \qquad (i, j, h, k \leqq n;\ \alpha > n).$$

85. La connexion intrinsèque d'une variété ponctuelle Σ est un cas particulier de la précédente : c'est celui où V est la variété *orthogonale* (n° 80*c*) admettant Σ comme lieu des centres (1). Les repères d'ordre o de V sont alors les repères du 1er ordre de Σ.

La condition $\omega_\alpha = 0$ (80.2) entraîne l'absence de torsion (84.1) et aussi le fait que E′ et Σ ont même ds^2. On vérifie bien que la connexion de V est celle de l'espace de Riemann réalisé par Σ. Le théorème de Schlaëfli (2) affirme que tout espace de Riemann est susceptible d'être ainsi réalisé.

86. Il peut se faire que plusieurs variétés V aient la même connexion ponctuelle intrinsèque. Soient V et V* deux telles variétés : à tout élément S de V correspond un élément S* de V*, et les cartes $\gamma(S)$ et $\gamma^*(S^*)$ des deux variétés sont superposables; soit Δ^* un déplacement amenant $\gamma^*(S^*)$ sur $\gamma(S)$: le point représentatif de S′* infiniment voisin de S* vient alors en

(1) Les opérations géométriques qui nous ont servi à définir la connexion V coïncident alors avec celles qui définissent la connexion intrinsèque de Σ (*Cf.* É. CARTAN [8]).

(2) *Cf.* [2] et [11].

$m_1'^* = m'$, point représentatif de son homologue S'. Si l'on fait subir Δ^* à V^*, elle vient dans une position V_1^*, Q'^* vient en $Q_1'^*$ qui passe au 2e ordre près par $m_1'^* = m'$, indépendant de la variété choisie.

Conclusion. — Il existe pour toute V^* réalisant le même espace que V, et pour tout S^* homologue de l'élément S de V un déplacement $\Delta(S^*, V^*)$ tel qu'après ce déplacement, le support de tout élément S'^* voisin de S^* vienne passer par le même point au second ordre près.

II. — Réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes à n dimensions.

87. Nous allons maintenant traiter la réciproque et démontrer la proposition suivante :

Théorème. — *Tout espace ponctuel à connexion euclidienne à n dimensions est localement réalisable, au voisinage de chacun de ses points, par une variété d'éléments $(n^2 - n)$-plans plongée dans l'espace euclidien à n^2 dimensions.*

C'est une généralisation du théorème de Schlaëfli, au nombre près de dimensions de l'espace où se fait la réalisation. Nous ne nous préoccuperons du nombre minimum de dimensions de cet espace que dans le cas d'une connexion *générique*, où le théorème de Schlaëfli *se généralise exactement* (n° 101). D'autre part nous nous bornerons exclusivement au problème local.

La définition de la connexion induite nous donnera immédiatement un système différentiel auquel doivent satisfaire les variétés V réalisantes dans l'espace à $n + q$ dimensions. Nous montrerons que pour $q = n^2 - n$ ce système est en involution, et pour cela, nous lui appliquerons la méthode employée par M. É. Cartan dans sa démonstration au théorème de Schlaëfli. Nous montrerons ensuite qu'il suffit en général de prendre $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

88. Se donner une connexion (E_n') c'est se donner, en fonction de n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, les composantes relatives ϖ_i, ϖ_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ de la connexion, c'est-à-dire des formes de Pfaff $\varpi(u, du)$ que l'on peut d'ailleurs choisir de façon tout à fait arbitraire pourvu que

$$[\varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_n] \not\equiv 0. \tag{1}$$

Nous les supposerons *analytiques*, c'est-à-dire que leurs coefficients seront des fonctions analytiques des u.

Elles peuvent être considérées comme les composantes relatives d'une famille de repères cartésiens $\overline{R}$ attachés à (E_n'). On peut sans changer E_n' les remplacer par les composantes ϖ_i^*, ϖ_{ij}^* des repères $\overline{R^*}$ qui se déduisent des $\overline{R}$ par des rotations $\Theta(u)$ arbitraires autour de l'origine [14].

89. Réaliser localement (E'_n) par une variété V, c'est associer à tout point (u) d'un certain voisinage E'_n de l'espace (E'_n) donné, un élément q-plan $S(u)$ tel qu'une famille de repères d'ordre zéro, soit $R(u)$, de la variété engendrée par les $S(u)$, ait pour composantes latérales

(I) $$\omega_i = \varpi_i, \qquad \omega_{ij} = \varpi_{ij} \qquad (cf.\ 83.4).$$

La condition (88.1) entraîne alors

$$[\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n] \neq 0 \qquad (cf.\ 80.1),$$

et la variété V est ordinaire.

Réaliser E'_n par V, c'est en somme associer à tout point (u) de E'_n un repère R de E_{n+q}; or, R est défini dans E_{n+q} par les paramètres z du déplacement qui amène en R un repère de base R_0 arbitrairement choisi ($cf.$ n° 76). Le problème se ramène donc à déterminer les z en fonction des u. Or les composantes ω de R ont des expressions bien déterminées en z ($cf.$ n° 76) et en les portant dans (I) on obtient un système différentiel

$$\sigma(z, u) \equiv \sigma[\omega(z, dz); \varpi(u, du)]$$

aux fonctions inconnues z des n variables indépendantes u. Toute solution de ce système fournit une réalisation locale de (E'_n).

90. Les ϖ qui figurent dans σ correspondent à un choix $\overline{R}$ des repères de E'_n. A tout autre choix $\overline{R^*}$ de ces repères correspondent des composantes ϖ^* et un système

(1) $$\sigma^* \equiv \sigma[\omega, \varpi^*]$$

géométriquement équivalent à $\sigma(\omega, \varpi)$ en ce sens que toute variété V vérifiant l'un vérifie l'autre.

De façon plus précise, soit Θ_i la rotation (fonction des u) qui fait passer de $\overline{R}$ à $\overline{R^*}$; soit $M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha = R(z)$ un repère quelconque de E_{n+q}. Nous réserverons désormais les lettres grecques aux indices supérieurs à n et les minuscules latines $i, j, \dots$, aux autres indices. Faisons subir aux vecteurs $\vec{e}_i$ dans leur n-plan la rotation Θ_i. On obtient un repère $R(z^*)$ et soit

(2) $$z^* = \Theta_i(z)$$

la transformation qui fait passer des z aux z^*.

Les relations entre les $\omega_i(z^*)$, $\omega_{ij}(z^*)$ et les $\omega_i(z)$, $\omega_{ij}(z)$ sont, d'après le n° 81, les mêmes qu'entre ϖ_i, ϖ_{ij} et ϖ^*_i, ϖ^*_{ij}. Le système transformé de σ par Θ_i est par suite

(3) $$\sigma^*(z^*) \equiv \sigma[\omega(z^*), \varpi^*].$$

Si les z vérifient $\sigma(z)$, les z^* vérifient $\sigma^*(z^*)$, donc sont solutions de $\sigma^*(z)$ et les familles $R(u)$ et $R^*(u)$ sont attachées à la même variété V. Nous retrouvons

ainsi l'équivalence géométrique de σ et σ^*, mais ce qui importe pour la suite c'est la forme du transformé de σ par Θ_i.

91. Soit $\Sigma(\omega; \varpi)$, le système obtenu en adjoignant aux équations de σ celles qui s'en déduisent par dérivation extérieure. Σ est un système fermé à N fonctions inconnues z des n variables indépendantes u (1).

Les notions d'égalités superflues, d'élément générique et d'élément intégral à p dimensions de Σ ont été rappelées au n° 55. On a pour Σ la condition suivante d'involution.

Condition A, *nécessaire et suffisante pour que* Σ *soit en involution. — Pour* $p \leq n-1$, *il passe, par l'élément intégral générique* I_p *à* p *dimensions de* Σ, *un élément intégral à* $p+1$ *dimensions.*

Comme dans le cas de $n=2$, nous allons en déduire une condition plus maniable : cela reviendra en somme à donner une forme réduite simple à l'élément I_p générique (2).

92. Considérons les u et les z comme les coordonnées d'un point d'un espace auxiliaire à $n+N$ dimensions. Un élément intégral à p dimensions sera défini par p éléments linéaires indépendants (de même centre et en involution deux à deux). Un élément linéaire sera défini par les coordonnées (u, z) de son centre et les paramètres directeurs du, dz de sa direction. *On prendra comme paramètres directeurs*, au lieu de du, dz, les quantités $\varpi_i (i \leq n)$ et ω qui sont les premières indépendantes en du, les dernières indépendantes en dz et indépendantes des du.

93. *Effet des rotations* Θ_i *sur les éléments intégraux de* Σ. — D'après le n° 90, le transformé par Θ_i de $\sigma(\omega, \varpi)$ est $\sigma(\omega, \varpi^*)$, *c'est-à-dire le système* σ *correspondant au choix des repères* $\overline{R^*}$ *déduits de* $\overline{R}$ *par la rotation* Θ_i. Cette propriété reste vraie pour les systèmes fermés correspondants Σ, Σ^*.

a. Tout élément intégral I_p *de* Σ *est transformé par* Θ_i *en un élément intégral* I_p^* *de* Σ. En effet soit $\overline{\Sigma}$ le système Σ dans lequel on ne distinguerait plus les u comme variables indépendantes. I_p^* est visiblement intégral pour $\overline{\Sigma^*}$. D'autre part, Θ_i ne modifie pas les u : I_p introduisant exactement $n-p$ relations entre les du, il en est de même de I_p^*. C. Q. F. D.

b. Il en est de même du passage par Θ_i^{-1} de Σ^* a Σ. Par suite, *étant donné un élément* I_p, *si pour* Σ^* *il passe par* I_p^* *un* I_{p+1}^*, *il en résulte que, pour* Σ, *il passe par* I_p *un* I_{p+1}, *et réciproquement.*

---

(1) $N = \frac{(n+q)(n+q+1)}{2}$.

(2) *Cf.* É. Cartan [11].

c. Étant donné un élément I_p, on peut donc, pour voir s'il passe par lui un I_{p+1}, opérer sur l'élément I_p^* qui correspond à I_p dans un Σ^* quelconque, c'est-à-dire dans un autre choix des repères de E'_n.

Considérons les n premières coordonnées $u_i (i \leq n)$ du centre de I_p et les n premiers paramètres directeurs ϖ_i d'un quelconque de ses éléments linéaires ε. Soit $\overline{M}$ le point de E'_n de coordonnées u_i et $\overline{M}\vec{e_i}$ le repère $\overline{R}$ correspondant. Quand ε varie dans I_p, les ϖ_i sont liés exactement par $n-p$ relations, et les points $\overline{M}_i + \varpi_i \vec{e_i}$ décrivent un p-plan (e_p) de l'espace du repère $\overline{R}$. Soit $\overline{R^*}$ un repère dont les p premiers vecteurs soient dans (e_p). Il se déduit de $\overline{R}$ par une certaine rotation Θ_i et l'on a

$$\varpi^*_{p+1} = \varpi^*_{p+2} = \ldots = \varpi^*_n = 0.$$

Au lieu d'opérer sur I_p nous opérerons sur I_p^* correspondant à I_p dans le choix des repères $\overline{R^*}$.

d. Nous désignerons par ε_i un élément linéaire intégral dont les n premiers paramètres directeurs vérifient

$$(\varepsilon_i) \qquad \varpi_i \neq 0, \qquad \varpi_j = 0 \qquad (j \leq n, j \neq i)$$

et nous dirons qu'un élément intégral à p dimensions est *un élément* I_p^0 s'il est formé de p éléments ε_i *avec* $i \leq p$ (deux à deux en involution). Un tel élément I_p^0 est intégral pour $\overline{\Sigma}$, et, comme il introduit exactement $n-p$ relations entre les du (à savoir $\varpi_{p+1} = \varpi_{p+2} = \ldots = \varpi_n = 0$), il est intégral pour Σ.

D'après (c), *étant donné un élément* I_p, *il existe un système* Σ^* *dans lequel l'élément* I_p^* *transformé de* I_p *est de la forme* I_p^0 [1].

94. Nous pouvons maintenant établir les conditions suivantes d'involution, dont il nous suffira d'utiliser le caractère suffisant :

Conditions B (*suffisantes pour que* Σ *soit en involution*). — *a*. Par le point intégral générique passe un élément linéaire intégral. *b*. *Pour le repère générique de* E'_n *et l'élément* I_p^0 *générique, où* $p \leq n-1$, *il existe un élément* ε_{p-1} *en involution avec* I_p^0.

1° La condition (B, *a*) n'est autre que la condition A relative au point intégral.

2° Si les conditions (B, *b*) sont vérifiées, les conditions A relatives aux éléments I_p à $p \geq 1$ dimensions sont vérifiées.

Soit en effet un élément I_p intégral de Σ. Il lui correspond, dans un certain système Σ^* relatif à des repères $\overline{R^*}$, un élément I_p^* de la forme I_p^0 (93 *d*).

---

(1) Il existe même une infinité de Σ^*, du moins pour $p \leq n-2$. En effet la rotation Θ_i de (c) n'est pas complètement déterminée : Θ_p étant une rotation conservant (e_p), on peut remplacer Θ_i par $\Theta_p \Theta_i$.

Si B est vérifiée, ou bien il passe par I_p^* un élément I_{p+1}^*, donc par I_p un I_{p+1}, ou bien on a l'une ou l'autre des circonstances suivantes :

α. $\overline{R}^*$ n'est pas générique, c'est-à-dire vérifie une condition d'égalité.

β. $\overline{R}^*$ ne vérifie aucune égalité, mais I_p^* est un I_p^0 vérifiant une condition particulière d'égalité.

La circonstance (α) entraîne que I_p est un élément intégral de Σ pour lequel les ϖ_i sont liés par une certaine relation d'égalité qui n'est pas nécessaire pour que I_p soit intégral : I_p n'est pas générique.

La circonstance (β) entraîne que I_p^* vérifie une égalité superflue, et l'existence d'une telle égalité est conservée par Θ_i^{-1} : I_p n'est pas générique.

En définitive, si B est vérifiée, ou bien il passe par I_p un I_{p+1}, ou bien I_p n'est pas générique, et ceci pour $p \leq n-1$: A est vérifiée. C. Q. F. D.

95. *Définition analytique des* ε_i. — Les paramètres directeurs d'un élément linéaire étant définis à un facteur près, nous prendrons comme paramètres directeurs d'un élément ε_i les quantités suivantes :

$$(\varepsilon_i) \qquad \varpi_i = \omega_i = 1, \qquad \varpi_j = \omega_j = 0 \quad (j \neq i,\ j \leq n); \qquad \omega_s = a_{si} \quad (s = \alpha,\ \alpha i,\ \alpha\beta).$$

Nous considèrerons (*cf.* É. Cartan [11]) les $a_{\alpha h}$, $a_{\alpha ih}$ comme les composantes de vecteurs $\overrightarrow{a_h}$, $\overrightarrow{a_{ih}}$ par rapport à q vecteurs unitaires rectangulaires $\overrightarrow{u_\alpha}$ d'un espace euclidien auxiliaire à q dimensions :

$$(1) \qquad \overrightarrow{a_h} = a_{\alpha h}\overrightarrow{u_\alpha}; \qquad \overrightarrow{a_{ih}} = a_{\alpha ih}\overrightarrow{u_\alpha}.$$

96. *Expression analytique de la condition* B. — 1° Remarquons d'abord que la condition (B, a) est vérifiée. En effet, tout point (u, z) est intégral; le point de coordonnées u reste par hypothèse dans un domaine E_n' où $[\varpi_1, \ldots, \varpi_n] \neq 0$. D'après la forme de σ, on peut donc prendre arbitrairement les ϖ, c'est-à-dire les du, pour un élément linéaire intégral passant par (u, z) : d'où l'existence d'éléments introduisant $n-1$ relations entre les du. C. Q. F. D.

2° *Condition* (B, b). — Les équations de fermeture de Σ sont (*cf.* n° 84)

$$(I) \qquad \begin{cases} (1) & [\omega_\alpha\, \omega_{\alpha i}] = T_{ihk}[\omega_h \omega_k], \\ (2) & [\omega_{\alpha j}\omega_{\alpha i}] = R_{ijhk}[\omega_h \omega_k]. \end{cases}$$

On cherche un ε_{p+1} en involution avec p éléments $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ donnés. C'est-à-dire qu'on se donne les $\overrightarrow{a_h}$, $\overrightarrow{a_{ih}}$, $a_{\alpha\beta h}$ pour $h \leq p$ et qu'on cherche les vecteurs $\overrightarrow{a_{p+1}}$, $\overrightarrow{a_{ip+1}}$, et les $a_{\alpha\beta p+1}$ qui définissent ε_{p+1}.

Les équations du premier degré σ laissent ces quantités arbitraires pour ε_{p+1}. Seules, les équations (1) et (2) leur imposent des conditions. Elles équivalent

aux relations suivantes, où interviennent des produits scalaires de vecteurs :

$$(U_p)\qquad \begin{cases} (3)\quad \vec{a}_h\,\overrightarrow{a_{ip+1}} - \overrightarrow{a_{p+1}}\,\vec{a}_{ih} = T_{ihp+1} \quad [i,\ h] \\ (4)\quad \vec{a}_{jh}\,\overrightarrow{a_{ip+1}} - \overrightarrow{a_{jp+1}}\,\vec{a}_{ih} = R_{ijhp+1} \quad [ij,\ h] \end{cases} \qquad (h \leqq p;\ i, j \leqq n).$$

Remarquons que les $a_{\alpha 3\overline{p+1}}$ restent *arbitraires*. On a un système (U_p) aux vecteurs inconnus $\overrightarrow{a_{p+1}}$, $\overrightarrow{a_{ip+1}}$ $(i \leqq n)$, les autres vecteurs étant donnés.

97. *Étude du système* U_p. — Propriété I. — *Le système* U_p *est compatible si les* np *vecteurs* $\vec{a}_{ih}$ *sont linéairement indépendants* (condition suffisante). En effet :

1° Choisissons arbitrairement $\overrightarrow{a_{1\overline{p+1}}}$. Les équations $[12, h]$ de $(U_p, 4)$ définissent alors les projections de $\overrightarrow{a_{2\overline{p+1}}}$ sur les p vecteurs $\vec{a}_{1h}$. Ces vecteurs sont indépendants par hypothèse. Donc les $[12, h]$ sont compatibles : prenons pour $\overrightarrow{a_{2\overline{p+1}}}$ un vecteur quelconque vérifiant les $[12, h]$.

2° Les vecteurs $\overrightarrow{a_{1\overline{p+1}}}$, $\overrightarrow{a_{2\overline{p+1}}}$ étant ainsi choisis, les équations $[13, h]$ et $[23, h]$ définissent les projections de $\overrightarrow{a_{3\overline{p+1}}}$ sur les $\vec{a}_{1h}$, $\vec{a}_{2h}$, et sont compatibles puisque ces $2p$ derniers vecteurs sont indépendants. D'où $\overrightarrow{a_{3\overline{p+1}}}$ avec un certain degré d'arbitraire.

3° On continuera ainsi de proche en proche. Les $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$ étant supposés choisis pour $i \leqq m$, les équations $[i, \overline{m+1}, \overline{p+1}]$ pour $i \leqq m$ définissent les projections de $\overrightarrow{a_{\overline{m+1}\,\overline{p+1}}}$ sur les $\vec{a}_{ih}$ et sont compatibles par suite de l'indépendance des $\vec{a}_{ih}$. D'où $\overrightarrow{a_{\overline{m+1}\,\overline{p+1}}}$.

4° En opérant ainsi pour toutes les valeurs de $m \leqq n-1$, on épuise les équations $[ij, h]$. En effet, toutes les $[ij, h]$ pour lesquelles $i < j$ sont alors vérifiées, et d'autre part les équations $[ji, h]$ et $[ij, h]$ sont identiques et les $[ii, h]$ s'évanouissent.

5° Restent les équations $(U_p, 3)$. Elles donnent alors les projections du vecteur $\overrightarrow{a_{p+1}}$ sur les np vecteurs $\vec{a}_{ih}$ et sont compatibles (indépendance des $\vec{a}_{ih}$). D'où $\overrightarrow{a_{p+1}}$ (avec un certain degré d'arbitraire si $q > np$). Toutes les équations de U_p sont alors vérifiées. C. Q. F. D.

Propriété II. — *Si les* $\vec{a}_{ih}$ *sont indépendants et si le nombre* q *des dimensions de l'espace des* u_α *vérifie*

$$(2)\qquad q \geqq n(p+1),$$

on peut prendre les vecteurs $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$ *indépendants entre eux et indépendants des* $\vec{a}_{ih}$.

Le vecteur $\overrightarrow{a_{1\overline{p+1}}}$ est arbitraire : on peut le prendre extérieur au np-plan des $\vec{a}_{ih}$ puisque $np < q$. Supposons la propriété vraie pour $i \leqq m$, et les vecteurs $\vec{a}_{ih}, \overrightarrow{a_{1p+1}}, \ldots, \overrightarrow{a_{m\overline{p+1}}}$ indépendants; ils forment un hyperplan (e) à $np+m$ dimensions. Le vecteur $\overrightarrow{a_{\overline{m+1}\,\overline{p+1}}}$ est assujetti seulement à avoir une projection donnée sur certains vecteurs de (e), et peut donc être pris extérieur à (e) tant que (e) ne remplit pas tout l'espace des u_α; ce qui a lieu pour $m \leqq n-1$, car alors $np+m < q$, et la propriété s'étend jusqu'à $m+1=n$.

C. Q. F. D.

98. *Application à la condition* B. — Elle est vérifiée si tous les systèmes U_p sont compatibles pour $p \leqq n-1$. Pour pouvoir appliquer la condition suffisante (97. I), il faut que les $n(n-1)$ vecteurs de I^0_{n-1} puissent être indépendants, c'est-à-dire que

$$q \geqq n(n-1).$$

1° Lemme. — *Si* $q=n(n-1)$ *l'élément* I^0_p *générique* a, *pour* $p \leqq n-1$, *ses vecteurs* $\vec{a}_{ih}$ *linéairement indépendants.*

a. La propriété est vraie pour l'élément I^0_1 générique, puisqu'en un point (u, z) les $\vec{a}_{i1}$ $(h=1)$ sont arbitraires.

b. Supposons-la vraie pour l'élément I^0_p générique, et considérons l'élément I^0_{p+1} générique. L'élément I^0_p qu'il contient est lui-même générique (sinon il entrainerait une égalité superflue pour I^0_{p+1}), et, d'après notre hypothèse de récurrence, il a ses vecteurs $\vec{a}_{ih}$ $(h \leqq p)$ indépendants. Par suite, d'après (97.II), qui est vraie tant que p vérifie (97.2), les vecteurs $\vec{a}_{ih}$, $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$ des I^0_{p+1} passant par lui peuvent être pris indépendants; toute relation entre ces vecteurs constituerait pour I^0_{p+1} une égalité superflue; donc, pour l'I^0_{p+1} générique, la propriété est encore vraie.

c. La récurrence précédente démontre le lemme pour l'élément I^0_{p+1} tant que p vérifie (97.2), c'est-à-dire pour $p \leqq n-2$, soit $p+1 \leqq n-1$.

C. Q. F. D.

2° *Conclusion*. — Il résulte du lemme et de (97.I) que la condition B est vérifiée. *Le système* Σ *est en involution, à la condition suffisante que* $q=n(n-1)$, d'où le théorème de réalisation que nous avions en vue (n° 87).

Remarquons qu'aucune restriction à l'existence d'I_{p+1} passant par un I_p donné n'est introduite par le choix des u du centre de I_p (1). On peut donc affirmer l'existence d'une réalisation au voisinage de tout point du domaine E'_n considéré.

(1) Il n'en était pas ainsi pour $n=2$, $q=1$ (Chap. IV).

Remarquons aussi qu'aucune restriction n'est introduite par le choix des repères de E'_n.

99. *Degré d'arbitraire de la solution générale.* — D'après la théorie des systèmes en involution [17], l'intégrale générale de Σ dépend d'autant de fonctions arbitraires des u, qu'il y a de paramètres arbitraires pour les éléments intégraux à n dimensions passant par l'élément intégral générique à $n-1$ dimensions.

Ce nombre est celui des I_n passant par l'élément I^0_{n-1} générique. Or tout I_n passant par I^0_{n-1} est de la forme I^0_n (¹). Le nombre des I^0_n passant par I^0_{n-1} se déduit aisément des opérations du n° 97 :

a. Le vecteur $\overrightarrow{a_{1n}}$ est arbitraire : cela donne q paramètres arbitraires.

Le vecteur $\overrightarrow{a_{pn}}$ $(2 \leqq p \leqq n)$ est donné par ses projections sur les vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}$ où $i \leqq p-1$, $h \leqq n-1$, qui sont au nombre de $(n-1)(p-1)$, d'où, pour $\overrightarrow{a_{pn}}$,

$$q-(p-1)(n-1)=(n-1)(n-p+1) \quad \text{paramètres arbitraires.}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{a_{in}}$ dépendent donc de ν paramètres arbitraires, avec

$$\nu=\sum_{p=1}^{p=n}(n-1)(n-p+1)=(n-1)\sum_{p'=1}^{p'=n}p'=\frac{n(n^2-1)}{2}.$$

b. Le vecteur $\overrightarrow{a_n}$ est donné par ses projections sur les $n(n-1)$ vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}$, où $i \leqq n$, $h \leqq n-1$. Il est bien déterminé.

c. Les $a_{\alpha\beta n}$ sont tous arbitraires, et sont au nombre de $\nu_1=\frac{q(q-1)}{2}$.

Conclusions. — 1° Les fonctions z constituant l'intégrale générale dépendent de $\nu+\nu_1$ fonctions arbitraires des u.

2° Mais les variétés V correspondant à des solutions distinctes en z ne sont pas toutes distinctes : à une même variété V correspondent une infinité de solutions en z provenant des rotations Θ_α du repère $R(z)$ (*cf.* n° 81). Ces rotations dépendent de

$$\nu_1=\frac{q(q-1)}{2} \text{ paramètres,}$$

et les solutions en z attachées à une même variété V dépendent de ν_1 fonctions arbitraires des u. Il en résulte la proposition suivante :

(¹) Il n'en est pas de même, pour $p \leqq n-2$, des I_{p+1} passant par I^0_p.

Les variétés réalisantes dépendent de

$$\nu = \frac{n(n^2-1)}{2},$$

fonctions arbitraires des u.

100. *Classe des espaces à connexion euclidienne.* — On peut étendre aux espaces à torsion la définition de la classe des espaces de Riemann (*cf.* [3] et [9]); ce sera *le plus petit entier r* tel que l'espace donné E'_n soit réalisable par une variété d'éléments *r*-plans plongée dans l'espace euclidien à $n+r$ dimensions (1).

D'après ce qui précède, la classe ne saurait dépasser $n(n-1)$. D'autre part, si l'on désigne par X et Y_q le nombre de fonctions arbitraires des u dont dépendent respectivement un espace E'_n et une variété à n dimensions d'éléments q-plans (2), on trouve que

$$Y_q \geqq X \qquad \text{entraîne} \qquad q \geqq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ainsi, *dans le cas général*, la classe est au moins égale à $\frac{n(n-1)}{2}$, mais pourrait

---

(1) Indiquons rapidement ici une généralisation aux espaces à torsion des conditions de Ricci [3] pour qu'un espace de Riemann soit de classe 1. Des conditions nécessaires s'obtiennent en étudiant les variétés V'_{n-1} à $n-1$ dimensions d'éléments linéaires de l'espace à n dimensions. Ainsi, pour une $\bar{V}'_{n-1}$ à courbure et torsion non nulles, dans le cas général où il n'existe pas de λ_i tels que

$$\lambda_i R_{ijhk} = 0, \tag{1}$$

on peut mettre les composantes relatives sous la forme

$$\omega_{ni} = \gamma_{ih}\omega_h, \qquad \omega_n = a_h \omega_{nh},$$

et on trouve les conditions suivantes qui généralisent celles de Ricci (*cf.* [9]).

1° La courbure et la torsion sont de la forme

$$R_{ijhk} = \gamma_{jh}\gamma_{ik} - \gamma_{jk}\gamma_{ih}, \tag{2}$$

$$T_{ihk} = a_j R_{ijhk}. \tag{3}$$

2° Les dérivées absolues des γ et des a vérifient

$$\gamma_{ih,k} - \gamma_{ik,h} = T_{jhk}\gamma_{ij}, \tag{4}$$

$$a_{k,h} - a_{h,k} = \gamma_{hk} - \gamma_{kh}. \tag{5}$$

Ces conditions sont suffisantes parce que les composantes relatives (de la V'_{n-1}) obtenues à partir de γ et de a vérifient alors les équations de structure de l'espace euclidien. La réalisation est unique si les γ et les a sont définis de façon unique par (2) et (3).

Les espaces à parallélisme absolu donnent lieu à une étude analogue [où n'interviennent d'ailleurs plus que des équations linéaires, et non quadratiques comme (2)]. D'autre part au point de vue géométrique, la connexion induite sur une V'_{n-1} donne lieu à certaines remarques simples. En particulier, les V'_{n-1} à parallélisme absolu *ont un cône directeur* et, pour tout cycle élémentaire d'origine S, *le vecteur de torsion est parallèle au plan tangent au cône directeur* le long de la génératrice parallèle à S; *sa direction ne dépend pas du cycle choisi.*

(2) On peut remarquer au passage que $Y_{n(n-1)} - X = \nu$.

peut-être ne pas dépasser cette valeur; le théorème suivant va montrer qu'elle ne la dépasse effectivement pas. Il s'applique *aux espaces génériques*, c'est-à-dire aux espaces où la courbure et la torsion ne vérifient aucune condition particulière d'égalité (rappelons qu'il en est ainsi en général pour les connexions euclidiennes à courbure *et torsion*, les identités de Bianchi faisant intervenir les dérivées covariantes).

101. Théorème. — *Tout espace ponctuel générique à connexion euclidienne à n dimensions est localement réalisable par une variété d'éléments* $\frac{n(n-1)}{2}$ *plans plongée dans l'espace euclidien à* $\frac{n(n+1)}{2}$ *dimensions.*

Il s'agit en somme de montrer que si $q = \frac{n(n-1)}{2}$ le système U_p générique du n° 96 est compatible pour $p \leqq n-1$. Nous écrirons ici ce système en faisant intervenir les composantes des vecteurs $\vec{a}$. Nous allons d'abord établir un lemme relatif à des formes linéaires étroitement liées aux premiers membres de U_{n-1}.

102. Lemme I. — *Le déterminant des* $\frac{n(n^2-1)}{2}$ *formes linéaires* $\left[\text{aux } \frac{n(n^2-1)}{2} \text{ variables } x_\alpha, x_{\alpha i}\right]$

$$\begin{cases} X_{hi} = a_{\alpha h}\, x_{\alpha i} - a_{\alpha i h} x_\alpha, \\ X_{hij} = a_{\alpha i h} x_{\alpha j} - a_{\alpha j h} x_{\alpha i}, \end{cases} \qquad \text{où } h \leqq n-1;\ i, j \leqq n;\ n < \alpha \leqq \frac{n(n+1)}{2},$$

n'est pas identiquement nul par rapport aux a.

Considérons $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs rectangulaires $\vec{u}_\alpha$ de l'espace euclidien à $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensions, et posons

$$a_{\alpha h}\vec{u}_\alpha = \vec{a}^h, \qquad a_{\alpha i h}\vec{u}_\alpha = \vec{a}^h_i, \qquad x_{\alpha i}\vec{u}_\alpha = \vec{x}_i, \qquad x_\alpha \vec{u}_\alpha = \vec{x}.$$

Les formes X font intervenir des produits scalaires des $\vec{x}$ et des $\vec{a}$; le lemme revient à affirmer qu'il existe des vecteurs $\vec{a}$ tels que le système

$$(A) \qquad \begin{cases} (A_{ih}) & \vec{a}^h \vec{x}_i = \vec{a}^h_i \vec{x} \\ (A_{ijh}) & \vec{a}^h_i \vec{x}_j = \vec{a}^h_j \vec{x}_i \\ (A_{nh}) & \vec{a}^h \vec{x}_n = \vec{a}^h_n \vec{x} \\ (A_{nih}) & \vec{a}^h_i \vec{x}_n = \vec{a}^h_n \vec{x}_i \end{cases} \qquad (i, j, h \leqq n-1)$$

ait pour unique solution $\vec{x} = \vec{x_i} = \vec{x_n} = 0$. Nous allons d'abord définir certaines conditions destinées à être imposées aux $\vec{a}$, conditions dont l'utilité se révèlera par la suite. Puis, nous montrerons qu'il existe des vecteurs $\vec{a}$ vérifiant ces conditions, et qu'enfin ces conditions, jointes au système (A), entraînent $\vec{x} = \vec{x_i} = \vec{x_n} = 0$. Le lemme sera bien alors démontré.

Pour cette démonstration, nous abandonnerons la convention relative à la suppression du signe $\sum$ *de sommation* (la somme des termes $a_i b_i$ ne sera plus représentée par $a_i b_i$ mais par $\sum a_i b_i$). D'autre part, nous ne ferons varier les indices i, j, h que jusqu'à $n-1$ (inclus), l'indice n jouant dans la suite un rôle particulier. Ces dispositions ne sont adoptées que pour le présent n° 102.

a. Conditions (a) à imposer aux $\vec{a}$. — 1° Les $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs a_i^h où $h \leqq i \leqq n-1$ sont indépendants. On les désignera aussi par $\vec{A_\alpha}$.

2° Les $\vec{a_i^j}$ vérifieront

$$\vec{a_i^j} = \lambda(i, j)\vec{a_j^i}, \tag{1}$$

avec

$$\lambda(i, j)\lambda(j, i) = 1, \tag{2}$$

les λ vérifiant d'autre part les inégalités

$$\lambda(i, j)\lambda(j, h)\lambda(h, i) \neq 1 \qquad \text{pour } i \neq j \neq h \neq i. \tag{1'}$$

3° Les $\vec{a^h}$ et $\vec{a_n^h}$ seront liés par

$$a_n^h = \lambda(h)a^h \tag{3}$$

avec

$$\lambda(h) \neq \lambda(k) \neq 0 \qquad \text{pour } h \neq k. \tag{3'}$$

4° Enfin, on aura

$$\vec{a^h} = \sum_i \beta_i^h \vec{a_i^i} \tag{4}$$

et, si l'on désigne par $\|\beta_i^h\|$ le déterminant des β_i^h, et que l'on pose

$$\gamma_i^h = \beta_i^h[\lambda(h) - \lambda(i)], \tag{5}$$

les β_i^h devront vérifier les inégalités

$$(4') \qquad \| \beta_i^h \| \neq 0,$$

$$(5') \qquad \| \gamma_i^h \| \neq 0.$$

b. Possibilité d'un tel choix des $\vec{a}$. — On peut d'abord choisir pour les $\vec{a}_i^h$ où $h \leqq i \leqq n-1$, $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs indépendants arbitraires, soient $\vec{A}_\alpha$. Les autres vecteurs $\vec{a}$ sont alors définis par le choix des λ et des β.

On prendra successivement, pour $i = 1, 2, \ldots, n-2$ et $j > i$, des nombres $\lambda(i, j) \neq 0$ arbitraires, d'où, par (2), les $\lambda(j, i)$, tout $\lambda(i, j)$ devant toutefois différer des produits $\lambda(i, h)\lambda(h, j)$ résultant des λ précédemment définis ($h < i$). De la sorte, les $\lambda(i, j)$ vérifient (1'); et les relations (1) donnent alors les vecteurs $\vec{a}_h^i$, où $h < i$.

On peut ensuite choisir arbitrairement les $\lambda(h) \neq 0$ vérifiant (3'); le déterminant $\| \beta_i^h \|$ n'est pas identiquement nul, par rapport aux β_i^h, non plus que $\| \gamma_i^h \|$ si du moins $n \geqq 3$. Car $\| \gamma_i^h \|$ a sa diagonale principale formée de zéros, mais tous ses autres éléments peuvent prendre des valeurs arbitraires (1). Donc $\| \beta_i^h \| \| \gamma_i^h \| \not\equiv 0$, et l'on peut choisir les β_i^h de façon que ce produit ne soit pas nul, donc que (4') et (5') soient vérifiés.

Un tel choix des β donne les vecteurs $\vec{a}^h$, et les $\lambda(h)$ donnent alors les a_n^h. Toutes les conditions (a) sont bien vérifiées par les vecteurs $\vec{a}$ ainsi définis.

c. Le système (A) *et les conditions* (a) *entraînent* $\vec{x} = \vec{x}_i = \vec{x}_n = 0$. — En effet :

1° Les $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations (A_{ijh}), où $i \neq j \neq h \neq i$, entraînent la relation

$$(6) \qquad \vec{a}_j^h \vec{x}_i = 0.$$

Car, d'après ces équations et les relations (1), on a

$$\vec{a}_j^h \vec{x}_i = \vec{a}_i^h \vec{x}_j = \lambda(i, h) \vec{a}_h^i \vec{x}_j = \lambda(i, h) \vec{a}_j^i \vec{x}_h = \lambda(i, h)\lambda(j, i) \vec{a}_i^j \vec{x}_h = \lambda(i, h)\lambda(j, i) \vec{a}_h^j \vec{x}_i$$

et finalement

$$\vec{a}_j^h \vec{x}_i = \lambda(i, h)\lambda(j, i)\lambda(h, j) \vec{a}_j^h \vec{x}_i,$$

ce qui, en tenant compte de (1'), donne bien (6).

---

(1) $\gamma_i^h = (\gamma_i^h)_0$ donne, d'après (5), $\beta_i^h = \frac{(\gamma_i^h)_0}{\lambda(h) - \gamma(i)}$, les λ étant les valeurs qui viennent d'être choisies. Pour $n \geqq 3$, il existe des termes γ_i^h, où $h \neq i$. Pour $n = 2$, le déterminant se réduit à $\gamma_1^1 = 0$.

2° En opérant d'une manière analogue sur les équations (A_{ih}) et (A_{nih}), on trouve (¹), d'après (1), (3) et (3′) *et pour* $i \neq h$,

$$\vec{a}_i^h \vec{x}_n = 0, \tag{7}$$

$$\vec{a}_i^h \vec{x} = 0, \tag{8}$$

$$\vec{a}^h \vec{x}_i = 0. \tag{9}$$

3° Les équations (A_{nh}), (A_{nii}) et (A_{ii}) entraînent, d'après (3), (4) et (5′),

$$\vec{a}^i \vec{x}_i = 0, \tag{10}$$

$$\vec{a}_i^i \vec{x}_n = 0, \tag{11}$$

$$\vec{a}_i^i \vec{x} = 0. \tag{12}$$

En effet

$$\vec{a}_n^i \vec{x} = \lambda(i) \vec{a}^i \vec{x} = \sum_j \lambda(i) \beta_j^i \vec{a}_j^j \vec{x} = \sum_j \lambda(i) \beta_j^i \vec{a}^j \vec{x}_j,$$

$$\vec{a}^i \vec{x}_n = \sum \beta_j^i \vec{a}_j^j \vec{x}_n = \sum \beta_j^i \vec{a}_n^i \vec{x}_j = \sum \lambda(j) \beta_j^i \vec{a}^j \vec{x}_j$$

et les (A_{ni}) deviennent alors

$$\sum_j \beta_j^i [\lambda(j) - \lambda(i)] \vec{a}^j \vec{x}_j \equiv \sum \gamma_j^i \vec{a}^j \vec{x}_j = 0.$$

D'où, d'après $\| \gamma_j^i \| \neq 0$, les relations (10), qui, par une seconde application des (A_{nii}) et (A_{ii}), donnent (11) et (12).

4° Les relations (9) et (10) entraînent, d'après (4),

$$\sum_i \beta^h \vec{a}_j^j \vec{x}_i = 0,$$

c'est-à-dire, pour chaque vecteur $\vec{x}_i$, $(n-1)$ équations homogènes aux $(n-1)$

(¹) $$\vec{a}_i^h \vec{x}_n = \vec{a}_n^h \vec{x}_i = \lambda(h) \vec{a}^h \vec{x}_i = \lambda(h) \vec{a}_i^h \vec{x} = \lambda(h) \lambda(i, h) \vec{a}_h^i \vec{x}$$
$$= \lambda(h) \lambda(i, h) \vec{a}^i \vec{x}_h = \frac{\lambda(h)}{\lambda(i)} \lambda(i, h) \vec{a}_n^i \vec{x}_h = \frac{\lambda(h)}{\lambda(i)} \lambda(i, h) \vec{a}_h^i \vec{x}_n,$$

d'où finalement

$$\vec{a}_i^h \vec{x}_n = \frac{\lambda(h)}{\lambda(i)} \vec{a}_i^h \vec{x}_n,$$

et, d'après (3′),

$$\vec{a}_i^h \vec{x}_n = 0.$$

D'où

$$\vec{a}_i^h \vec{x} = \vec{a}^h \vec{x}_i = 0.$$

produits scalaires $\vec{a}_j^i \vec{x}_i$; comme d'après (4'), $\| \beta_j^h \| \neq 0$, on en déduit

$$\vec{a}_j^i \vec{x}_i = 0. \tag{13}$$

5° Les équations (A_{iji}) donnent alors

$$\vec{a}_j^i \vec{x}_i = 0, \tag{14}$$

d'où, d'après (2),

$$\vec{a}_i^i \vec{x}_i = 0. \tag{15}$$

Conclusion. — Les vecteurs $\vec{x}_i$ ont d'après (6), (13), (14), (15) leurs projections nulles sur tous les $\vec{A}_\alpha$ (*cf.* *a*, 1°); de même pour x_n, d'après (7), (11) et pour $\vec{x}$ d'après (8), (12). Donc

$$\vec{x} = \vec{x}_i = \vec{x}_n = 0.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — La méthode tombe en défaut pour $n = 2$, parce que $\| \gamma_i^h \| \equiv 0$ dans ce cas. On devait d'ailleurs s'y attendre (n° 54). Pour $n = 3$, la démonstration est valable, mais les permutations d'indices de (*c*, 1°) n'ont plus lieu.

103. Il résulte du lemme I que les $P = p\frac{n(n+1)}{2}$ formes X (soit $X_{(p)}$) correspondant à $h \leq p$ sont indépendantes pour des a génériques, d'où :

Lemme II. — *Il existe* (*au moins*) *un déterminant d'ordre* P *de ces* P *formes* $X_{(p)}$ *qui n'est pas identiquement nul par rapport aux a.*

104. *Application aux systèmes* U_p. — Si $q = \frac{n(n-1)}{2}$, le système U_p peut s'écrire

$$U_p \begin{cases} X_{hl} = T_{ih\overline{p+1}} \\ X_{hij} = R_{jih\overline{p+1}} \end{cases} \qquad (h \leq p;\ i, j \leq n);$$

en posant, dans les $X_{(p)}$ du n° 103,

$$x_\alpha = a_{\alpha\overline{p+1}}, \qquad x_{\alpha i} = a_{\alpha i\overline{p+1}}.$$

Nous désignerons désormais par le symbole général $a_{(p)}$ les $a_{\alpha h}$, $a_{\alpha ih}$ pour lesquels $h \leq p$, et par $\Pi_{(p)}$ les composantes de la courbure et de la torsion qui figurent dans les U_k, où $k \leq p$.

Parmi les déterminants de U_p, choisissons-en un qui ne soit pas identiquement nul par rapport aux $a_{(p)}$ et désignons-le par Δ_p. (L'existence en est assurée par le lemme II.) Si U_p est attaché à un élément intégral I_p^0, les $a_{(p)}$ vérifient les systèmes $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$ (nécessaires et suffisants). Nous désignerons par $\Delta_p(I_p^0)$ la valeur que prend alors Δ_p.

Nous allons démontrer que, *si l'espace* E'_n *est générique, le déterminant* $\Delta_p(I^0_p)$ *n'est pas nul pour l'élément* I^0_p *générique et le repère générique de* E'_n, *et ceci quel que soit* $p \leqq n-1$.

a. La proposition est vraie pour $p = 1$. En effet, pour l'I^0_1 générique, les $a_{(1)}$ sont arbitraires et $\Delta_1 \not\equiv 0$ entraine $\Delta_1(I^0_1) \not\equiv 0$.

b. Nous allons montrer que, *si la propriété est vraie jusqu'à l'indice* $p-1$ *inclus, elle l'est encore pour l'indice* p. Tout d'abord U_{p-1} est alors compatible et il existe des éléments intégraux I^0_p.

1° L'élément I^0_p générique contient des éléments I^0_1, I^0_2, ..., I^0_{p-1}, qui sont eux-mêmes génériques. D'après l'hypothèse de récurrence, les déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{p-1}$ correspondants ne sont pas nuls : on les prendra pour déterminants principaux des systèmes $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$. De la sorte on peut définir l'élément I^0_2 générique par les paramètres $a_{(1)}$ de son I^0_1, qui sont tous arbitraires, et par un certain nombre de paramètres $a_{x2}, a_{x'2}$, à indices bien déterminés, qui sont les inconnues non principales de U_1, et comme telles laissées arbitraires par U_1 ; de même pour I^0_3, etc.

Finalement, l'élément I^0_p *générique* sera défini par un certain nombre de ses $a_{(p)}$, à indices *bien déterminés*, que nous représenterons par $\tilde{a}_p$, et qui peuvent prendre des valeurs absolument arbitraires. Les autres $a_{(p)}$ sont des fonctions rationnelles *bien déterminées* de ces $\tilde{a}_p$ et des $\Pi_{(p-1)}$.

2° Il en résulte que le déterminant $\Delta_p(I^0_p)$ est, pour l'élément I^0_p générique, *une fonction rationnelle bien déterminée* des variables indépendantes $\tilde{a}_p$ et $\Pi_{(p-1)}$

$$\Delta_p(I^0_p) \equiv g[\tilde{a}_p, \Pi_{p-1}].$$

S'il est nul pour l'I^0_p générique, c'est que $g \equiv 0$ par rapport aux $\tilde{a}_p$ pour les valeurs que prennent les Π dans l'espace donné (quel que soit d'ailleurs le point de cet espace ou le repère choisi). Si cela ne se produit pas quels que soient les Π voisins de ces valeurs, *c'est-à-dire si* $g \not\equiv 0$ (*par rapport aux* $\tilde{a}$ *et aux* Π), les Π vérifient une égalité superflue, et l'espace E'_n n'est pas générique (1).

3° *Or* g *n'est pas identiquement nulle*. En effet, on peut choisir les $\tilde{a}$ et les Π de façon *que les* $a_{(p)}$ *prennent des valeurs arbitraires* données à l'avance. Il suffit pour cela de se donner des $a_{(p)}$ arbitraires et d'en déduire les $\tilde{a}$ (qui sont certains $a_{(p)}$ bien déterminés) et les Π qui s'en déduisent par $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$).

(1) Le fait que $g \not\equiv 0$ suffit à montrer qu'il existe certains domaines pour les variables Π où la proposition est vraie; la démonstration se réduit alors au 3°. Mais cela ne suffit pas pour affirmer que les espaces pour lesquels la proposition n'est pas démontrée vérifient *des conditions d'égalité*, car la fonction g n'est déterminée que dans l'hypothèse de récurrence.

On peut donc choisir les $\tilde{a}$ et les Π de façon que $\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_\mu \neq 0$, puisque ces déterminants ne sont pas identiquements nuls par rapport aux a. On a alors $g \neq 0$. Donc $g \not\equiv 0$. C. Q. F. D.

c. La récurrence s'étend jusqu'à $p = n - 1$ (c'est-à-dire tant que $\Delta_\mu \not\equiv 0$), et la proposition est démontrée.

105. *Conclusion.* — L'inégalité $\Delta_\mu \not\equiv 0$ entraîne la compatibilité de U_μ; la proposition précédente a donc pour conséquence immédiate le fait que la condition B est vérifiée pour un espace E_n générique, d'où l'involution de Σ et le théorème d'existence du n° 100.

Degré d'arbitraire de la solution générale. — D'après la théorie des systèmes en involution et l'étude que nous venons de faire des systèmes U_μ (systèmes polaires), la solution générale *géométrique* dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions arbitraires de $n-1$ arguments (1). C'est le degré d'arbitraire d'une correspondance ponctuelle entre une variété ponctuelle à $n-1$ dimensions donnée, et une variété ponctuelle à $n-1$ dimensions arbitraire plongée dans l'espace à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions.

BIBLIOGRAPHIE.

Pour éviter des répétitions (en particulier au sujet de [8], [11], [14], [15], [17]), nous avons rassemblé ici les titres des différents Ouvrages ou Mémoires cités au cours du texte, *où ils sont représentés par leur numéro d'ordre entre crochets.* L'Ouvrage [17], dont M. Élie Cartan m'avait obligeamment communiqué le manuscrit, est encore sous presse. Il traite de la théorie des systèmes en involution, théorie dont les bases sont posées dans [4].

1. Gauss, *Disquitiones generales circa superficies curvas*, 1827 (trad. fr. : *Nouv. Ann. de Math.*, 1852).
2. Schlaefli, *Nota alla memoria del Sig. Beltrami* (*Annali di Matem.*, 2e série, t. 5, 1871-1873, p. 178-193).
3. Ricci, *Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (*Annali di Matem.*, 2e série, t. **12**, 1884, p. 135-168).
4. É. Cartan, *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 18, 1901, p. 241-311).
5. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1913).
6. É. Cartan, Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris :*
   a. Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion (t. 174, 1922, p. 593);
   b. Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité (*ibid.*, p. 738).
7. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff* (Paris, Hermann, 1922).

(1) C'est ([17] et n° 99) le nombre des paramètres ω_α, $\omega_{\alpha i}$ laissés arbitraires, pour l'élément intégral I_{n-1}, par le système U_{n-2} générique; il n'y a pas de fonction arbitraire de n arguments parce que U_{n-1} a une solution unique (lemme I).

8. É. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace* (*Bull. Sc. math.*, t. 48, 1924, p. 294-320).

9. É. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann* (*Mém. Sc. Math.*, IX, 1925).

10. M. JANET, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien* (*Ann. Soc. Pol. Math.*, t. 5, 1926, p. 38-73).

11. É. CARTAN, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien* (*Ann. Soc. Pol. Math.*, t. 6, 1927, p. 1-7).

12. É. CARTAN, *La géométrie des groupes de transformations* (*J. Math. pures et appl.*, t. 6, 1927, p. 1-119).

13. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (Leipzig, Teubner, 1934).

13. É. CARTAN, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (*Exposés de Géométrie*, Paris, Hermann, 1935).

15. É. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile* (*Cahiers scientifiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1937).

16. O. GALVANI, Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris :*

a. Sur la réalisation de certains espaces à parallélisme absolu par des congruences de droites (t. 214, 1942, p. 337);

b. Sur les connexions euclidiennes à courbure non nulle réalisable par des congruences de droites (*ibid.*, p. 733);

c. Sur la réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes à deux dimensions les plus générales (t. 216, 1943, p. 23);

d. Sur la réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes et affines à n dimensions (*ibid.*, p. 519);

e. Sur la connexion ponctuelle des congruences d'éléments linéaires (t. 218, 1944, p. 264).

17. É. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, Hermann, paraîtra prochainement).

18. O. GALVANI, *La réalisation des espaces ponctuels à connexion affine et la géométrie des groupes de Lie* (*J. Math. pures et appl.*, paraîtra prochainement).

SUR

LA RÉDUCTION A L'ORDRE MINIMUM

DES

SYSTÈMES DE COURBES ALGÉBRIQUES PLANES

DE GENRE QUELCONQUE

PAR M. POL BURNIAT.

Introduction.

Le problème de la réduction crémonienne à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes algébriques planes est résolu pour les courbes de genre $p = 0, 1, 2, 3$. Il n'est évidemment pas résoluble dans toute sa généralité pour une valeur quelconque de p (1).

La suite des adjoints purs d'indices $1, 2, \ldots$ d'un système linéaire de courbes planes c fournissant une suite de caractère birationnellement invariantif attachée à ce système et en constituant ce que, à certain point de vue, on serait tenté d'appeler l'ascendance, on peut songer à réduire à l'ordre minimum les systèmes $|c|$ de genre quelconque dont la suite des adjoints satisfait à une loi déterminée.

C'est dans cet esprit que nous avons entrepris et résolu le problème de la réduction des systèmes $|c|$ dont le genre forme avec les genres de ses adjoints successifs une progression arithmétique décroissante. Nous apportons ainsi une modeste contribution à une question importante de géométrie algébrique plane.

Les résultats essentiels acquis au cours de ce travail sont énoncés aux n^os^ 11, 15, 19 et 23.

(1) Pour la bibliographie, voir par exemple : FABIO CONFORTO, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939, pp. 300-304 et 328-335.

I. — Les systèmes d'argument t.

1. Disons qu'un système complet irréductible $|c_i|$ de courbes planes c_i de genre p_i est d'argument $t>0$ au sens large si p_i forme avec les genres $p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots$ de ses adjoints purs infinis $|c_{i-1}|$, $|c_{i-2}|$, ... d'indices $1, 2, \ldots$ une progression arithmétique décroissante de raison t. Nous déterminons l'indice i de telle sorte que c_1 soit son dernier adjoint infini. Nous convenons cependant que si l'adjoint c_{s-1} de c_s est composé avec les courbes d'un faisceau $|\theta|$, c_{s-1}, s'il existe, est l'adjoint pur de $|\theta|$.

La notion de système d'argument t ne présente évidemment un certain intérêt que si $i\geq 3$, ce que nous supposerons toujours dans ce qui suit. De la définition qui vient d'être proposée, il résulte que l'on a $p_1\leq 1$.

2. Supposons qu'il existe dans la suite des adjoints $|c_{i-1}|$, $|c_{i-2}|$, ... un premier système $|c_s|$, $s>1$, composé avec les courbes θ de genre p d'un faisceau $|\theta|$ et que $c_1\equiv n\theta$, $n\geq 1$. Alors $|c_s|$ est de genre (virtuel) $p_s=n(p-1)+1$ et de dimension $r_s=n=p_{s-1}-1$, car $|c_{s+1}|$, par hypothèse, est irréductible. On doit donc avoir $p_{s+1}=n+1$. D'autre part, $p_{s-1}=p_s+t=n(p-1)+1+t$. Il s'ensuit que

$$n(p-1)+1+t=n+1,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $p=1$, $t=n$ ou $p=0$, $t=2n$. De toute façon, $|\theta|$ n'a pas d'adjoint infini, et contrairement à ce que l'on a supposé, $s=1$. De là :

Seul l'adjoint d'indice $i-1$ de $|c_i|$ peut être un faisceau ou composé avec les courbes d'un faisceau. Celui-ci est de genre 0 ou 1 et t vaut n ou $2n$.

Observons encore que $p_1=1$ ou $p_1=-n+1$, suivant que $p=1$ ou $p=0$.

3. Tout faisceau de courbes elliptiques irréductibles est birationnellement réductible à un faisceau $|\theta|$

$$\theta\equiv C_{3k}(\Lambda_1^k \ldots \Lambda_8^k), \qquad k\geq 1$$

de Halphen.

Or Wiman (1) a démontré qu'un faisceau de Halphen proprement dit ($k>1$) ne peut apparaître dans l'adjoint d'un système de courbes de dimension 2 au moins, que seul un système birationnellement équivalent à un système de sextiques doté de 8 points-base doubles peut avoir pour adjoint un système ∞^1 de courbes elliptiques (nécessairement transformable en un faisceau de cubiques doté de 8 points-base simples assignés).

---

(1) *Zur theorie des endlichen Gruppen von birationalen Transformationen* (*Math. Ann.*, 48, 1896).

Il résulte de là que *si le dernier adjoint* $|c_1|$ *d'un système d'argument t est réductible, il est nécessairement composé avec les courbes rationnelles d'un faisceau.*

4. Chaque adjoint infini $|c_s|$ du système $|c_i|$ d'argument t étant l'adjoint d'un système irréductible de genre p_{s+1}, possède la dimension :

$$r_s = p_{s-1} - 1 = p_s - 1 + t, \qquad s = i-1, i-2, \ldots, 2, 1, \tag{1}$$

et $r_{i-1}, r_{i-2}, \ldots, r_2, r_1$ forment une progression arithmétique de raison t.

Si nous exigeons de la dimension r_i de $|c_i|$ qu'elle satisfasse à la condition analogue

$$r_i = p_i - 1 + t,$$

nous dirons que le système $|c_i|$ correspondant est d'argument t au sens étroit, ou plus simplement d'argument t.

La restriction résultant de l'introduction de cette condition supplémentaire n'est pas d'importance majeure. En effet, si $|c_i|$ est d'argument t au sens large, $|c_{i-1}|$ est certainement d'argument t, car sa dimension r_{i-1} satisfait à (1). Par suite, tout système d'argument t au sens large peut être obtenu comme système dont l'adjoint d'indice 1 est d'argument t (au sens étroit).

Nous verrons que tout système d'argument t au sens large est totalement ou partiellement contenu dans un système d'argument t.

Nous considérerons d'abord les systèmes d'argument t au sens étroit.

5. Le système $|c_i|$ étant d'argument t, considérons le système $|c_s|$, $s = 2, 3, \ldots, i$. Il est de dimension r_s et découpe sur une courbe c_{s-1} générique une série linéaire non spéciale, car elle est d'ordre (1)

$$c_s . c_{s-1} = 2p_s - 2 > 2p_{s-1} - 2$$

et, qui, complète, possède la dimension

$$2p_s - 2 - p_{s-1} = p_s - 2 + t = r_s - 1.$$

Il s'ensuit que $|c_{s-1}|$ est partiellement contenu dans $|c_s|$ et que le système $|x_s|$, défini par l'équivalente

$$c_s \equiv c_{s-1} + x_s, \tag{1}$$

est effectif, D'autre part, comme une courbe x_s passe par chaque point-base de $|c_i|$, on peut écrire

$$c'_s \equiv c_{s-1} + x'_s, \tag{2}$$

et x'_s, partie fixe de l'adjoint impur $|c'_s|$ de $|c_{s-1}|$, est une courbe isolée ou la courbe o. Le système $|x_s|$ dont l'adjoint se réduit à une courbe isolée ou à la courbe o, est de genre virtuel 1 et l'on a $x_s . x'_s = 0$.

(1) Nous représentons par le symbole $a.b$ le nombre d'intersections libres de deux courbes a et b.

Partant de (1), l'on peut écrire

$$p_s = p_{s-1} + 1 + c_{s-1}.x_s - 1 \qquad \text{ou} \qquad x_s.c_{s-1} = t. \tag{3}$$

Si $t > 1$, $|c_s|$, qui est de dimension $r_s = p_s - 1 + t > p_s$, est régulier et sa série caractéristique est d'ordre

$$c_s.c_s = r_s + p_s - 1 = 2p_s - 2 + t. \tag{4}$$

Dès lors, de la relation

$$c_s.c_s = (c_{s-1} + x_r).(c_{s-1} + x_s) = c_{s-1}.c_{s-1} + 2c_{s-1}.x_s + x_s.x_s,$$

on tire, en vertu de (3) et de (4) (où l'on substitue $s-1$ à s),

$$x_s.x_s = 0 \tag{5}$$

et, ensuite,

$$(c_{s-1} + x_s).x_s = c_{s-1}.x_s = c_s.x_s = t.$$

Observons que (5) implique que $|x_s|$ qui est elliptique, est une courbe isolée ou un faisceau. Plus que cela, la dernière alternative, en admettant qu'elle puisse se présenter, ne peut le faire qu'exceptionnellement, car aucune hypothèse restrictive n'a été formulée sur la configuration des points-base de c_i et, par suite, sur celle des points-base assignés de $|x_s|$.

Si $t = 1$, $|c_s - x_s| = |c_{s-1}|$ a la dimension $r_{s-1} = r_s - t = r_s - 1$ et x_s est effectivement fondamentale monovalente pour $|c_s|$; $|x_s|$ se réduit donc à une courbe isolée éventuellement 0 et $x_s.x_s = 0$.

On sait par (3) que $c_{s-1}.x_s = 1$, donc que $|c_{s-1}|$ découpe sur x_s une série linéaire g_1 qui se réduit nécessairement à un point fixe B_{s-1}, car x_s est de genre 1. Toutes les courbes c_{s-1} ont donc ce point en commun; celui-ci est extérieur à la base assignée de $|c_{s-1},|$ et ce système possède la surabondance 1. La série caractéristique de $|c_{s-1}|$ est spéciale et de dimension

$$r_{s-1} - 1 = p_{s-1} - 2 + t = p_{s-1} - 1,$$

c'est donc la série canonique. Notons encore que $|c_{s-1}|$ possède le degré virtuel

$$2p_{s-1} - 1 = 2p_{s-1} - 2 + t.$$

Supposons que $|c_s|$ est régulier. Il est alors de degré

$$r_s + p_s - 1 = 2p_s - 1 \qquad \text{car} \qquad r_s = p_s - 1 + t = p_s$$

et

$$c_s.x_s = c_s.(c_s - c_{s-1}) = 1.$$

Mais x_s est de genre virtuel 1; $|c_s|$ ne peut donc découper sur x_s qu'une série linéaire g_1^0. Autant dire que $|c_s|$ possède sur cette courbe un point-base simple non assigné $B_s = g_1^0$ et a la surabondance 1.

De toute façon, on a virtuellement $c_s.x_s=1$, $c_{s-1}.x_s=1$ et, par conséquent,

$$x_s.x_s=x_s.(c_s-c_{s-1})=0.$$

En résumé : *si* $|c_s|$ *est un système d'argument* t, *le système* $|c_s|$ $s=1,2,\ldots,i$ *est de degré virtuel* (*et effectif pour* $t\geqq 2$) $c_s.c_s=2p_s-2+t$; *de plus*, $|c_s-c_{s-1}|$, $s\geqq 2$, *définit un système effectif* $|x_s|$ *de genre virtuel* 1 *tel que* $x_s.x_s=0$ *et se réduisant, pour une base non particularisée de* $|c_i|$, *à une courbe isolée. Enfin, on a virtuellement* (*et effectivement pour* $t\geqq 2$)

$$c_s.x_s=c_{s-1}.x_s=t.$$

6. Le système $|x_s|=|c_s-c_{s-1}|$, $s\geqq 2$, possède une base assignée égale à la différence des bases assignées de $|c_s|$ et $|c_{s-1}|$. On sait que $c_{s-1}.x_s=t$, donc que $|c_{s-1}|$ découpe une série linéaire de dimension $t-1-e$, $e\geqq 0$, sur une courbe x_s générique, car x_s est de genre (virtuel) un. On sait d'autre part que $r_s\geqq r_2=r_1+t>t$. Il résulte de là qu'il existe un système de courbes c_{s-1} particulières, soient les courbes $\bar{c}_{s-1}$, formées de x_s et d'une résiduelle $\bar{c}_{s-2}$ variable dans un système linéaire $|\bar{c}_{s-2}|$ de dimension

$$r_{s-1}-t+e=r_{s-2}+e=p_{s-1}-1+e.$$

Désignons par $|\bar{c}_{s-1}|$ le système $|x_s+\bar{c}_{s-2}|$; $|\bar{c}_{s-1}|$ est totalement contenu dans $|c_{s-1}|$.

La série linéaire découpée sur une c_{s-1} générique par une $\bar{c}_{s-2}$ est de dimension $r=p_{s-1}-1+e$ et d'ordre

$$n=\bar{c}_{s-2}.c_{s-1}=(\bar{c}_{s-1}-x_s).c_{s-1}\leqq c_{s-1}.c_{s-1}-c_{s-1}.x_s=2p_{s-1}-2,$$

car la base de $|c_{s-1}|$ contient celle de $|\bar{c}_{s-1}|$. Écrivons $n=2p_{s-1}-2-j$, $j\geqq 0$. Je dis que $e=j=0$ et que, par suite, $|\bar{c}_{s-2}|$ est un adjoint de $c_{s-1}|$. En effet, la série linéaire découpée par $|\bar{c}_{s-2}|$ sur c_{s-1} est une série $g^{p_{s-1}-1-e}_{2p_{s-1}-2-j}$. Si $e>0$, cette série est non spéciale et doit être d'ordre au moins égal à $2p_{s-1}-1+e$, ce qui n'est pas le cas. D'autre part, pour $e=0$, la série en question doit avoir un ordre au moins égal à $2p_{s-1}-2$, ce qui exige $j=0$.

D'après cela, observons que

$$\bar{c}_{s-1}.c_{s-1}=(\bar{c}_{s-2}+x_s).c_{s-1}=2p_{s-1}-2+t=c_{s-1}.c_{s-1}.$$

Les systèmes $|c_{s-1}|$ et $|\bar{c}_{s-1}|$ ont donc même base et $c_{s-1}\equiv\bar{c}_{s-1}$.

En somme, nous avons montré que l'opération $c_{s-1}-x_s$ était possible et définissait un adjoint $|\bar{c}_{s-2}|$ de $|c_{s-1}|$. On peut préciser et démontrer que $\bar{c}_{s-2}$ est l'adjoint pur $|c_{s-2}|$ de $|c_{s-1}|$.

Pour prouver ce dernier point, notons d'abord que

$$\begin{aligned}\bar{c}_{s-2}.c_{s-2}&=(c_{s-1}-x_s).(c_{s-1}-x_s)=c_{s-1}.c_{s-1}-2c_{s-1}.x_s+x_s.x_s\\&=(2p_{s-1}-2+t)-2t-0=2p_{s-2}-2+t,\end{aligned}$$

où $\bar{c}_{s-2}.\bar{c}_{s-2}=c_{s-2}.c_{s-2}$ (n° 5).

Si $|\bar{c}_{s-2}|$ était un adjoint impur de $|c_{s-1}|$, on aurait $\bar{c}_{s-2} \equiv c_{s-2} + \theta$, θ étant une courbe partie fixe de $|\bar{c}_{s-2}|$ et

$$\bar{c}_{s-2} \cdot \bar{c}_{s-2} = (c_{s-2} + \theta) \cdot (c_{s-2} + \theta) = c_{s-2} \cdot c_{s-2} + 2 c_{s-2} \cdot \theta + \theta \cdot \theta.$$

Mais $c_{s-2} \cdot \theta = 0$, car

$$c_{s-1} \cdot c_{s-2} = c_{s-1} \cdot (c_{s-2} + \theta) = 2p_{s-1} - 2.$$

D'autre part,

$$\theta \cdot \theta = \theta \cdot \theta + c_{s-2} \cdot \theta = (\theta \cdot c_{s-2} + \theta) < 0,$$

car θ est partie fixe de $|c_{s-2} + \theta|$. Au total, si l'on avait $\bar{c}_{s-2} = c_{s-2} + \theta$, la relation $\bar{c}_{s-2} \cdot \bar{c}_{s-2} = c_{s-2} \cdot c_{s-2}$ ne pourrait avoir lieu. Il faut donc bien admettre que $\bar{c}_{s-2} \equiv c_{s-2}$.

7. *Si $|c_i|$ est d'argument t (au sens étroit), on a*

$$c_i = c_1 + (i-1)(c_2 - c_1).$$

Pour le prouver, écrivons encore $x \equiv c_i - c_{i-1}$. D'après ce qui précède, $c_{i-1} - x \equiv c_{i-2}$ ou $x \equiv c_{i-1} - c_{i-2}$. Par suite, $c_{i-3} \equiv c_{i-2} - x$, et ainsi de suite. Autant dire que

$$x \equiv c_i - c_{i-1} \equiv c_{i-1} - c_{i-2} \equiv \ldots \equiv c_2 - c_1,$$

ou $c_i \equiv c_1 + (i-1)(c_2 - c_1)$.

Remarquons que pour $t = 2$, comme pour $t = 1$ (n° 5), $|x|$ se réduit à une courbe isolée. En effet, si $|x|$ était un faisceau, celui-ci découperait une série linéaire g_2^1 sur une c_i générique; $|c_i|$ serait donc hyperelliptique et l'on aurait $|c_{i-1}| = (p_i - 1)|x|$, ce qui est impossible pour $i - 1 > 1$ (n° 2).

8. Le théorème précédent fournit une méthode pratique pour la détermination des systèmes $|c_i|$ d'argument t birationnellement distincts. Pour les obtenir, on peut opérer comme suit :

a. construire les systèmes $|c_1|$ birationnellement distincts de genre $p_1 \leqq 1$ et dimension r_1 capables d'être adjoints de système, $|c_2|$ de genre $p_1 + t$ et dimension $r_1 + t$.

b. construire les systèmes $|c_2|$ de ces genre et dimension birationnellement distincts dont les adjoints purs sont précisément ces systèmes $|c_1|$.

c. construire ceux des systèmes $|c_i| = |c_1 + (i-1)(c_2 - c_1)|$ qui sont effectifs.

C'est de cette méthode que nous userons dans ce qui suit.

9. Occupons-nous d'abord du cas $p_1 < 0$. Il ne se présente que si $|c_1|$ est composé avec les courbes d'un faisceau, celles-ci étant rationnelles (n° 2) et $|c_2|$

est hyperelliptique. Or un faisceau de courbes rationnelles est birationnellement réductible à un faisceau de droites $C_1(A)$ de sommet A. Si chaque courbe c_1 est formée à l'aide de $n > 1$ courbes du faisceau, on peut donc écrire $c_1 \equiv C_n(A^n)$.

Sur une courbe c_2 générique, la série linéaire g_2^1 portée par cette courbe et avec laquelle la série canonique est composée, est découpée par le faisceau $C_1(A)_1$. De plus, puisque $r_1 = n$, $p_2 = r_1 + 1 = n + 1$. On déduit de là que si $|c_2|$ est d'ordre $n + m + 3$, $m \geq 0$:

1° A est base $(n + m + 1)$-uple pour $|c_2|$;

2° $|c_2|$ possède encore m points-base doubles $A_1, \ldots, A_n$ et $q \geq 0$ points-base simples $B_1, \ldots, B_q$.

En somme, on a

$$c_2 \equiv C_{n-m-3}(A^{n-m+1} A_1^2 \ldots A_m^2 B_1 \ldots B_q),$$
$$x \equiv c_2 - c_1 \equiv C_{m-3}(A^{m-1} A_1^2 \ldots A_m^2 B_1 \ldots B_q).$$

Mais on sait que $x.x = 0$, q doit donc être tel que

$$(m+3)^2 = (m-1)^2 - 4m - q \qquad \text{ou} \qquad q = 8.$$

De là,

$$x \equiv C_{m-3}(A^{m-1} A_1^2 \ldots A_m^2 B_1 \ldots B_8),$$

et

$$(I) \qquad c_i \equiv c_1 + (i-1)x \equiv C_{n-i-1,\, m-3}(A^{n-i-1,\, m-1} A_1^{2i-2}, \ldots, A_m^{2i-2} B_1^{i-1}, \ldots, B_8^{i-1})$$

avec

$$t = p_2 - p_1 = n + 1 - (-n-1) = 2n. \qquad p_i = (-n-1) + (i-1)2n = (2i-3)n + 1.$$

La réponse ainsi obtenue doit être examinée de plus près.

10. Si $m = 0$, on

$$(II) \qquad |c_i| = |C_{n-3,\, i-1}(A^{n-i-1} B_1^{i-1}, \ldots, B_8^{i-1})|. \qquad n > 1.$$

Un tel système est certainement d'ordre minimum, car $n + 3(i-1)$ est l'ordre minimum d'un système dont l'adjoint l'indice $i - 1$ est réduit à l'ordre minimun n.

Supposons maintenant que l'on a $m \geq 1$.

Observons que toute transformation de Jonquières conservant le plan α de $|c_i|$ et le sommet A conserve le faisceau $C_1(A)$ et transforme c_1 en un système $|c_1^0|$ composé avec des droites de $C_1(A)$. Il transforme par suite c_i en un système $|c_i^0|$ répondant à la formule (I) du n° 9, seul m pouvant changer de valeur (ce qui correspond à une modification du nombre des droites fondamentales AA_r impropres pour $|c_i|$). Nous pouvons donc faire l'hypothèse que $|c_i|$ est réduit à l'ordre minimum par des transformations de Jonquières de

sommet A. Cette hypothèse entraîne des conséquences pour la configuration des points-base de $|c_i|$.

Parce que la somme des ordres des points d'un triple AA_sA_k ou AA_sB_k excède l'ordre de $|c_i|$, les trois points d'un tel triple ne peuvent servir de base à une transformation quadratique conservant A, car celle-ci réduirait l'ordre $|c_i|$. Il résulte de là que les points A_s ou B_k sont infiniment voisins de A et qu'un point A_j ou B_k ne peut succéder à un point A_j du domaine du premier ordre de A sur une branche linéaire de courbe.

Supposons qu'un point Y de la base de c_i succède au point A_s (nécessairement, d'après ce qui précède, sur une branche cuspidale de courbe). Une transformation quadratique de deuxième espèce $T(AA_sX)$ basée sur A, A_s et un point générique X du plan transforme $|c_i|$ en un système du même type et du même ordre $|c_i''|$, mais pour lequel Y est transformé en un point-base du même ordre de multiplicité (situé dans le domaine du premier ordre de A), tandis que A_s disparaît pour être remplacé par un point $(2i-2)$-uple infiniment voisin de A (dans le domaine du premier ordre de celui-ci) et commun à $2i-2$ branches linéaires de courbe c_i'' qui, prises deux à deux, ne sont pas en général osculatrices en A. Il s'ensuit que l'on peut, sans augmenter l'ordre de $|c_i|$, faire en sorte que les points A_s soient infiniment voisins de A dans des directions différentes, et que tout point B_k ou bien appartienne au domaine du premier ordre de A ou succède à un autre point B_s de ce domaine.

Trois points B_r, B_s, B_t ne peuvent succéder à un point A sur une branche linéaire de courbe si les deux premiers ne sont pas alignés sur A. En effet, dans le cas contraire, la transformation de Jonquières d'ordre trois et de base $(AB_rB_sB_tA_1)$ serait réductrice de l'ordre de $|c_i|$, ainsi qu'on le vérifie par un calcul élémentaire.

D'après cela, il y a $a \geq 1$ points B_s proches de A. La loi de proximité en ce point doit donc être satisfaite et l'on doit avoir

$$n-(m-1)(i-1) \geq 2m(i-1)-(i-1)a$$

ou

$$(\alpha) \qquad m+a \leq \frac{n}{i-1}-1.$$

Des systèmes d'ordre minimum du type (I) avec m donné existent certainement. Par exemple, ceux pour lesquels tous les points $A_1, \ldots, A_mB_1, \ldots, B_8$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes, si l'on prend n satisfaisant à la relation (α) dans laquelle on fait $a=8$.

10°. Supposons qu'une transformation birationnelle n'appartenant pas au type de Jonquières puisse encore abaisser l'ordre de $|c_i|$. Elle change les droites par A en courbes d'un certain ordre $z>1$ et $|C_n(A^n)|$ en un système de courbes

d'ordre zn composées avec les précédentes. Elle change $|c_i|$ en un système de courbes d'ordre $n^0 \geqq zn + (i-1)3$. Mais, par hypothèse,

$$n^0 < n + (m+3)(i-1).$$

Donc

$$n + (m+3)(i-1) > zn + 3(i-1) \qquad \text{ou} \qquad n - m(i-1) > zn \geqq 2n,$$

car $z \geqq 2$, ou $m(i-1) > n$. De là, enfin, parce que $a \geqq 1$,

$$(1) \qquad m + a > \frac{n}{i-1} + 1.$$

Cette dernière relation étant en contradiction avec la relation (α) du n° 10, nous devons rejeter l'hypothèse que nous venons de faire et admettre que tout système $|c_i|$ actuellement considéré est réductible birationnellement à un système d'ordre minimum du type (I) ou (II).

11. Ces premiers résultats peuvent être résumés de la façon suivante :

Tout système $|c_i|$ d'argument t pour lequel $|c_1|$ est de genre $p_1 < 0$ est birationnellement réductible à un système d'ordre minimum de l'un des types suivants :

$$(1) \qquad |C_{n-2i-1}(A^{n-i-1}B_1^{i-1}, \ldots, B_{2i-1}^{i-1})|, \qquad n > 1, \qquad t = 2n.$$

$$(2) \qquad |C_{n+i-1,\, m=1}(A^{n-i-1,\, m-1}A_1^{2i-2}, \ldots, A_m^{2i-2}B_1^{i-1}, \ldots, B_s^{i-1})|, \qquad n > 1, \qquad t = 2n.$$

Pour le système (2), les points $A_1, \ldots, A_m$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes; $B_1, \ldots, B_s$ sont infiniment voisins de A, aucun d'eux ne succédant à un point A_i; trois points B ne peuvent succéder à A sur une branche linéaire de courbe si les deux premiers ne sont pas alignés sur A. Si a est le nombre des points B proches de A, la relation suivante est satisfaite

$$m + a \leqq \frac{n}{i-1} + 1.$$

12. Lorsque $p_1 = 0$, $|c_1|$ est birationnellement transformable en l'un des systèmes de courbes suivants :

1° Faisceau de droites $c_1 \equiv C_1(A)$;

2° Système des coniques $c_1 \equiv C_2$;

3° Système de courbes $c_1 \equiv C_n(A^{n-1})$, $n \geqq 1$;

4° Système de courbes $c_1 \equiv C_n(A^{n-1}A_1^1, \ldots, A_m^1)$, $n > 1$, $n-1 \geqq m > 0$; pour $m \geqq 2$, les points $A_1, \ldots, A_m$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes.

Pour ces systèmes, on a respectivement

$$r_1 = 1, 5, 2n, 2n - m; \quad p_2 = 2, 6, 2n+1, 2n - m + 1,$$

et

$$t = p_2 - p_1 = 2, 6, 2n+1, 2n - m + 1.$$

Pour construire les systèmes c_i associés à un système $|c_1 = C_1|(A)^i$, il suffit de raisonner comme il vient d'être fait en substituant $C_1(A')$ à $C_n(A^n)$. On trouve d'abord les systèmes d'ordre minimum

$$(1) \qquad C_{n-i-2}(A'B_1^{i-1}, \ldots, B_\kappa^{i-1}),$$

puis, formellement, les systèmes

$$(2) \qquad C_{1-i-1,\,m-2}(A^{1-i-1}\,A_m^{i-1}\,A_1^{i-2}, \ldots, A_m^{i-2}B_1^{i-1}, \ldots, B_\kappa^{i-1}). \qquad m \geq 1.$$

Pour ces derniers que l'on peut supposer birationnellement irréductibles à des systèmes du même type et d'ordre inférieur, on trouve comme au n° 10 que $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_\kappa$ doivent être infiniment voisins de A et que, de plus, m et le nombre $a \geq 1$ des points B proches de A doivent satisfaire à la relation (2) qui s'écrit actuellement

$$m + a \leq \frac{1}{i-1} + 1.$$

Cette relation est contradictoire en soi parce que $m + a \geq 2$ et $i > 2$. Les systèmes (2) ne sont donc pas effectifs et seuls les systèmes (1) doivent être retenus.

13. Ce premier cas ayant été examiné, conservons l'hypothèse $p_1 = 0$ et supposons en outre que $c_2' \equiv c_1$. Alors $x \equiv c_2 - c_1$ est une cubique virtuellement elliptique de degré 0. Nous la désignerons par la notation $x \equiv C_3(A_1A_2, \ldots, A_8)$ où $x = C_3(AA_1, \ldots, A_8)$. Les systèmes c_i correspondant aux systèmes $|c_1|$ plus haut définis (2°, 3°, 4°) seront donc

$$(1) \qquad c_i = c_1 - (i-1)x = C_{n-i-1}(A_1^{i-1}A_2^{i-1}, \ldots, A_8^{i-1}),$$

$$(2) \qquad c_i = c_1 - (i-1)x = C_{n-3\,i-1}(A^{n-i-2}A_1^{i-1}, \ldots, A_8^{i-1}), \qquad n \geq 1,$$

$$(3) \qquad c_i = c_1 - (i-1)x = C_{n-3\,i-1}(A^{n-i-2}A_1^i, \ldots, A_m^i A_{m+1}^{i-1}, \ldots, A_8^{i-1}) \quad m > 0, \qquad n \geq 2,$$

car les points-base assignés de c_1 figurent parmi ceux de $x' = c_2 - c_1$. Notons, que pour les systèmes (3), les points $A_1, \ldots, A_m$, si $m > 1$, sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes. La relation de proximité en A doit donc être satisfaite et l'on doit avoir

$$n - 2 - i \geq mi \qquad \text{ou} \qquad m \leq \frac{n-2}{i} - 1.$$

Les systèmes (1), (2) et (3) sont d'ordre minimum parce que leur système $|c_1|$ est lui-même d'ordre minimum. On le montre comme au n° 10.

14. Voyons ce qui se passe si $p_1 = 0$ et si $c_2' \not\equiv c_1$.
Nous savons que

$$c_2' = c_1 + x' \qquad \text{si} \qquad c_2 = c_1 + x.$$

La courbe x' est formée de courbes fondamentales pour $|c_1|$. En effet,

$$c_1 . x' = (c_2 - x) . x' = c_2 . x' - x . x' = c_2 . x' = 0,$$

car $x . x' = 0$ (x étant elliptique) et

$$c_2 . x' = c_2 . (c'_2 - c_1) = 0.$$

car $|c'_2|$ et c_1 sont des adjoints de c_2. Or seules les courbes désignées au 4° du n° 12 (le 1° ayant déjà été examiné) possèdent de telles courbes fondamentales : les droites $AA_1, \ldots, AA_m$. On ne peut donc associer l'hypothèse $x' \equiv c'_2 - c_1 \equiv 0$ qu'à un système

$$c_1 = C_n(A^{n-1}A_1, \ldots, A_m), \qquad m > 0.$$

Changeons de notations et écrivons

$$c_1 \equiv C_n(A^{n-1}A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_q), \qquad m > 0, \qquad q \geq 0, \; m - q \leq n - 1.$$

Le système $|c'_2|$ ne peut différer de c_1 que par tout ou partie des droites fondamentales $AA_1, \ldots, AA_m, AB_1, \ldots, AB_q$. En disposant convenablement des indices, on peut faire en sorte que précisément

$$c'_2 \equiv c_1 - AA_1 - \ldots - AA_m \equiv C_{n-m}(A^{n-1-m}A_1^2, \ldots, A_m^2 B_1, \ldots, B_q).$$

De là

$$c_2 \equiv C_{n-m-2}(A^{n-m}A_1^2, \ldots, A_m^2 B_1^2, \ldots, B_q B_{q-1}, \ldots, B_{q-b}), \qquad b \geq 0,$$

$$x' \equiv c_2 - c_1 \equiv C_{m-2}(A^{m-1}A_1^2, \ldots, A_m^2 B_1, \ldots, B_q B_{q-1}, \ldots, B_{q-b}).$$

Or $x . x = 0$. Par conséquent

$$(m-3)^2 - (m-1)^2 - 4m - q - b = 0 \qquad \text{ou} \qquad q - b = 8$$

et

$$c_i \equiv c_1 - (i-1)x \equiv C_{n-i-1}(A^{n-i+1-m}A_1^{2i-1} \ldots A_m^{2i-1} B_1^i \ldots B_q B_{q-1}^{i-1} \ldots B_{q-i+1}).$$

Par hypothèse, n° 12, les points $A_1, \ldots A_m, B_1, \ldots, B_q$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes. En raisonnant comme on l'a fait plus haut, on montre que l'on peut, sans augmenter l'ordre de $|c_i|$ (la somme des ordres de multiplicité de A et d'un point A_s égalant l'ordre de c_i), faire en sorte qu'un point-base A_s ne soit jamais suivi d'un point-base B_t.

Comme au n° 12, on constate qu'une transformation de Jonquières transforme $|c_i|$ en un système du même type. Cette transformation transforme donc $|c_i|$ en un système répondant à la même formule, et l'on peut supposer c_i réduit à l'ordre minimum de son type par de telles transformations.

Cette hypothèse de l'ordre minimum étant réalisée, on montre encore que si des points $B'B'^{-1}B'^{-1}\ldots$ succèdent à A sur une branche linéaire de courbe, les deux premiers sont alignés sur A (n° 12).

Enfin, si a est le nombre des points B proches de A, la relation de proximité en A conduit à la condition

$$n-1+(i-1)(m+1)\geqq(2i-1)m+a(i-1)+q$$

ou

$$m+a+\frac{m-q}{i-1}\leqq\frac{n-1}{i-1}+1.$$

L'existence de systèmes c_i du type indiqué et d'ordre minimum $n+(i-1)(m+3)$ est assurée ainsi qu'en témoigne l'exemple pour lequel $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots B_8$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes, n étant choisi de façon à satisfaire à la relation de proximité en A

$$n-1-(i-1)(m-1)\geqq m(2i-1)+8(i-1)+q$$

pour les valeurs de m et de i choisies.

15. Résumons ces nouveaux résultats.

Tout système c_i d'argument t pour lequel le dernier adjoint infini (c_1) est de genre 0 *est réductible birationnellement à un système d'ordre minimum de l'un des types suivants* (1)

(1) $\qquad C_{n,t-2}(A_1^{t-1}A_2^{t-1}\ldots A_9^{t-1})\,, \qquad t=2,$

(2) $\qquad C_{2t-1}(A_1^{t-1}\ldots A_2^{t-1})\,, \qquad t=6,$

(3) $\qquad C_{n-3t-1}(A^{n-t-2}A_1^{t-1}\ldots A_7^{t-1})\,, \qquad t=2n+1, \qquad n\geqq 1,$

(4) $\qquad C_{n-3t-1}(A^{n-t-2}A_1^{t}A_2^{t-1}\ldots A_7^{t-1})\,, \qquad t=2n, \qquad n>1,$

(5) $\qquad C_{n-3t-1}(A^{n-t-2}A_1^{t}\ldots A_m^{t}A_{m+1}^{t-1}\ldots A_7^{t-1})\,, \qquad t=2n-m+1, \qquad 8\geqq m\geqq 2,$

(6) $\qquad \left\{\begin{array}{l} C_{n-t-1,\,m-3}(A^{n-t-1,\,m-1}A_1^{2t-1}\ldots A_m^{2t-1}B_1^{t}\ldots B_n^{t}B_{n+1}^{t-1}\ldots B_8^{t-1})\,, \\ n\geqq 2, \qquad m\geqq 1, \qquad q\leqq 8, \qquad t=2n+1-m-q. \end{array}\right.$

Pour les systèmes (5), *les points* $A_1, \ldots, A_m$ *sont infiniment voisins de* A *dans des directions distinctes et l'on doit avoir*

$$m\leqq\frac{n-2}{t}+1.$$

Pour les systèmes (6), *les points* $A_1, \ldots, A_m; B_1, \ldots, B_q$ *sont infiniment voisins de* A *dans des directions distinctes, un point* A_0 *n'est suivi d'aucun autre point-base; si des points* $BB^{-1}B^{-1}\ldots$ *succèdent à* A *sur une branche linéaire de courbe, les deux premiers sont alignés sur* A; *de plus on doit avoir*

$$m-a+\frac{m+q}{t-1}\leqq\frac{n-1}{t-1}+1,$$

$a>0$ *étant le nombre des points* B *proches de* A.

(1) Pour (5), l'ordre n'est peut-être minimum que vis-à-vis du groupe des transformations de Jonquières (n° 14).

16. Il nous reste à examiner le cas $p_1 = 1$. On sait (n^{os} 2, 3) que dans ce cas le système $|c_1|$ est irréductible et ne peut être birationnellement identique à un faisceau de Halphen proprement dit. De là, les seules éventualités à considérer du point de vue crémonien

$$1^o \qquad c_1 = C_3(A_1 \dots A_m), \qquad 0 \leqq m \leqq 8 \quad (n^o 3),$$

$$2^o \qquad c_1 = C_4(A_1^2 A_2^2),$$

car on sait qu'un système infini de courbes elliptiques irréductible qui n'est pas un faisceau de Halphen proprement dit est birationnellement transformable en un système de cubiques doté ou non de points-base ou en un système de quartiques doté de deux points-base doubles.

17. Moyennant $x \equiv c_2 - c_1$, nous avons $c_1 . x = t$, (n^o 5), Donc, sur une courbe x, $|c_1|$ découpe une série linéaire g_t de dimension maximum $t-1$ et comme $r_1 = p_1 - 1 + t = t$, x est contenue dans une courbe c_1.

Examinons d'abord ce qui se passe lorsque $c_1 \equiv C_4(A_1^2 A_2^2)$.

Puisque x fait partie d'une courbe c_1 et est de genre et de degré (virtuels) un et zéro, x est une courbe $C_3(A_1, \dots, A_9)$ ou $C_4(A_1^2 A_2^2 A_3, \dots, A_{10})$. D'autre part, puisque $c_i \equiv c_1 + (i-1)x$, on a

$$c_i \equiv C_{3i-1}(A_1^{i-1} A_2^{i-1} A_3^{i-1} \dots A_9^{i-1}) \qquad \text{ou} \qquad c_i \equiv C_{3i}(A_1^{2i} A_2^{2i} A_3^{i-1} \dots A_{10}^{i-1}).$$

Mais en faisant subir au système $|c_i|$ correspondant à la deuxième alternative une transformation quadratique $T(A_1 A_2 A_3)$ [1] basée sur les points A_1, A_2, A_3, on transforme ce système en un système de courbes analogues aux premières. Nous devons donc nous borner au choix de $x \equiv C_3(A_1, \dots, A_9)$.

Si $c_1 \equiv C_3(A_1, \dots, A_m)$, x ne peut être qu'une cubique $C_3(A_1, \dots A_9)$ et l'on a

$$c_i \equiv C_{3i}(A_1^i \dots A_m^i A_{m+1}^{i-1} \dots A_9^{i-1}).$$

On vérifie de suite que pour un système $|c_i|$ de pareilles courbes on a

$$r_1 = 9 - m, \qquad p_2 = 9 - m + 1, \qquad t = p_2 - p_1 = 9 - m.$$

tandis que si $c_1 \equiv C_4(A_1^2 A_2^2)$, on a

$$r_1 = 8, \qquad p_2 = r_1 - 1, \qquad t = p_2 - p_1 = 8.$$

18. Le système $|c_1|$ d'argument $t = 1$ n'est représenté que par le type

$$(1) \qquad c_1 = C_{3i}(A_1^i \dots A_8^i A_9^{i-1}).$$

---

[1] Pareille transformation existe toujours, car étant donnés les ordres de multiplicité de ces points pour C_4, les deux derniers ne peuvent ni être proches du premier ni être alignés sur lui.

En effet, on doit avoir dans ce cas $p_2 = p_1 + t = p_1 + 1$ et $p_1 \leqq 1$. D'autre part, $p_2 = r_1 + 1$ et $r_1 \geqq 1$. De là, $2 \leqq p_2 \leqq 2$ ou $p_2 = 2$, $p_1 = r_1 = 1$ et $|c_1|$ doit être un faisceau de courbes elliptiques.

Ainsi que nous l'avons prévu (n° 5), c_i et ses adjoints successifs sont tous de surabondance 1 car une courbe variable c_s, $s = 1, 2, \ldots, i$ ne coupe $x \equiv C_3(A_1, \ldots, A_9)$ qu'en un seul point B_s, lequel doit être fixe parce que x est elliptique. Les systèmes $|c_i|$ définis par (1), virtuellement, sont donc effectivement des systèmes

$$C_{3i}(A_1 \ldots A_9^{i-1} B_i),$$

B_i étant un point-base non assigné dont la position sur la cubique x dépend de la valeur de l'indice.

Le système (1) a été considéré notamment par G. Fano et Faedo.

Signalons en passant qu'il existe, sur x, des relations fonctionnelles entre les différents points B_i, B_{i-1}, ..., $B_1 = A_9$. Considérons en effet le faisceau de courbes défini par deux courbes $2c_s$ et $c_{s-1} + c_{s-1}$. Ce faisceau est précisément un faisceau $(C_{6s}(A_1^2, \ldots, A_7^2 A_8^{2s-2}))$ découpant sur x une série linéaire d'ordre 2 et comprenant parmi ses groupes les couples $2B_s$ et $B_{s-1} + B_{s-1}$. On a donc sur x l'équivalence $2B_s \equiv B_{s-1} + B_{s-1}$ et B_s est l'un des points doubles de la série linéaire $(B_{s-1} + B_{s-1})$, $s = 1, 2, \ldots, i-1$.

19. En somme, *les systèmes c_i d'argument t pour lesquels le dernier adjoint infini c_1 est de genre 1 sont birationnellement réductibles aux systèmes d'ordre minimum*

$$|C_{3i}(A_1^i \ldots A_m^i A_{m-1}^{m-} \ldots A_9^{i-1})|, \qquad 0 \leqq m \leqq 8, \qquad t = 9 - m,$$
$$C_{3i-1}(A_1^{i-1} A_2^{i-1} \ldots A_9^{i-1}), \qquad t = 8.$$

Les systèmes du premier type pour lesquels $m = 8$ sont de surabondance 1.

20. Ainsi que nous l'avons montré au n° 4, tout système $|\bar{c}_i|$ d'argument t au sens large admet comme adjoint pur un système $|\bar{c}_{i-1}|$ d'argument t au sens étroit. Comme nous supposons $i \geqq 3$, $|c_{i-2}|$ existe.

Écrivons $\bar{c}_i \equiv c_{i-1} + y$. Nous tirons de là $\bar{c}'_i \equiv c_{i-1} + y'$. Or un théorème connu (2) permet d'affirmer que la courbe y', partie fixe de $|\bar{c}'_i|$, est contenue dans la partie fixe du système $|\bar{c}'_{i-1}| = |c'_{i-1}|$, système dont l'existence est assurée ainsi que nous venons de le rappeler. La partie fixe de $|c'_{i-1}|$ est

---

(1) G. Fano, *Osservazioni intorno il sistema aggiunto puro* (*Rend. Circ. Mat.*, Palermo, XI, p. 29, 1915).

(2) Faedo, *Sulle superficie regolari a sezioni iperpiane canoniche* (*Rend. Lincei*, 1938, pp. 197-202 et 276-280).

(3) *Cf.* Fabio Conforto, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939, pp. 209-213. *Voir* aussi notre n° 24 suivant.

précisément la courbe x'. Il s'ensuit que $|\bar{c}'_i| = |c_{i-1} + y'|$ est contenu dans $|c'_{i-1} + x' = c'_i|$, $|c_i|$ étant, tout au moins formellement, le système d'argument t (au sens étroit) d'adjoint pur $|c_{i-1}|$.

Tout système d'adjoint impur $|C_m(A^{\alpha_1}, \ldots, A^{\alpha_r})|$ est un système

$$|C_{m-3}(A^{\alpha_1+1} \ldots A^{\alpha_r+1} B_1 \ldots B_r)|.$$

$B_1, B_2 \ldots B_r$, $r \geq 0$ étant des points-base simples arbitrairement imposés au système

$$C_{m-3}(A^{\alpha_1+1} \ldots A^{\alpha_r+1}).$$

Il résulte de là que $|\bar{c}_i|$ est totalement ou partiellement contenu dans c_i.

21. Si c_i contient totalement $\bar{c}_i$, celui-ci n'est que le système $|c_i|$ dont on enrichit la base au moyen de points simples. Dans le cas contraire, nous pouvons d'abord supposer que la base de $\bar{c}_i$ est dénuée de points simples. Ce système obtenu, il suffit d'ajouter des points simples à sa base pour obtenir ceux qu'écarte la restriction provisoirement faite.

Le système $|\bar{c}_i|$ ne peut être partiellement contenu dans $|c_i|$ que si c'_i possède une partie fixe $x' \equiv c'_i - c_{i-1}$. Cette éventualité ne se présente que pour les systèmes (2) et (6) des n^{os} 11 et 15. Cette partie fixe est précisément formée des droites fondamentales impropres $AA_1, \ldots A_m$ des systèmes c_i en question. En disposant convenablement des indices, on peut toujours faire en sorte que, précisément, $y' \equiv AA_1 + \ldots + AA_s$, $s \leq m$. On aura alors

$$\bar{c}'_i \equiv c_{i-1} + AA_1 + \ldots + AA_s \equiv c'_i - AA_{s+1} - \ldots AA_m,$$

$|\bar{c}'_i|$ passera $m - s$ fois de moins que les c'_i par A et une fois de moins par chacun des points $A_{s+1}, \ldots, A_m$ que ces mêmes courbes. Autant dire que $\bar{c}_i$ possède la même particularité vis-à-vis de $|c_i|$ que $|\bar{c}'_i|$ vis-à-vis de c'_i et que $|\bar{c}_i|$ est soit du type

$$|C_{n+i-1-(m+1)-(m-s)}(A^{n+i-1-m+1-m-s} A_1^{2i-2} \ldots A_s^{2i-2} A_{s+1}^{2i-3} \ldots A_m^{2i-3} B_1^{i-1} \ldots B_s^{i-1})|,$$

soit du type

$$|C_{n+i-1-m+3-m}(A^{n-1+i-1-m+1-m-s} A_1^{2i-1} \ldots A_s^{2i-1} A_{s+1}^{2i-2} \ldots A_m^{2i-2} B_1 \ldots B_q B_{q+1}^{i-1} \ldots B_s^{i-1})|,$$

avec $s \leq m$, soit, si on lève la restriction initiale, d'un type obtenu en accroissant de points simples les bases de ces systèmes.

22. Les conditions d'existence des deux systèmes qui viennent d'être formellement définis se ramènent aux conditions imposées par la loi proximité de en A. Elles sont identiques à celles déjà trouvées pour les systèmes c_i correspondants. En effet, dans le premier cas, on trouve

$$n + (i-1)(m+1) - (m-s) \geq s(2i-2) + (m-s)(2i-3) + a(i-1)$$

ou

$$n+(i-1)(m+1)\geqq m(2i-2)+m(i-1)$$

et

$$n+(i-1)(m+1)-1-(m-s)\geqq s(2i-1)+(m-s)(2i-2)+a(i-1)+q$$

ou

$$n-1-(i-1)(m+1)\geqq(2i-1)m+a(i-1)+q,$$

et ces conditions sont bien celles que nous avons mises en évidence aux n^{os} 10 et 14.

Rappelons que a représente toujours le nombre des points B proches de A.

De ce qui précède, il résulte que les systèmes $|c_i|$ formels dont nous sommes partis pour déterminer les systèmes $|\bar{c}_i|$ sont effectifs.

23. Faisant une somme des résultats acquis au cours de cette Note, nous pouvons dire que :

Si $|c_i|$ est un système complet irréductible de courbes planes de genre p_i tel que p_i forme avec les genres $p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots$ de ses adjoints purs $|c_{i-1}|, |c_{i-2}|, \ldots$, d'indices $1, 2, \ldots$ une progression arithmétique décroissante de raison t, i étant choisi de telle sorte que $|c_1|$ soit le dernier adjoint pur infini de $|c_i|$, le système $|c_i|$ est birationnellement réductible à un système d'ordre minimum de l'un des types suivants :

(I) $\quad |C_{2i-1}(A_1^{i-1}\ldots A_9^{i-1})|, \quad t=6.$

(II) $\quad |C_{2i}(A_1^i\ldots A_m^i A_{m+1}^{i-1}\ldots A_9^i)|, \quad t=9-m, \quad 0\leqq m\leqq 8,$

(III) $\quad |C_{3i+1}(A_1^{i-1}A_2^{i-1}A_3^{i-1}\ldots A_9^{i-1})|, \quad t=8,$

(IV) $\quad |C_{n+2i-1}(A^{n+i-1}A_1^{i-1}\ldots A_8^{i-1})|, \quad t=2n, \quad n\geqq 1,$

(V) $\quad |C_{n+3i-1}(A^{n+i-2}A_1^{i-1}\ldots A_8^{i-1})|, \quad t=2n+1, \quad n\geqq 1,$

(VI) $\quad |C_{n+3i-1}(A^{n+i-2}A_1^i A_2^{i-1}\ldots A_8^{i-1})|, \quad t=2n, \quad n>1,$

(VII) $\quad |C_{n+3i-1}(A^{n-i-2}A_1^i\ldots A_m^i\ldots A_{m+1}^{i-1}\ldots A_8^{i-1})|, \quad t=2n-m+1, \quad 8\geqq m\geqq 2, \quad n>1,$

(VIII) $\quad |C_{n-i-1\,(m+1)}(A^{n+(i-1)(m+1)}A_1^{2i-2}\ldots A_m^{2i-2}B_1^{i-1}\ldots B_8^{i-1})|, \quad n>1, \quad t=2n, \quad m>0.$

(IX) $\quad |C_{n-i-1\,(m+3)}(A^{n-1+i-1\,(m+1)}A_1^{2i-1}\ldots A_m^{2i-1}B_1^i\ldots B_7^i B_{7+1}^{i-1}\ldots B_8^{i-1})|,$
$\quad t=2n+1-m-q, \quad n\geqq 2, \quad m\geqq 1, \quad 0\leqq q\leqq 8.$

ou à un système obtenu en enrichissant de points simples la base de l'un de ces systèmes, ou à un système VIII *ou* IX *diminué de $1\leqq m_1\leqq m$ de ses droites fondamentales impropres $AA_1, \ldots AA_m$, et doté éventuellement de points-base simples supplémentaires.*

Les configurations de points-base des systèmes VII, VIII, IX *doivent satisfaire aux conditions stipulées aux n° 11 et 15* (1).

(1) F. Conforto, *loc. cit.*

24. Une autre méthode peut paraître plus propice à la détermination des systèmes d'argument t : celle qui prendrait comme point de départ les deux propriétés suivantes des systèmes de courbes :

I. Si $|c|$ est un système linéaire de courbes, $|c'|$ son adjoint impur, $|c^0|$ son adjoint pur (supposé existant), la partie fixe de $|c'|$ est formée de courbes fondamentales impropres monovalentes pour $|c|$ et $|c^0|$.

II. Si $|c^{0'}|$ existe, la partie fixe de $|c'|$ est comprise dans celle de $|c^{0'}|$.

Ces deux propriétés découlent simplement de théorèmes auxquels nous avons fait allusion (¹).

Mais cette méthode, outre qu'elle ne rend compte qu'à posteriori de la structure des systèmes $|c_i|$ d'argument t, entraîne de nombreuses et fastidieuses vérifications numériques pour le calcul des bases.

A titre exemplatif, esquissons une détermination des systèmes $|c_i|$ correspondant au cas $c_3 \equiv C_n(A^{n-1} A_1 A_2 \ldots A_m)$ ou, ainsi que nous l'écrirons pour plus de facilité, $c_1 \equiv C_n(A^{n-1}, mA)$, $m \leqq n-1$.

1° Si $c'_2 \equiv c_1$, on a évidemment $c_2 \equiv C_{n+3}(A^n, mA^2, qB)\, q \geqq 0$. Mais $r_2 = r_1 + t = (2n-m) + (2n-m+1) = 4n - 2m + 1$. De là la condition

$$\frac{(n+3)(n+6)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - 3m - q = 4n - 2m + 1,$$

d'où l'on tire, tout calcul effectué, $m + q = 8$ et

$$c_2 \equiv C_{n+3}[A^n, mA^2, (8-m)B].$$

Puisque $|c'_2|$ est dénué de partie fixe, il en est de même pour $|c'_3|$ (II), et l'on a

$$c_3 \equiv C_{n+6}[A^{n+1}, mA^3, (8-m)B^2, sB], \qquad s \geqq 0.$$

En exprimant que $r_3 = r_2 + t = 6n - 3m + 2$ à partir de l'ordre et de la base de $|c_3|$, on trouve que $s = 0$. En continuant de la sorte, on retrouve, par induction complète, le système (VII).

2° Si $c'_2 \not\equiv c_1$, $x' \equiv c'_2 - c_1$ ne peut être formé qu'à l'aide de tout ou partie des droites $AA_1, \ldots, AA_m$ qui sont les seules courbes fondamentales impropres de $|c_1|$, (1). Adoptant les notations du n° 13, nous sommes amenés à substituer l'écriture $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_q$ à l'écriture $A_1, \ldots, A_m$. Et nous aurons, moyennant $x' = AA_1 + \ldots + AA_m$,

$$c_1 \equiv C_n(A^{n-1}, mA, qB)$$
$$c_2 \equiv C_{n+m+3}(A^{n+m}, mA^3, qB^2, sB),\ s \geqq 0.$$

(¹) *Voir* aussi la Note relative au n° 15.

Exprimant que $|c_2|$ doit avoir la dimension $r_2 = r_1 + t = 4n - 2m - 2q + 1$, nous trouverons que

$$\frac{(n+m+3)(n+m+6)}{2} - \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} - 6m - 3q - s = 4n - 2m - 2q + 1,$$

ou

$$s + q = 8.$$

Passons à $|c_3|$. A cause de (II), la partie fixe de $|c_3'|$ est contenue dans celle de $|c_2'|$. On peut donc la supposer formée des droites $AA_1, \ldots, AA_{m_1}$, $m_1 \leqq m$. On a alors

$$c_3 \equiv C_{n+m+m_1+6}(A^{n-1-m+m_1}, m_1 A^3, (m-m) A^2, q B^3, (8-q) B^2, sB).$$

Exprimons que $r_3 = r_2 + t$. Il vient

$$\frac{(n+m+m_1+6)(n+m+m_1+9)}{2} - \frac{(n+1+m+m_1)(n+2+m+m_1)}{2}$$
$$- 15m - 10(m-m_1) - 6q - 3(8-q) - s$$
$$= 6n - 3m - 3q + 2 \quad \text{ou} \quad -m + m_1 - s = 0,$$

de qui exige, puisque $m - m_1 \geqq 0$, $m = m_1$ et $s = 0$. De là,

$$c_3 \equiv C_{n+2m+6}(A^{n+1-2m}, m A^3, q B^3, 8-q B^2).$$

De proche en proche, on arrive, de cette façon laborieuse, au système formel (IX).

II. — Les surfaces d'argument t.

25. On peut représenter les courbes c_i d'un système $|c_i|$ d'argument t par les sections hyperplanes d'une surface rationnelle convenable que nous dirons d'argument t. Avant de dire un mot de ces surfaces, montrons qu'un système $|c_i|$, $i \geqq 3$, est toujours simple.

Si $|c_i|$ est composé avec une involution J d'ordre m, la série caractéristique de la courbe générique de $|c_i|$ est composée avec une involution j du même ordre subordonnée à J. Cette involution j ne peut être une série linéaire g_2^1, sans quoi $|c_i|$ serait hyperelliptique, ce qui est impossible pour $i \geqq 3$ (n° 3).

Pour $t > 1$, $|c_i|$ est régulier, sa série caractéristique est une série linéaire $g_{n_i}^{p_i-1} = g_{2p_i-2+t}^{p_i-2+t}$. Si cette série est composée avec une involution d'ordre m, on a

$$2 \leqq m \leqq n_i : (r_i - 1) = (2p_i - 2 + t) : (p_i - 2 + t) = 1 + \frac{p_i}{p_i - 2 + t}.$$

Le dernier membre de cette suite de relations est inférieur à 2 pour $t \geqq 2$. Alors on a $2 \leqq m \leqq 1$, ce qui est absurde. Si $t = 2$, on a $2 \leqq m \leqq 2$ ou $m = 2$ et $g_{n_i}^{p_i-1} = g_{2p_i}^{p_i}$. Mais alors, sur la courbe Z image de l'involution j d'ordre 2,

l'image de la série $g^{r'}_{2p_i}$ est une série $g^{r''}_{p_i}$, Z est donc rationnelle et j est une série linéaire d'ordre 2, ce qui est inadmissible. Si $t=1$, $r_i=p_i$ et le degré de $|c_i|$ vaut $2p_i-2$. La série caractéristique de ce système est la série canonique qui, si elle est composée avec une involution, ne peut l'être qu'avec une série linéaire g^1_2, ce qui est encore impossible pour $i>2$.

Au total, la série caractéristique d'un système $|c_i|$, $i\geq 3$, est toujours simple.

26. Rappelons rapidement comment on peut construire les surfaces F images des systèmes $|c_i|$.

Entre les courbes de $|c_i|$ et les hyperplans d'un espace S à r_i dimensions, établissons une projectivité quelconque H. A un point A générique du plan ω de $|c_i|$, faisons correspondre, dans S, le sommet A" de la gerbe des hyperplans homologues, dans H, des courbes c_i passant par A. Lorsque A décrit ω, A" décrit la surface F qui, parce que $|c_i|$ est simple, est en correspondance birationnelle avec ω. La surface F est d'ordre $c_i.c_i$ et normale dans S.

Nous représenterons par c^0 la courbe de F qui correspond à la courbe c de ω.

27. Supposons d'abord que l'on a $t>2$. Plaçons-nous dans le cas le plus général. Alors le système $|c_i-c_{i-1}|=|x|$ se réduit à une courbe x unique (n° 5). Désignons par x^0 la courbe qui, sur F, correspond à la courbe x de ω.

On a $x.c_i=t$ et le système $x+|c_{i-1}|$ est de dimension $r_{i-1}=r_i-t$. Il s'ensuit que x^0 est d'ordre t et appartient à l'espace s_{t-1} à $t-1$ dimensions commun à tous les hyperplans découpant sur F les sections décomposées $x^0+c^0_{i-1}$.

On voit de suite que $|c^0_i-kx^0|$, $k\leq t-1$, est le système image des courbes $c_i-kx\equiv c_{i-k}$. Celles-ci forment un système de dimension r_i-kt. On conclut qu'il existe, passant par s_{t-1}, un espace s_{2t-1}, $s_{3t-1}\ldots s_{(i-1)t-1}$ à $2t-1$, $3t-1\ldots$ dimensions ayant avec F un contact biponctuel, triponctuel, $\ldots$, $(i-1)$-ponctuel en chaque point de x^0.

En somme : *Une surface* F *image projective d'un système* $|c_i|$ *général d'argument* $t\geq 3$ *est d'ordre* $2p_i-2+t$ *et normale dans un espace* S *à* p_i-1+t *dimensions; elle passe par une courbe elliptique* x^0 *d'ordre* t *normale dans un espace* s_{t-1} *à* $t-1$ *dimensions et possède un contact biponctuel, triponctuel,* $\ldots(i-1)$*-ponctuel avec un espace* s_{2t-1}, s_{3t-1}, $\ldots s_{(i-1)t-1}$ *passant par* s_{t-1}.

28. Il n'y a que deux types de systèmes $|c_i|$ d'argument $t=2$ existant d'ailleurs pour toute valeur de i, à savoir

$$|c_i| = |C_{3i}(A_1^i \ldots A_7^i A_8^{i-1} A_9^{i-1})|,$$
$$|c_i| = C_{3i-2}(A^i A_1^{i-1} \ldots A_5^{i-1}).$$

Ils sont de genre, degré et dimension respectifs (¹)

$$p_i = 2i-1, \quad r_i = 2i = p_i+1, \quad n_i = 4i-2 = 2p_i,$$
$$p_i = 2i-2, \quad r_i = 2i-1 = p_i+1, \quad n_i = 4i-4 = 2p_i.$$

Considérons l'une des surfaces F correspondantes. Elle est d'ordre $2p_i$ et normale dans un espace S_{p_i+1} à p_{i+1} dimensions.

Les courbes c_i découpent sur x (qui est unique pour $t=2$ (n° 7) une série linéaire g_2^1, car $c_i.x = t = 2$. Les courbes c_i passant par un point a_1 de x passent en conséquence par un second point a_2 de la courbe et le couple a_1, a_2 correspond à un même point A de F. Les courbes c_i passant par a_1, donc par a_2, forment un système de degré $2p_i-2$. Les sections hyperplanes c_i^0 qui leur correspondent sur F sont découpées par les hyperplans passant par A; elles n'ont, prises deux à deux, que $2p_i-2$ points communs en dehors de A. Ce dernier point est donc double pour la surface.

Parmi les ∞^{p_i} courbes c_i passant par a_1, et par suite par a_2, figurent les ∞^{p_i-1} courbes du système $x+|c_{i-1}|$ qui ne dépendent pas du choix de a_1 sur x. Ce système est découpé sur F par les hyperplans passant par une droite d contenant A. Lorsque a_i décrit x, A décrit d qui est une droite double pour F.

Aux ∞^{p_i-2} sections hyperplanes $2d+c_{i-1}^0$ passant par d correspondent les ∞^{p_i-2} courbes $x+c_{i-1}$ du plan w.

Aux deux branches d'une courbe c_i en les deux points a_1 et a_2 qu'elle possède sur x, correspondent deux branches de la courbe image c_i^0 issues de A.

29. Considérons les courbes du système à composante fixe $2x+|c_{i-2}|$. Ce système a la dimension p_i-4. Il a pour image le système des sections de F par les hyperplans d'une gerbe dont l'axe est un espace à trois dimensions s_3 contenant d. D'autre part, on a, si l'on désigne par $\bar{c}_i^0$ les sections hyperplanes passant par le point A de d,

$$c_i^0.\bar{c}_i^0 = 2p_i,\ \bar{c}_i^0.\bar{c}_i^0 = 2p_i-2, \qquad c_i^0.c_{i-2}^0 = c_i.c_{i-2} = c_i.(c_{i-1}-x) = 2p_i-4.$$

Les sections hyperplanes de F passant par s_3 n'ayant, d'après cela, que $2p_i-4$ intersections variables $\bar{c}_i^0$, celles-ci touchent s_3 par chacune de leurs branches en A et l'espace s_3 contient la courbe d_1 des points infiniment voisins de la droite double d sur F.

D'une façon générale, on trouve, en raisonnant de proche en proche, que les courbes des systèmes à courbe fixe $3x+|c_{i-3}|$, ..., $(i-1)x+|c_1|$ ont pour images les sections de F par des hyperplans passant respectivement par un espace s_5 à 5 dimensions contenant s_3, ..., par un espace s_{2i-3} à $2i-3$ dimensions contenant s_{2k-5}. On reconnaît aussi sans difficulté que s_{2k-1}, $k=2, 3, \ldots$ possède un contact k-ponctuel avec chacune des deux branches

(¹) On a $p_1=1$ ou 0, donc $p_i=1+(i-1)t=2i-1$ ou $p_i=0+(i-1)t=2i-2$ ou $t=2$.

de $\bar{c}_i^0$ en A, c'est-à-dire possède un contact d'ordre $k-1$ avec chacune des deux nappes de F passant par cette droite [il suffit de considérer que $\bar{c}_i^0 c_{i-k}^0 = c_i(c_i - kx) = 2p_i - 2k$].

30. On peut se demander si la courbe des points de F infiniment voisins de d dans le domaine du premier ordre de cette droite n'est pas une courbe double pour la surface. La réponse est négative.

Considérons une courbe c_i^0 générique, soit $\bar{c}_i^0$. Elle coupe d en un point A. Si ses deux tangentes en A coincidaient avec une droite unique b, le point A, infiniment voisin de A sur b, serait double pour $\bar{c}_i^0$ et F. Les courbes c_i^0 passant par A et A_1 formeraient un système linéaire de dimension $p_i - 1$ découpant sur $\bar{c}_i^0$ une série linéaire spéciale $g^{p_i-2}_{2p_i-3}$, ce qui n'est possible que si $|c_i^0|$ est hyperelliptique (2A constituant alors un groupe neutre d'ordre 2 pour la série canonique de $\bar{c}_i^0$). Comme nous savons que pareille chose est impossible pour $i \geq 3$, notre affirmation est justifiée.

31. En résumé :

Une surface F *image d'un système de courbes d'argument* $t=2$ *est à sections de genre* $p_i = 2i-1$ *ou* $2i-2$ *et normale dans un espace* S_i *à* p_i+1 *dimensions; elle est d'ordre* $2p_i$, *possède une droite double d par laquelle passent deux nappes distinctes de la surface; chacune de ces nappes possède un contact d'ordre* $1, 2, \ldots, i-2$ *avec un même espace* $s_3, s_5, \ldots, s_{2i-5}$ *à* $3, 5, \ldots, 2i-3$ *dimensions le long de cette droite. Les hyperplans passant par* s_{2i-3} *coupent encore* F *suivant un réseau de courbes elliptiques normales d'ordre* p_i+1 *ou un faisceau de courbes rationnelles normales d'ordre* p_i.

Les courbes elliptiques ou rationnelles en question sont les images des courbes c_1 de genre $p_1 = 1$ ou $p_1 = 0$ formant le dernier adjoint infini de $|c_i|$; leur ordre vaut

$$c_i^0 . c_1^0 = c_i[c_i - (i-1)x] = 2p_i - (i-1)t = p_i + p_1,$$

c'est-à-dire p_i+1 ou p_i suivant que $p_1 = 1$ ou $p_1 = 0$.

32. Il n'est qu'un système $|c_i|$ d'argument $t=1$: le système, (n° 18),

$$|c_i| = |C_{3i}(A_1^i, \ldots, A_8^i A_9^{i-1} B_i)|.$$

La surface F d'argument 1, image de ce système, se présente comme une généralisation de la surface $F_1^{(3)}$ de Noether, surface d'ordre 4 normale dans l'espace S et image du système

$$|c_3| = |C_9(A_1^3, \ldots, A_8^3 . A_9^2 B_3)| \ (^1).$$

(1) *Voir*, par exemple, F. Conforto, *loc. cit.*, p. 202-209.

Entre autres particularités projectives, la surface $F_1^{(3)}$ possède un point propre double uniplanaire A auquel est infiniment voisin un point A_1 double tacnodal dont le plan osculateur contient une droite de la surface passant par A.

Comme l'a fait G. Fano, on pourrait croire à priori que la surface F image du système c_i général possède une singularité formée de $i-2$ points doubles uniplanaires infiniment voisins successifs suivis d'un point double tacnodal. Il n'en est rien. Faedo a prouvé en effet, après Mme Defrise-Gussenhoven, que si l'on impose une singularité de ce type à une surface, le principe du déchargement joue et conduit, en fin de compte, à une singularité analogue à celle que possède la surface de Nœther.

33. Les propriétés projectives d'une surface F d'argument $t=1$ s'obtiennent aisément à partir des propriétés élémentaires des systèmes $|c_i|$ correspondants, à savoir : un système $|c_s|$, $s=1, 2, \ldots, 1$ est de genre et dimension i, de degré $2i-2$, et sa série caractéristique est la série canonique; il donne lieu aux relations simples

$$c_s.c_s=2s-2 \qquad \text{et} \qquad c_s.c_k=s+k-1, \qquad s\neq k.$$

Sans nous étendre sur cette question déjà traitée par Fano et Faedo, nous nous contenterons d'énoncer les propriétés les plus remarquables de F.

La surface F *d'argument* $t=1$ *est normale dans un espace* S_i *à* i *dimensions et à sections hyperplanes canoniques.*

Elle passe par une droite simple d et possède un contact d'ordre $1, 2, \ldots, i-2$ *avec un espace* $s_2, s_3, \ldots, s_{i-1}$ *le long de cette droite.*

La droite d porte un point A *double uniplanaire pour la surface, les espaces linéaires à* $2, 3, \ldots, i-1$ *dimensions osculateurs à* F *en* A *sont précisément* $s_2, s_3, \ldots, s_{i-1}$. *Le point* A_1 *infiniment voisin de* A *sur d est double tacnodal pour* F *et de plan osculateur* s_2.

SUR LES SUITES

DE

POLYNOMES OU DE FONCTIONS ENTIÈRES

A ZÉROS RÉELS

PAR M. H. DELANGE.

INTRODUCTION. — Étant donnée une suite de polynomes à une variable

$$P_1(z), \quad P_2(z), \quad \ldots \quad P_n(z), \quad \ldots$$

nous avons étudié dans un travail précédent (¹) la relation entre le comportement de la suite des fonctions $\log P_n(z)$ et la distribution asymptotique des zéros de $P_n(z)$ pour n très grand.

A tout polynome $P(z)$ nous associons une fonction additive d'ensemble $\nu(e)$ définie pour les ensembles de points du plan complexe de la façon suivante : la valeur de $\nu(e)$ est le nombre de zéros de $P_n(z)$ appartenant à l'ensemble e, chacun étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. A la suite des polynomes $P_n(z)$ correspond ainsi une suite de fonctions d'ensemble $\nu_n(e)$ dont le comportement nous sert à caractériser la distribution asymptotique des zéros de $P_n(z)$. Un des résultats obtenus est le suivant :

$\varphi(n)$ étant une fonction positive donnée de l'entier n, si l'on suppose que l'ensemble E des points qui sont limites de zéros de $P_n(z)$ est de mesure superficielle nulle et *que le rapport du degré de* $P_n(z)$ *à* $\varphi(n)$ *reste borné*, pour qu'il existe des coefficients c_n tels que la suite des fonctions $\frac{1}{\varphi(n)} \log c_n P_n(z)$, soit convergente en dehors de E, il faut et il suffit que la suite des fonctions d'ensemble $\frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(e)$ soit convergente (p. 271).

(¹) *Ann. de l'École Norm. Sup.*, 3ᵉ série, t. LVI, 1939, pp. 173-256.

La condition relative à l'ensemble E est satisfaite en particulier dans le cas où les polynomes $P_n(z)$ ont leurs zéros réels. Nous avons indiqué dans une Note postérieure (1) que dans cette dernière hypothèse on peut encore, *en ne supposant plus rien sur la croissance du degré de* $P_n(z)$, obtenir, relativement à la distribution des zéros, des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait la même propriété. Un cas particulier intéressant est celui où les zéros de $P_n(z)$ sont supposés non seulement réels mais bornés supérieurement, ou inférieurement, par un nombre fixe.

C'est l'étude de ce cas particulier que nous nous proposons de développer ici, avec son application à la détermination de la distribution asymptotique des zéros des polynomes définis par certaines relations de récurrence de Poincaré. Pour le cas général, nous nous bornerons à donner les énoncés sans démonstration.

Nous verrons aussi que, comme nous l'avons indiqué également dans une autre Note (2), la même méthode permet d'étudier les suites de fonctions entières de même genre fini ayant tous leurs zéros sur une même demi-droite issue de l'origine, par exemple tous réels et négatifs.

Nous montrerons encore le profit que l'on peut tirer des résultats ainsi obtenus (du moins dans les cas suffisamment réguliers) pour l'étude d'une fonction entière de genre fini ayant tous ses zéros alignés sur une demi-droite Ou issue de l'origine [ou approximativement alignés sur cette demi-droite (3)] du point de vue de la relation entre la distribution de ces zéros et la croissance du module de la fonction sur la demi-droite opposée à Ou, ou sur une demi-droite faisant un angle convenable avec celle-ci.

I. — Préliminaires.

1.1. Au lieu de raisonner sur des fonctions additives d'ensemble, nous utiliserons ici de préférence des fonctions de points associés à celles-ci. Nous aurons donc à considérer des fonctions croissantes (4) d'une variable réelle, définies dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Nous regarderons deux telles fonctions comme équivalentes si elles ont les mêmes points de discontinuité et prennent la même valeur en tous leurs points de continuité.

Nous conviendrons de dire qu'une suite de telles fonctions croissantes ψ_n *converge vaguement vers une autre fonction croissante* ψ *si* $\psi_n(t)$ *tend vers* $\psi(t)$ *pour toutes*

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 217, 1943, p. 191.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, 217, 1943, p. 225.

(3) Plus précisément l'hypothèse à faire est la suivante : les zéros étant rangés par ordre de module croissant en la suite $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, le rayon vecteur Oz_n a pour limite Ou lorsque n tend vers l'infini. La fonction entière en question est alors dite « orientée ».

(4) Nous disons partout « fonction croissante » pour « fonction non décroissante ».

les valeurs de t pour lesquelles ψ *est continue.* La suite ψ_n converge alors aussi vaguement vers toute fonction équivalente à ψ et toute fonction vers laquelle elle converge vaguement est équivalente à ψ.

La convergence vague se confond avec la convergence ordinaire si la fonction limite est continue quel que soit t. Si une famille de fonctions croissantes $\psi(t)$ est telle que, quel que soit l'intervalle fini $[a, b]$, ces fonctions soient bornées dans leur ensemble sur cet intervalle, on sait que de toute suite de fonctions prises dans cette famille on peut extraire une suite vaguement convergente (1).

Cette propriété appartient en particulier à toute famille de fonctions croissantes nulles pour t inférieur à un nombre fixe a et satisfaisant pour $t \geq a$ à une même inégalité de la forme

$$\psi(t) \leq \Psi(t),$$

où Ψ est une fonction donnée.

Il en est de même pour une famille de fonctions croissantes nulles pour t supérieur à un nombre fixe a et satisfaisant pour $t \leq a$ à une même inégalité de la forme

$$\psi(t) \geq \Psi(t).$$

1.2. On connaît la définition de l'intégrale de Stieltjes $\int_a^b f(t)\,d\psi(t)$ où ψ est une fonction croissante définie dans l'intervalle fermé $[a, b]$ et f une fonction réelle ou complexe continue dans cet intervalle. On connaît également l'extension de cette définition au cas d'un intervalle infini, ou au cas où la fonction f devient infinie à l'une des extrémités de l'intervalle.

ψ étant supposée définie dans $[a, b]$ et f continue dans cet intervalle, l'intégrale $\int_{a-0}^{b} f(t)\,d\psi(t)$ peut être définie comme limite pour h tendant vers zéro par valeurs positives de $\int_{a-h}^{b} f(t)\,d\psi(t)$. Elle est égale à

$$\int_a^b f(t)\,d\psi_1(t),$$

$\psi_1(t)$ étant égal à $\psi(t)$ pour $a < t \leq b$ et à $\psi(a+0)$ pour $t = a$.

De même, f et ψ étant supposées définies dans un intervalle $[a', b]$, avec $a' < a$, et f étant supposée continue dans cet intervalle, l'intégrale $\int_{a-0}^{b} f(t)\,d\psi(t)$ peut être définie comme limite pour h tendant vers zéro par valeurs positives de $\int_{a-h}^{b} f(t)\,d\psi(t)$. Elle est égale à

$$\int_a^b f(t)\,d\psi_2(t),$$

$\psi_2(t)$ étant égale à $\psi(t)$ pour $a < t \leq b$ et à $\psi(a-0)$ pour $t = a$.

(1) On peut même en extraire une suite convergente au sens ordinaire.

Les intégrales

$$\int_{a-0}^{+\infty} f(t)\,d\psi(t) \quad \text{et} \quad \int_{a-0}^{+\infty} f(t)\,d\psi(t)$$

seront définies comme limites pour L tendant vers $+\infty$ de

$$\int_{a-0}^{L} f(t)\,d\psi(t) \quad \text{et} \quad \int_{a-0}^{L} f(t)\,d\psi(t).$$

On définirait de même les intégrales dans lesquelles la borne supérieure d'intégration serait $b-0$ ou $b+0$.

f et ψ étant définies dans l'intervalle fermé $[a, b]$ et f ayant une dérivée continue dans cet intervalle, on sait que l'on a la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(t)\,d\psi(t) = f(b)\psi(b) - f(a)\psi(a) - \int_a^b \psi(t) f'(t)\,dt.$$

Rappelons enfin que, si $f(t)$ est réelle et mesurable B, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,d\psi(t)$ peut être définie de façon analogue à l'intégrale de Lebesgue ordinaire $\int_a^b f(t)\,dt$ en faisant jouer le rôle que joue la mesure dans celle-ci à la fonction additive d'ensemble associée à la fonction croissante égale à $\psi(t)$ pour $a < t < b$, à $\psi(a)$ pour $t \leq a$, et à $\psi(b)$ pour $t \geq b$.

L'intégrale ainsi définie possède les mêmes propriétés que l'intégrale de Lebesgue ordinaire, et si f est continue elle coïncide avec celle définie de la façon mentionnée précédemment.

1.3. Si une suite de fonctions croissantes ψ_n converge vaguement vers une fonction ψ continue pour $t = a$ et pour $t = b$, on sait que, f étan une fonction réelle ou complexe continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,d\psi_n(t)$ tend pour n infini vers $\int_a^b f(t)\,d\psi(t)$.

Si la fonction f dépend de paramètres et est uniformément continue par rapport à t lorsque ces paramètres décrivent un certain champ, la convergence de l'intégrale précédente vers sa limite est uniforme dans ce champ.

1.4. Nous ferons aussi usage du lemme suivant :

Soit une suite de fonctions croissantes ψ_n qui convergent vaguement vers une fonction limite ψ, continue pour $t = a$, et soit $f(t)$ une fonction réelle continue pour $t \geq a$ et positive pour t assez grand.

Supposons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,d\psi_n(t)$ soit convergente quel que soit n et inférieure à un nombre fixe M. *Alors :*

1° *L'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\,d\psi(t)$ *est convergente et au plus égale à* M. (Il en résulte que, si g est une fonction réelle ou complexe continue pour $t \geq a$ et satisfaisant pour t infini à $g(t) = O[f(t)]$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,d\psi(t)$ est absolument convergente.)

Dans le cas particulier où $\int_a^{+\infty} f(t)\,d\psi_n(t)$ *a une limite finie* λ, *on a*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,d\psi(t) \leq \lambda.$$

2° *Si l'on a pour t infini* $g(t) = o[f(t)]$, *l'intégrale* $\int_a^{+\infty} g(t)\,d\psi_n(t)$ *tend pour n infini vers* $\int_a^{+\infty} g(t)\,d\psi(t)$.

On aurait un énoncé analogue en considérant des intégrales prises de $-\infty$ à a.

Appelons b un nombre assez grand pour que $f(t) > 0$ pour $t > b$ et tel que ψ soit continue pour $t = b$.

a. Pour $l \geq b$, l'intégrale $\int_a^{l} f(t)\,d\psi(t)$ est une fonction croissante de l.

Quel que soit $l \geq b$, on peut prendre un nombre $l' > l$ et tel que ψ soit continue pour $t = l'$. On a alors

$$\int_a^{l} f(t)\,d\psi(t) \leq \int_a^{l'} f(t)\,d\psi(t).$$

Mais le second membre est la limite pour n infini de $\int_a^{l'} f(t)\,d\psi_n(t)$ qui est $\leq$ M. Donc

$$\int_a^{l} f(t)\,d\psi(t) \leq \mathrm{M}.$$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,d\psi(t)$ est donc convergente et $\leq$ M.

Si de plus $\int_a^{+\infty} f(t)\,d\psi_n(t)$ a une limite λ, *quel que soit* ε *positif*, on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\int_a^{l} f(t)\,d\psi_n(t) < \lambda + \varepsilon,$$

d'où l'on conclut que

$$\int_a^{l} f(t)\,d\psi(t) \leq \lambda + \varepsilon.$$

Pour n infini, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,d\psi_n(t)$ tend vers $\int_a^b f(t)\,d\psi(t)$; par suite elle reste, quel que soit n, inférieure en module à un nombre fixe M'.

L'intégrale

$$\int_b^{+\infty} f(t)\,d\psi_n(t) = \int_a^{+\infty} f(t)\,d\psi_n(t) - \int_a^b f(t)\,d\psi_n(t),$$

qui est d'ailleurs positive, reste donc inférieure à $M + M'$.

A étant un nombre réel supposé supérieur à b, écrivons

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,d\psi_n(t) - \int_a^{+\infty} g(t)\,d\psi(t) = U - V - W,$$

avec

$$U = \int_a^A g(t)\,d\psi_n(t) - \int_a^A g(t)\,d\psi(t),$$

$$V = \int_A^{+\infty} g(t)\,d\psi_n(t),$$

$$W = -\int_A^{+\infty} g(t)\,d\psi(t).$$

Si γ_1 est la borne supérieure de $\left|\frac{g(t)}{f(t)}\right|$ pour $t \geq A$, on voit de suite que l'on a

$$|V| \leq (M - M')\gamma_1.$$

Étant donné ε positif quelconque, on peut choisir A de manière que ψ soit continue pour $t = A$ et assez grand pour que l'on ait

$$|W| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 \leq \frac{\varepsilon}{3(M + M')}, \qquad \text{d'où} \quad |V| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

A étant ainsi fixé, U tend vers zéro pour n infini, et par suite on peut trouver n_0 tel que $n \geq n_0$ entraîne $|U| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Alors $n \geq n_0$ entraîne $|U + V + W| \leq \varepsilon$.

1.4.1. Notons que, *si $g(t)$ dépend d'un certain nombre de paramètres, l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,d\psi_n(t)$ converge uniformément vers $\int_a^{+\infty} g(t)\,d\psi(t)$ lorsque ces paramètres décrivent un certain champ, pourvu que l'on suppose :*

1° *que le rapport $\frac{g(t)}{f(t)}$ tend vers zéro uniformément lorsque t tend vers l'infini;*

2° *que dans tout intervalle fini la continuité de $g(t)$ par rapport à t est uniforme par rapport aux paramètres.*

On voit en effet que, dans le raisonnement précédent, on peut choisir A, puis trouver n_0, de façon à satisfaire aux conditions indiquées indépendamment des paramètres.

1.4.2. On établirait exactement de la même façon l'énoncé suivant tout à fait analogue au précédent :

Soit une suite de fonctions croissantes ψ_n qui convergent vaguement vers une fonction limite ψ continue pour $t=b$ et soit f une fonction réelle continue pour $a<t\leqq b$ et tendant vers $+\infty$ lorsque t tend vers a par valeurs supérieures.

Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,d\psi_n(t)$ soit convergente quel que soit n et inférieure à un nombre fixe M. *Alors :*

1° *L'intégrale $\int_a^b f(t)\,d\psi(t)$ est convergente et $\leqq$* M.

Dans le cas particulier où $\int_a^b f(t)\,d\psi_n(t)$ a une limite finie λ, on a

$$\int_a^b f(t)\,d\psi(t)\leqq\lambda.$$

2° *Si g est une fonction réelle ou complexe continue pour $a<t\leqq b$ et satisfaisant pour t voisin de a à $g(t)=o[f(t)]$, l'intégrale $\int_a^b g(t)\,d\psi_n(t)$ tend pour n infini vers $\int_a^b g(t)\,d\psi(t)$.*

Si $g(t)$ dépend d'un certain nombre de paramètres, la convergence de cette intégrale vers sa limite est uniforme lorsque ces paramètres décrivent un certain champ, pourvu que :

1° *Le rapport $\frac{g(t)}{f(t)}$ tende vers zéro uniformément lorsque t tend vers a ;*

2° *Dans tout intervalle tel que $[a+h,\ b]$, où $h>0$, la continuité de $g(t)$ par rapport à t soit uniforme par rapport aux paramètres.*

II. - Suites de polynomes à zéros réels et bornés supérieurement.

2.1. Soit $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_n(z)$, ... une suite de polynomes ayant tous leurs zéros réels et au plus égaux à un nombre fixe a.

Nous désignerons par $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, ..., $\alpha_p^{(n)}$, ..., ou plus simplement par α_1, α_2, ..., α_p, ..., les zéros de $P_n(z)$ supposés écrits chacun autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité et rangés par exemple par ordre de grandeur décroissante.

D'autre part, à chaque polynome $P_n(z)$ nous ferons correspondre une fonction croissante $\nu_n(t)$ définie de la façon suivante :

— $\nu_n(t)$ sera le nombre de zéros de $P_n(z)$ au moins égaux à t | ainsi $\nu_n(t)$ sera nulle pour $t>a$ |.

$\varphi(n)$ sera une fonction positive quelconque de l'entier n. On posera

$$\frac{1}{\varphi(n)}\nu_n(t)=\mu_n(t).$$

Si $f(t)$ est une fonction réelle ou complexe continue pour $t\leq a'$, avec $a'>a$, on aura

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum f(\alpha_p)=\int_{-\infty}^{a'} f(t)\,d\mu_n(t)=\int_{-\infty}^{a+0} f(t)\,d\mu_n(t).$$

Le résultat fondamental que nous nous proposons d'établir est le suivant :

Si, les coefficients c_n étant convenablement choisis, on sait que l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_n P_n(z)|$ converge vers une fonction limite $U(z)$ soit dans un domaine, si petit soit-il, soit simplement sur un segment de l'axe réel situé à droite du point a, on peut affirmer que :

1° *La suite des fonctions croissantes μ_n est vaguement convergente vers une fonction limite μ;*

2° *A étant un nombre réel quelconque supérieur à a, l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_p}$ tend pour n infini vers une limite finie h.*

La connaissance de $U(z)$ détermine la fonction μ et la constante h (1).

Nous établirons d'abord quelques résultats préliminaires.

2.2. Théorème I. — *Si :* 1° *la suite des fonctions croissantes μ_n est vaguement convergente avec une fonction limite μ;*

2° *A étant un nombre réel supérieur à a, l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_p}$ tend pour n infini vers une limite finie h;*

Alors, dans le plan coupé suivant le segment $[-\infty, a]$ de l'axe réel, la détermination réelle pour z réel supérieur à a de la fonction $\frac{1}{\varphi(n)}\log\frac{P_n(z)}{P_n(A)}$ converge vers

$$\int_{-\infty}^{a+0}\log\frac{z-t}{A-t}\,d\mu(t)+\left[h-\int_{-\infty}^{a+0}\frac{d\mu(t)}{A-t}\right]\cdot(z-A),$$

où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

La convergence est uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive du segment $[-\infty, a]$.

---

(1) Compte tenu du fait que nous regardons comme équivalentes deux fonctions croissantes qui ont les mêmes points de discontinuité et sont égales en tous les autres points.

En prenant les parties réelles, on voit que la fonction $\frac{1}{\varphi(n)}\log\left|\frac{P_n(z)}{P_n(A)}\right|$ *converge vers*

$$\int_{-\infty}^{a+0}\log\left|\frac{z-t}{A-t}\right|d\mu(t)+\left[h-\int_{-\infty}^{a+0}\frac{d\mu(t)}{A-t}\right].\mathcal{R}(z-A).$$

a. a' étant un nombre réel quelconque compris entre *a* et A, on a

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_p}=\int_{-\infty}^{a'}\frac{d\mu_n(t)}{A-t}.$$

De ce que cette expression tend vers h pour n infini, il résulte par la première partie du lemme du paragraphe 1.4 que l'intégrale $\int_{-\infty}^{a'}\frac{d\mu(t)}{A-t}$ est convergente et $\leq h$. Cette intégrale est d'ailleurs la même que $\int_{-\infty}^{a-0}\frac{d\mu(t)}{A-t}$, puisque $\mu(t)$ est nulle pour $t>a$.

b. On a

$$\frac{1}{\varphi(n)}\log\frac{P_n(z)}{P_n(A)}=\frac{1}{\varphi(n)}\sum\log\frac{z-\alpha_p}{A-\alpha_p}$$
$$=\frac{1}{\varphi(n)}\sum\left\{\log\frac{z-\alpha_p}{A-\alpha_p}-\frac{z-A}{A-\alpha_p}\right\}+(z-A)\cdot\frac{1}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_p},$$

chacun des logarithmes étant pris avec la détermination réelle pour z réel $>a$.

Supposons z variable dans un domaine D borné et situé à distance positive du segment $]-\infty, a]$, et supposons que l'on a pris a' *à l'extérieur* de D.

On peut écrire

$$\frac{1}{\varphi(n)}\log\frac{P_n(z)}{P_n(A)}=\int_{-\infty}^{a'}\left\{\log\frac{z-t}{A-t}-\frac{z-A}{A-t}\right\}d\mu_n(t)+(z-A)\cdot\frac{1}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_p},$$

le logarithme étant pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Il est manifeste que le second terme tend pour n infini vers $h(z-A)$, la convergence étant uniforme dans D.

Le premier est de la forme $\int_{-\infty}^{a'}g(t)\,d\mu_n(t)$.

Définissons dans le cercle $|u|<1$ une fonction $\varphi(u)$ par

$$\varphi(u)=\log(1+u)-u,$$

où l'on prendra la détermination du logarithme nulle pour $u=0$. On voit de suite que, si l'on appelle R la borne supérieure de $|z-A|$ lorsque z parcourt D, on pourra écrire pour $t<A-R$, de sorte que $\left|\frac{z-A}{A-t}\right|<1$.

$$g(t)=\varphi\left(\frac{z-A}{A-t}\right).$$

Or, si l'on suppose par exemple $|u| \leq \frac{1}{2}$, le rapport $\frac{\varphi(u)}{u^2}$, qui est une fonction continue dans ce cercle, reste en module au plus égal à un certain nombre positif M. Donc pour $t \leq A - 2R$ on aura

$$|g(t)| \leq M \left(\frac{z-A}{A-t}\right)^2 \leq \frac{MR^2}{(A-t)^2}.$$

Donc le produit $(A-t)g(t)$ tend uniformément vers zéro pour t infini lorsque z parcourt D.

D'autre part, l'expression $g(t) = \log\frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t}$ est une fonction continue des deux variables z et t lorsque la variable réelle t parcourt l'intervalle $]-\infty, a']$, z parcourant le domaine D et sa frontière. Donc, dans tout intervalle fini tel que $[L, a']$, elle est uniformément continue par rapport à t lorsque z parcourt D.

Il résulte de là, en vertu du lemme des paragraphes 1.4 et 1.4.1, que, pour n infini, l'intégrale $\int_{-\infty}^{a'} \left\{\log\frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t}\right\} d\mu_n(t)$ converge uniformément dans D vers

$$\int_{-\infty}^{a'} \left\{\log\frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t}\right\} d\mu(t) = \int_{-\infty}^{a+0} \left\{\log\frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t}\right\} d\mu(t),$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{a+0} \log\frac{z-t}{A-t}\, d\mu(t) - (z-A)\int_{-\infty}^{a-0} \frac{d\mu(t)}{A-t}$$

puisque chacune des deux intégrales est convergente.

On a donc bien le résultat annoncé.

2.3. a et A étant deux nombres réels fixés, avec $A > a$, étant données une fonction croissante quelconque μ, nulle pour $t > a$ et telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{a-0} \frac{d\mu(t)}{A-t}$ soit convergente, et une constante réelle quelconque h, nous poserons

$$\Psi_{\mu,h}(z) = \int_{-\infty}^{a+0} \log\frac{z-t}{A-t}\, d\mu(t) + \left[h - \int_{-\infty}^{a+0} \frac{d\mu(t)}{A-t}\right] \cdot (z-A),$$

où le logarithme sera supposé pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Nous désignerons par $U_{\mu,h}(z)$ et $V_{\mu,h}(z)$ la partie réelle et le coefficient de i dans $\Psi_{\mu,h}(z)$.

Ceci définit les fonctions $\Psi_{\mu,h}(z)$, $U_{\mu,h}(z)$, et $V_{\mu,h}(z)$ dans le domaine H constitué par le plan dont on a enlevé le segment $]-\infty, a]$ de l'axe réel.

On voit de suite que $\Psi_{\mu,h}(z)$ est une fonction holomorphe dans Π, de sorte que $U_{\mu,h}(z)$ et $V_{\mu,h}(z)$ sont des fonctions harmoniques dans le même domaine.

La connaissance, soit sur un segment $[\alpha, \beta]$ *de l'axe réel à droite du point a, soit dans un domaine* D *contenu dans* Π, *d'une fonction réelle* $U(z)$ *satisfaisant sur ce segment, ou dans ce domaine, à une égalité de la forme*

$$U(z) = U_{\mu,h}(z) + \text{const.},$$

détermine complètement la fonction $V_{\mu,h}(z)$ *dans tout le domaine* Π.

En effet, si l'on a sur le segment $[\alpha, \beta]$

$$U(z) = U_{\mu,h}(z) + K,$$

la fonction

$$\Psi_{\mu,h}(z) + K = U_{\mu,h}(z) + K + iV_{\mu,h}(z),$$

holomorphe dans Π, coïncide avec $U(z)$ sur $[\alpha, \beta]$.

Donc, si l'on connaît $U(z)$ *sur* $[\alpha, \beta]$, $V_{\mu,h}(z)$ *est déterminée comme étant le coefficient de i dans la fonction* $\Psi(z)$ *holomorphe dans* Π *et qui coïncide avec* $U(z)$ *sur* $[\alpha, \beta]$.

Si l'on a dans le domaine D contenu dans Π et sans point commun avec l'axe réel (¹)

$$U(z) = U_{\mu,h}(z) + K,$$

la fonction $U(z)$ est harmonique dans D et prolongeable analytiquement dans tout le domaine Π, son prolongement étant $U_{\mu,h}(z) + K$. La fonction $\Psi_{\mu,h}(z) + K$, holomorphe dans Π, coïncide avec ce prolongement pour z réel supérieur à a.

Donc, si l'on connaît $U(z)$ *dans* D, *la fonction* $V_{\mu,h}(z)$ *est déterminée comme étant le coefficient de i dans la fonction* $\Psi(z)$ *holomorphe dans* Π *et qui coïncide pour z réel supérieur à a avec le prolongement analytique de la fonction harmonique* $U(z)$.

2.4. Nous allons voir maintenant que la connaissance de $V_{\mu,h}(z)$ dans le domaine Π détermine la fonction μ et la constante h (²).

Cela résulte du théorème suivant :

THÉORÈME II. — *L'expression* $-\frac{1}{\pi}\lim_{y \to +0} V_{\mu,h}(t+iy)$ *définit une fonction croissante équivalente à* μ.

(¹) Si D rencontrait l'axe réel, on serait ramené au cas précédent.

(²) *Cf.* note (¹), p. 122.

En effet, nous allons montrer que, si l'on pose $z = x + iy$, lorsque, x restant fixe et égal à x_0, y tend vers zéro par valeurs positives, $V_{\mu,h}(z)$ tend vers $-\pi\frac{\mu(x_0-0)+\mu(x_0+0)}{2}$.

Si $x_0 > a$, ceci résulte de la continuité de $V_{\mu,h}(z)$ pour $z = x_0$.

Il suffit donc de considérer le cas où $x_0 \leq a$.

On a, pour $y \neq 0$,

$$V_{\mu,h}(z) = \int_{-\infty}^{a+0} \operatorname{Arg}\frac{z-t}{A-t}\,d\mu(t) + \left[h - \int_{-\infty}^{a+0}\frac{d\mu(t)}{A-t}\right]y,$$

l'argument qui figure dans la première intégrale étant pris avec la détermination comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Le second terme tend vers zéro avec y.

Si l'on désigne par a' un nombre réel compris entre a et A et par L un nombre réel inférieur à x_0, le premier terme peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{L} \operatorname{Arg}\frac{z-t}{A-t}\,d\mu(t) + \int_{L}^{a'} \operatorname{Arg}\frac{z-t}{A-t}\,d\mu(t).$$

La première intégrale représente une fonction de z continue à l'extérieur du segment $]-\infty, L]$ de l'axe réel et nulle pour $z = x_0$; elle tendra donc ici vers zéro.

Quant à la seconde, on peut lui appliquer le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe $\int$: x restant égal à x_0, quel que soit y différent de zéro, la fonction $\operatorname{Arg}\frac{z-t}{A-t}$ reste en module inférieure à π. Si y tend vers zéro par valeurs positives, elle tend vers zéro pour $t < x_0$, vers π pour $x_0 < t \leq a'$ et vers $\frac{\pi}{2}$ pour $t = x_0$. Donc, si l'on appelle $\varphi(t)$ la fonction prenant ces valeurs, l'intégrale $\int_L^{a'} \operatorname{Arg}\frac{z-t}{A-t}\,d\mu(t)$ tend vers $\int_L^{a'} \varphi(t)\,d\mu(t)$, laquelle est égale à

$$\pi[\mu(a') - \mu(x_0+0)] + \frac{\pi}{2}[\mu(x_0+0) - \mu(x_0-0)] = -\frac{\pi}{2}[\mu(x_0+0) + \mu(x_0-0)].$$

La fonction μ étant ainsi déterminée par la connaissance de la fonction $V_{\mu,h}(z)$, l'égalité écrite plus haut donnant l'expression de cette dernière fonction déterminera ensuite la constante h.

2.5. Notons qu'il résulte de ce qui précède que, *si l'on a dans un domaine* D *ou sur un segment de l'axe réel situé à droite du point a*

$$U_{\mu_1,h_1}(z) - U_{\mu_2,h_2}(z) = \text{const.},$$

les fonctions μ_1 *et* μ_2 *sont équivalentes et* $h_1 = h_2$.

En particulier, $U_{\mu,h}(z)$ *ne peut être constante dans un domaine* D *ou sur un segment de l'axe réel à droite de a sans que* $\mu(t)=0$ et $h=0$.

2.6. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat annoncé au début du chapitre.

Revenons donc à la suite des polynomes $P_n(z)$ ayant tous leurs zéros réels et au plus égaux à a, et supposons que, soit dans un domaine D, soit sur un segment $[\alpha, \beta]$ de l'axe réel situé à droite du point a, l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_n P_n(z)|$ converge vers une fonction limite $U(z)$.

Appelons A un nombre réel quelconque supérieur à a.

a. Nous allons montrer d'abord que, de toute suite d'entiers croissants $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, on peut en extraire une autre, soit $n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots$, telle que :

1° la suite des fonctions $\mu_{n'_k}$ soit vaguement convergente vers une fonction limite μ;

2° l'expression $\frac{1}{\varphi(n'_k)}\sum\frac{1}{A-\alpha_\rho^{(n'_k)}}$ ait une limite finie h,

et que l'on aura alors dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U_{\mu,h}(z)=U(z)+\text{const.}$$

Posons

$$\rho(n)=\sum\frac{1}{A-\alpha_\rho^{(n)}} \qquad \text{et} \qquad \psi_n(t)=\frac{1}{\rho(n)}\nu_n(t).$$

On a

$$\frac{1}{\rho(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_\rho^{(n)}}=1.$$

Or on voit immédiatement que, quel que soit $t<A$, cette expression est au moins égale à $-\frac{\psi_n(t)}{A-t}$.

Donc, pour $t\leqq a$, on a

$$\psi_n(t)\geqq t-A.$$

Par conséquent, de la suite des fonctions croissantes ψ_{n_k}, nulles pour $t>a$, on peut extraire une suite vaguement convergente $\psi_{n'_k}$. Appelons ψ la fonction limite.

Comme d'autre part $\frac{1}{\rho(n'_k)}\sum\frac{1}{A-\alpha_\rho^{(n'_k)}}$ tend vers 1, il résulte du théorème I que pour k infini l'expression $\frac{1}{\rho(n'_k)}\log\left|\frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(A)}\right|$ converge à l'extérieur du segment $]-\infty, a]$ de l'axe réel vers $U_{\psi,1}(z)$, fonction qui n'est pas constante dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$, d'après la remarque de la fin du paragraphe précédent.

En particulier, z_0 étant un point quelconque extérieur au segment $]-\infty, a]$ de l'axe réel, $\frac{1}{\rho(n'_k)}\log\left|\frac{P_{n'_k}(z_0)}{P_{n'_k}(A)}\right|$ tend vers $U_{\psi,1}(z_0)$.

Par différence on voit que $\frac{1}{\rho(n'_k)}\log\left|\frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(z_0)}\right|$ tend vers $U_{\psi,1}(z)-U_{\psi,1}(z_0)$.

De même, en supposant que z_0 appartient à D, ou à $[\alpha, \beta]$, on voit que dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$, $\frac{1}{\varphi(n)}\log\left|\frac{P_n(z)}{P_n(z_0)}\right|$ tend pour n infini vers $U(z)-U(z_0)$.

En particulier, si l'on prend pour z_1 un point de D, ou de $[\alpha, \beta]$, tel que $U_{\psi,1}(z_1)\neq U_{\psi,1}(z_0)$, l'expression $\frac{1}{\rho(n'_k)}\log\left|\frac{P_{n'_k}(z_1)}{P_{n'_k}(z_0)}\right|$ tendra pour k infini vers $U_{\psi,1}(z_1)-U_{\psi,1}(z_0)$, tandis que $\frac{1}{\varphi(n'_k)}\log\left|\frac{P_{n'_k}(z_1)}{P_{n'_k}(z_0)}\right|$ tendra vers $U(z_1)-U(z_0)$, et l'on verra par division que $\frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)}$ tend vers $\frac{U(z_1)-U(z_0)}{U_{\psi,1}(z_1)-U_{\psi,1}(z_0)}=h$.

L'expression $\frac{1}{\varphi(n'_k)}\sum\frac{1}{A-\alpha_\rho^{(n'_k)}}$, *qui est égale à* $\frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)}$, *tend donc vers* h.

D'autre part, comme $\mu_{n'_k}(t)=\frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)}\cdot\psi_{n'_k}(t)$, *la suite des fonctions croissante* $\mu_{n'_k}$ *est vaguement convergente vers la fonction* μ *définie par* $\mu(t)=h\psi(t)$.

Enfin l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n'_k)}\log\left|\frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(z_0)}\right|=\frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)}\cdot\frac{1}{\rho(n'_k)}\log\left|\frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(z_0)}\right|$$

converge en dehors du segment $[-\infty, a]$ de l'axe réel vers

$$h.[U_{\psi,1}(z)-U_{\psi,1}(z_0)]=U_{\mu,h}(z)-U_{\mu,h}(z_0).$$

On en déduit que dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$, l'on a

$$U_{\mu,h}(z)-U_{\mu,h}(z_0)=U(z)-U(z_0),$$

ou

$$U_{\mu,h}(z)=U(z)+[U_{\mu,h}(z_0)-U(z_0)]=U(z)+\text{const.}$$

b. Ceci étant, une première suite d'entiers n'_k extraite de la suite de tous les entiers nous fournira une fonction croissante μ et une constante h telles que dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U_{\mu,h}(z)=U(z)+\text{const.}$$

Si alors la suite des fonctions μ_n tout entière n'était pas vaguement convergente vers la fonction μ, il existerait un nombre réel t_0 et une suite partielle μ_{n_k} tels que μ soit continue pour $t=t_0$ et $\mu_{n_k}(t_0)$ tende vers une limite, finie ou non, différente de $\mu(t_0)$.

De la suite des entiers n_k on pourrait extraire une suite n''_k telle que :

1° la suite des fonctions $\mu_{n''_k}$ soit vaguement convergente vers une fonction limite μ';

2° l'expression $\frac{1}{\varphi(n_k'')}\sum\frac{1}{A-\alpha_p^{(n_k'')}}$ ait une limite h';

et l'on devrait avoir dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U_{\mu',h'}(z) = U(z) + \text{const.}$$

La fonction μ' ne pourrait être équivalente à μ parce que $\mu_{n_k''}(t_0)$ ne tendrait pas vers $\mu(t_0)$, mais il faudrait avoir dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U_{\mu',h'}(z) - U_{\mu,h}(z) = \text{const.}$$

On arriverait donc à une contradiction.

Donc la suite des fonctions μ_n est vaguement convergente vers la fonction μ. Si l'on supposait maintenant que l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_p^{n)}}$ ne tend pas vers h pour n infini, on pourrait trouver une suite partielle $\frac{1}{\varphi(n_k''')}, \sum\frac{1}{A-\alpha_p^{(n_k''')}}$ tendant vers une limite h'', finie ou non, différente de h. Le cas d'une limite infinie est d'ailleurs exclu du fait que de cette suite on doit pouvoir en extraire encore une autre ayant une limite finie.

On verrait alors que l'expression $\frac{1}{\varphi(n_k''')}\log\left|\frac{P_{n_k'''}(z)}{P_{n_k'''}(z_0)}\right|$ convergerait à l'extérieur du segment $]-\infty, a]$ de l'axe réel vers $U_{\mu,h''}(z) - U_{\mu,h''}(z_0)$, ce qui entrainerait que l'on ait dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U_{\mu,h''}(z) - U_{\mu,h}(z) = \text{const.}$$

et conduirait à une nouvelle contradiction.

2.7. Grâce à l'égalité

$$U_{\mu,h}(z) = U(z) + \text{const.}$$

qui a lieu dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$, *la connaissance de* $U(z)$ *détermine la fonction croissante* μ *et la constante* h, comme il a été expliqué aux paragraphes 2.3 et 2.4.

On peut d'ailleurs compléter comme il suit l'énoncé donné au début du chapitre :

$\Psi(z)$ *étant la fonction holomorphe en dehors du segment* $]-\infty, a]$ *de l'axe réel et qui coïncide pour* z *réel* $> a$ *avec* $U(z)$ *ou avec son prolongement analytique, et* $V(z)$ *étant le coefficient de* i *dans* $\Psi(z)$, *on peut prendre*

$$\mu(t) = -\frac{1}{\pi}\lim_{y\to+0} V(t+iy) \quad (^1).$$

(1) La fonction μ de l'énoncé est en effet *équivalente* à celle-ci et, si elle ne lui était pas égale, on pourrait la remplacer par elle.

La constante h sera ensuite déterminée par l'égalité

$$V(z)=\int_{-\infty}^{a+0}\operatorname{Arg}\frac{z-t}{A-t}\,d\mu(t)+\left[h-\int_{-\infty}^{a+0}\frac{d\mu(t)}{A-t}\right]y,$$

où $\operatorname{Arg}\frac{z-t}{A-t}$ *est pris avec la détermination comprise entre* $-\pi$ *et* $+\pi$.

2.8. Notons encore qu'il résulte de ce qui précède que, *si l'expression*

$$\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_nP_n(z)|$$

converge vers une fonction limite $U(z)$, *soit dans un domaine* D, *soit sur un segment* $[\alpha,\beta]$ *de l'axe réel à droite du point* a, *il en est de même partout à l'extérieur du segment* $]-\infty,a]$ *de l'axe réel et la convergence est uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive de ce dernier segment.*

D'abord la suite des fonctions μ_n converge vaguement vers une fonction limite μ et, A étant un nombre réel quelconque supérieur à a, $\frac{1}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{A-\alpha_p}$ tend vers une limite h.

Alors, d'après le théorème I, l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n)}\log\left|\frac{P_n(z)}{P_n(A)}\right|$$

converge en dehors du segment $[-\infty,a]$ de l'axe réel vers $U_{\mu,h}(z)$, la convergence étant uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive de ce segment.

En particulier, z_0 étant un point quelconque de D, ou de $[\alpha,\beta]$,

$$\frac{1}{\varphi(n)}\log\left|\frac{P_n(z_0)}{P_n(A)}\right|$$

tend vers $U_{\mu,h}(z_0)$.

D'autre part, $\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_nP_n(z_0)|$ tend vers $U(z_0)$.

Par différence on voit que $\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_nP_n(A)|$ tend vers $U(z_0)-U_{\mu,h}(z_0)$.

Le résultat annoncé découle ensuite de l'égalité

$$\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_nP_n(z)|=\frac{1}{\varphi(n)}\log\left|\frac{P_n(z)}{P_n(A)}\right|+\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_nP_n(A)|.$$

Notons que la limite de $\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_nP_n(z)|$ peut être définie en dehors de D, ou de $[\alpha,\beta]$, comme prolongement analytique de $U(z)$ ou comme partie réelle de $\Psi(z)$, fonction holomorphe dans Π qui coïncide avec $U(z)$ sur $[\alpha,\beta]$.

III. — Application aux polynomes définis par certaines relations de récurrence.

3.1. A titre d'exemple de ce qui précède, nous étudierons des suites de polynomes définis par certaines relations de récurrence.

Auparavant nous allons établir le lemme suivant :

Soit une suite de nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *liés par la relation de récurrence à coefficients réels*

$$u_{n+1} - p_n u_n + q_n u_{n-1} = 0,$$

dans laquelle on suppose que pour n infini

$$p_n \to 2, \qquad n^\rho (p_n - 2) \to 0,$$
$$q_n \to 1, \qquad n^{2\rho}(p_n - q_n - 1) \to \lambda^2 \neq 0 \qquad (\lambda > 0),$$

avec $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$.

Si l'on pose

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{\lambda_n}{n^\rho},$$

pour n infini λ_n *tend vers* λ *ou vers* $-\lambda$.

On a en effet

$$\lambda_n = (p_n - 1) n^\rho - \frac{n^\rho (n-1)^\rho q_n}{\lambda_{n-1} + (n-1)^\rho}.$$

Pour se rendre compte comment varie λ_r lorsque l'on passe de $r = n-1$ à $r = n$, il est commode de considérer la courbe (C_n) ayant pour équation en axes rectangulaires

$$y = (p_n - 1) n^\rho - \frac{n^\rho (n-1)^\rho q_n}{x + (n-1)^\rho}.$$

La parallèle à Ox menée par le point de (C_n) d'abscisse λ_{n-1} coupe la première bissectrice des axes au point d'abscisse λ_n.

Les points de rencontre de (C_n) avec cette bissectrice ont leurs abscisses données par l'équation

$$x^2 + [(n-1)^\rho - n^\rho (p_n - 1)]x - n^\rho (n-1)^\rho [p_n - q_n - 1] = 0.$$

qui, pour n infini, devient à la limite

$$x^2 - \lambda^2 = 0.$$

Dès que n dépasse une certaine valeur n_0, cette équation a deux racines réelles de signe contraire x'_n et x''_n, et pour n infini ces deux racines tendent respectivement vers $-\lambda$ et $+\lambda$.

Notons que l'on a

$$(1) \qquad \lambda_n - \lambda_{n-1} = -\frac{(\lambda_{n-1} - x'_n)(\lambda_{n-1} - x''_n)}{\lambda_{n-1} + (n-1)^5}.$$

A tout nombre positif η_1 inférieur à 2λ correspond un entier $N(\eta_1)$ supérieur à n_0 et tel que pour $n \geq N(\eta_1)$ on ait

$$-(n-1)^5 < -\lambda - \eta_1 < x'_n < -\lambda + \eta_1 < x''_n.$$

η_1 étant fixé, supposons d'abord que pour un certain n_1 supérieur ou égal à $N(\eta_1) - 1$ l'on ait

$$\lambda_{n_1} \geq -\lambda + \eta_1.$$

Le graphique montre de proche en proche que pour $n > n_1$ on aura toujours

$$\lambda_n \geq -\lambda + \eta_1.$$

Mais il pourra arriver ou bien qu'à partir d'une certaine valeur de n l'on ait toujours

$$-\lambda + \eta_1 \leq \lambda_n \leq x''_n,$$

ou bien qu'à partir d'une certaine valeur de n l'on ait toujours

$$\lambda_n \geq x''_n,$$

ou bien que chacune des inégalités

$$-\lambda + \eta_1 \leq \lambda_n < x''_n \qquad \text{et} \qquad \lambda_n > x''_n$$

ait lieu une infinité de fois.

Dans le premier cas λ_n finira par croître constamment avec n et tendra vers une limite μ au moins égale à $-\lambda + \eta_1$ et au plus égale à λ; dans le second cas λ_n finira par décroître constamment et tendra vers une limite μ au moins égale à λ.

Dans les deux cas l'égalité (1) montre que le produit $n^5(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ tendra vers $\lambda^2 - \mu^2$. La convergence de la série $\Sigma(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ nécessitera alors que $\lambda^2 - \mu^2 = 0$, d'où $\mu = \lambda$.

Si l'on a une infinité de fois chacune des inégalités

$$-\lambda + \eta_1 \leq \lambda_n < x''_n \qquad \text{et} \qquad \lambda_n > x''_n,$$

lorsque n croîtra, λ_n présentera une infinité de maxima et de minima. Pour un maximum on aura

$$x''_{n+1} \leq \lambda_n \leq x''_n$$

et pour un minimum

$$x''_n \leq \lambda_n \leq x''_{n+1},$$

ce qui montre que λ_n tendra encore vers λ.

Si l'on suppose maintenant que, n_1 étant $\geq N(\eta_1) - 1$, l'on ait $\lambda_{n_1} < -n_1^5$, l'on aura

$$\lambda_{n_1+1} > x''_{n_1+1} > -\lambda + \eta_1.$$

Si $\lambda_{n_1} = -n_1^\rho$, l'on aura

$$\lambda_{n_1+1} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n_1+2} > -\lambda + \eta.$$

Dans les deux cas il résulte de ce qui précède que pour n infini λ_n tendra vers λ.

Supposons enfin que, avec $n_1 \geq N(\eta_1) - 1$, on ait

$$-n_1^\rho < \lambda_{n_1} \leq -\lambda - \eta_1.$$

Le graphique montre alors que pour $n > n_1$ ou bien il se trouvera une valeur de n pour laquelle $\lambda_n \leq -n^\rho$, ce qui nous ramènera au cas précédent, ou bien λ_n ira constamment en décroissant tout en restant supérieur à $-n^\rho$. Mais cette dernière circonstance est impossible.

En effet, si elle se produisait, ou bien λ_n tendrait en décroissant vers une limite finie μ au plus égale à $-\lambda - \eta_1$, ou bien λ_n tendrait vers $-\infty$. La première hypothèse entrainerait, comme plus haut, que $n^\rho(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ tende vers $\lambda^2 - \mu^2$, qui, ici, ne pourrait être nul; et ceci serait incompatible avec la convergence de la série $\Sigma(\lambda_n - \lambda_{n-1})$. Dans la seconde hypothèse l'inégalité

$$\lambda_{n-1} - \lambda_n > \frac{(\lambda_{n-1} + \lambda + \eta_1)^2}{(n-1)^\rho},$$

qui résulte de l'égalité (1), entrainerait que le produit $n^\rho(\lambda_{n-1} - \lambda_n)$ tende vers $+\infty$ et par suite que $\frac{\lambda_n}{n^{1-\rho}}$ tende vers $-\infty$, ce qui contredirait l'inégalité $\lambda_n > -n^\rho$ puisque $1 - \rho \geq \rho$.

Finalement on voit que, dès l'instant qu'il existe une valeur n_1 de n au moins égale à $N(\eta_1) - 1$ pour laquelle on n'a pas $-\lambda - \eta < \lambda_{n_1} < -\lambda + \eta_1$, pour n infini λ_n tend vers λ.

Par suite ou bien, quelque petit que soit η_1, on aura toujours pour $n \geq N(\eta_1) - 1$

$$-\lambda - \eta_1 < \lambda_n < -\lambda + \eta_1,$$

ou bien pour une certaine valeur de η_1 il existera une valeur n_1 de n supérieure ou égale à $N(\eta_1) - 1$ et pour laquelle on n'aura pas ces inégalités, et alors pour n infini λ_n tendra vers λ. Autrement dit, ou bien pour n infini λ_n tend vers $-\lambda$, ou bien il tend vers $+\lambda$.

3.2. Ceci étant, considérons une suite de polynomes à coefficients réels définie de la façon suivante :

On prendra $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = \alpha x + \beta$. *Puis les polynomes suivants seront définis de proche en proche par la relation de récurrence*

$$P_{n+1}(x) - (a_n x + b_n) P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

dans laquelle nous supposerons que $a_n > 0$, $c_n > 0$, *et que pour n infini*

$$n^{2\varepsilon} a_n \to u \neq 0, \qquad n^{\varepsilon}(b_n - 2) \to 0, \qquad c_n \to 1$$

et

$$n^{2\varepsilon}(b_n - c_n - 1) \to 0, \qquad \text{avec } 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

On supposera que l'on a pris $\alpha > 0$.

Un raisonnement classique montre que les polynomes de cette suite ont tous leurs zéros réels et que les zéros de deux polynomes consécutifs sont entrelacés :

Si l'on suppose établi que $P_n(x)$ a tous ses zéros réels, soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et entrelacés avec ceux de $P_{n-1}(x)$, on voit que les signes de $P_{n-1}(x)$ pour les valeurs

$$-\infty, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad -\infty$$

sont alternés, de sorte que $P_{n-1}(x)$ a tous ses zéros réels et entrelacés avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or, $P_2(x)$ est positif pour $\pm\infty$ et négatif pour le zéro $-\frac{\beta}{\alpha}$ de $P_1(x)$; il a donc un zéro réel plus petit et un plus grand que $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Il résulte de cette disposition relative des zéros des polynomes de la suite que, lorsque l'on passe de $P_n(x)$ à $P_{n+1}(x)$, le nombre de zéros supérieurs à un nombre donné x_0 ne peut que ne pas changer ou augmenter d'une unité. On voit que, si $P_n(x_0)$ et $P_{n-1}(x_0)$ sont différents de zéro et de même signe, $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ ont le même nombre de zéros supérieurs à x_0.

Si l'on a

$$a_n x_0 + b_n \geq 1 + c_n,$$

c'est-à-dire

$$x_0 \geq \frac{1 + c_n - b_n}{a_n},$$

la relation entre P_{n-1}, P_n et P_{n+1} montre que les inégalités $P_n(x_0) \geq P_{n-1}(x_0) > 0$ entraînent $P_{n-1}(x_0) \geq P_n(x_0)$.

Or, pour n infini, $\frac{1 + c_n - b_n}{a_n}$ a une limite finie $-\frac{\alpha}{u}$; donc cette expression a une borne supérieure finie M, d'ailleurs $\geq -\frac{\alpha}{u}$.

En prenant x_0 au moins égal au plus grand des deux nombres M et $\frac{1-\beta}{\alpha}$, on aura, quel que soit n,

$$a_n x_0 + b_n \geq 1 + c_n,$$

et de plus

$$P_1(x_0) \geq P_0(x_0) = 1;$$

on en déduira de proche en proche que

$$P_n(x_0) \geq P_{n-1}(x_0) \geq \ldots \geq P_0(x_0) = 1.$$

Tous les polynomes de la suite seront donc positifs pour $x = x_0$, ce qui prouve qu'ils auront tous le même nombre de zéros supérieurs à x_0. Or $P_0(x)$ n'en a aucun.

Nous avons donc une suite de polynomes ayant tous leurs zéros réels et inférieurs à un même nombre fixe : le plus grand des deux nombres M et $\frac{1-3}{\alpha}$, soit X.

D'autre part, lorsque x est réel, la relation de récurrence qui lie $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ est de la forme étudiée au paragraphe précédent, en posant

$$P_n(x) = u_n, \qquad a_n x + b_n = p_n, \qquad c_n = q_n.$$

Ici, pour n infini

$$p_n \to 2, \qquad n^2(p_n - 2) \to 0,$$
$$q_n \to 1, \qquad n^2(p_n - q_n - 1) \to ux + v.$$

On pourra appliquer notre lemme si $ux + v > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{-v}{u}$.

Dans ce cas, si l'on pose

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = 1 + \frac{\lambda_n(x)}{n^2},$$

$\lambda_n(x)$ tendra pour n infini vers $\varepsilon\sqrt{ux+v}$, avec $\varepsilon = \pm 1$ (et pouvant *a priori* dépendre de x).

Une première conséquence est que, si $x_0 > \frac{-v}{u}$, $P_{n-1}(x_0)$ et $P_n(x_0)$ sont de même signe pour n assez grand, de sorte que le nombre de zéros de $P_n(x)$ supérieurs à x_0 ne change plus à partir d'une certaine valeur de n et reste donc borné.

Une autre conséquence est la suivante : on a, pour n infini,

$$\log\left|\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}\right| \sim \frac{\varepsilon\sqrt{ux-v}}{n^2}.$$

Or, si $x > X$, on a

$$\log|P_n(x)| = \sum_{0}^{n-1} \log\left|\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}\right|.$$

On en déduit que pour $x > X$

$$\log|P_n(x)| \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\varepsilon\sqrt{ux-v},$$

de sorte que

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}}\log|P_n(x)| \to \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\sqrt{ux-v}.$$

Il résulte de là que, si ν_n est la fonction croissante associée à P_n, la suite des fonctions croissantes $\frac{1}{n^{1-\alpha}}\nu_n$ est vaguement convergente vers une fonction limite μ.

Pour déterminer cette fonction μ, on doit considérer la fonction $\Psi(z)$ holomorphe en dehors du segment $]-\infty, X]$ de l'axe réel et qui coïncide pour $z = x$ réel $> X$ avec la limite de $\frac{1}{n^{1-\rho}} \log |P_n(x)|$.

Cette fonction limite devant être continue, le signe de ε est indépendant de x.

En posant

$$z = -\frac{v}{u} + re^{i\theta}, \qquad \text{avec } -\pi < \theta < +\pi,$$

on a évidemment

$$\Psi(z) = \frac{\varepsilon}{1-\rho} \sqrt{ur}\, e^{i\frac{\theta}{2}},$$

d'où

$$V(z) = \frac{\varepsilon}{1-\rho} \sqrt{ur} \sin\frac{\theta}{2}.$$

On sait que l'on peut prendre

$$\mu(t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} V(t+iy).$$

On obtient ainsi

$$\mu(t) = 0 \qquad \text{pour } t > -\frac{v}{u},$$

$$\mu\left(-\frac{v}{u}\right) = 0,$$

$$\mu(t) = -\frac{\varepsilon}{\pi(1-\rho)} \sqrt{-ut-v} \qquad \text{pour } t < -\frac{v}{u},$$

et l'on voit que $\varepsilon = +1$, puisque μ doit être croissante.

Cette fonction étant continue, $\frac{1}{n^{1-\rho}} \nu_n(t)$ tend vers $\mu(t)$ pour toutes les valeurs de t.

Ceci se traduit pour $t < -\frac{v}{u}$, par exemple, par le fait que le nombre de zéros de $P_n(x)$ au moins égaux à t est équivalent pour n infini à

$$\frac{n^{1-\rho}}{\pi(1-\rho)} \sqrt{-ut-v}.$$

Notons, d'autre part, que $\frac{1}{n^{1-\rho}} \log |P_n(z)|$ converge à l'extérieur du segment $]-\infty, X]$ vers $\mathcal{R}[\Psi(z)]$ (1).

3.3. Prenons par exemple la suite des polynomes définis par

$$(n+a)P_{n-1}(x) - (2n+b+cx)P_n(x) + (n+d)P_{n-1}(x) = 0,$$

(1) Il en résulte que les séries de la forme $\Sigma A_n P_n(z)$ ont pour domaines de convergence les domaines intérieurs à des paraboles d'axe Ox et de foyer le point $-\frac{v}{u}$.

avec

$$a > -1, \qquad d > -1, \qquad c > 0,$$

et

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = \alpha x + \beta, \qquad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

En divisant par $n + a$, cette relation de récurrence se met sous la forme indiquée au paragraphe précédent.

Les conditions indiquées sont remplies avec $\rho = \frac{1}{2}$ et l'on a

$$u = c, \qquad v = b - d - a, \qquad M = \frac{d + a - b}{c}.$$

Les polynomes $P_n(x)$ ont donc tous leurs zéros réels et inférieurs au plus grand des deux nombres $\frac{d + a - b}{c}$ et $\frac{1 - \beta}{\alpha}$.

Le nombre de ces zéros supérieurs à un nombre donné x_0 supérieur à $\frac{d + a - b}{c}$ reste borné quand n croît.

Le nombre des zéros au moins égaux à un nombre donné x_0 inférieur à $\frac{d + a - b}{c}$ est équivalent pour n infini à

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{n(a + d - b - cx_0)}.$$

Si l'on prenait les polynomes définis par

$$(n + a) P_{n+1}(x) - (2n + b - cx) P_n(x) + (n + d) P_{n-1}(x) = 0,$$

avec

$$a > -1, \qquad d > -1, \qquad c > 0,$$

et

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = -\alpha x + \beta, \qquad \text{avec} \quad \alpha > 0,$$

les polynomes $P_n(-x)$, de zéros opposés à ceux de $P_n(x)$, seraient définis de la même façon que ceux que nous venons d'étudier. On en déduit que $P_n(x)$ aurait tous ses zéros réels et bornés inférieurement par un nombre fixe, que le nombre de zéros inférieurs à un nombre fixe x_0 inférieur à $\frac{b - a - d}{c}$ resterait borné quand n croîtrait indéfiniment, et que pour $x_0 > \frac{b - a - d}{c}$ le nombre de zéros au plus égaux à x_0 serait équivalent à $\frac{2}{\pi}\sqrt{n(a + d - b + cx_0)}$,

Considérons en particulier les polynomes de Laguerre $\Pi_n(x)$ définis par

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha} e^{-x}) = x^\alpha e^{-x} \Pi_n(x).$$

On sait qu'ils ont tous leurs zéros réels et positifs et satisfont à la relation de récurrence

$$\Pi_{n+1}(x) - (2n + 1 + \alpha - x)\Pi_n(x) + n(n + \alpha)\Pi_{n-1}(x) = 0.$$

En posant

$$\Pi_n(x) = n!\,P_n(x),$$

cette relation devient

$$(n-1)P_{n-1}(x) - (2n-1-\alpha-x)P_n(x) + (n-\alpha)P_{n-1}(x) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$P_0 = 1, \qquad P_1(x) = 1-\alpha-x.$$

Il résulte alors de ce qui précède, si $\alpha > -1$, que pour $x > 0$ le *nombre de zéros du $n^{\text{ième}}$ polynome de Laguerre au plus égaux à x est équivalent pour n infini à $\frac{2}{\pi}\sqrt{nx}$* (1).

Ceci résulte d'ailleurs aussi des formules asymptotiques connues pour les polynomes de Laguerre.

IV. — Suites de polynomes à zéros réels, dans le cas général.

4.1. La méthode que nous avons employée au Chapitre II permet aussi d'étudier les suites de polynomes à zéros réels sans supposer ceux-ci bornés supérieurement ou inférieurement.

Il est alors plus commode d'utiliser des fonctions additives d'ensemble au lieu de fonctions croissantes. Nous appelons donc $\nu_n(e)$ la fonction d'ensemble définie sur l'axe réel comme égale au nombre de zéros de $P_n(z)$ appartenant à l'ensemble e, chacun étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Nous désignons ensuite par μ_n la fonction d'ensemble définie par

$$\mu_n(e) = \frac{1}{\varphi(n)}\nu_n(e),$$

$\varphi(n)$ ayant la même signification qu'au Chapitre II.

Nous appelons encore α_1^n, α_2^n, ..., α_p^n, ... les zéros de $P_n(z)$, rangés d'ailleurs dans l'ordre que l'on voudra, et nous désignons par E l'ensemble des points limites de points α_p^n.

On arrive ainsi au résultat général suivant, que nous donnons sans démonstration :

Soient $h(t)$ et $k(t)$ deux fonctions continues pour toutes les valeurs de t et satisfaisant pour t infini à

$$h(t) = \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad \text{et} \qquad k(t) \sim \frac{1}{t^2}.$$

---

(1) L'hypothèse $\alpha > -1$ est d'ailleurs inutile car dans la théorie qui précède le fait que $d > -1$, qui entraînait $c_n > 0$, n'a servi qu'à établir la réalité des zéros.

Alors, pour qu'il existe des coefficients c_n tels que la suite des fonctions $\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_n P_n(z)|$ soit convergente en dehors de l'ensemble E, *il faut et il suffit que :*

1° *la suite des fonctions d'ensemble ψ_n soit convergente vers une fonction limite ψ ;*

2° *Pour n infini, l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum h[\alpha_p^n]$ ait une limite finie* H ;

3° *Pour n infini, l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum k[\alpha_p^n]$ ait une limite finie* K.

Lorsque la convergence a lieu, elle est uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive de E.

La fonction limite U(z) *est harmonique dans l'ensemble complémentaire de* E *et l'on a*

$$U(z_1) - U(z_0) = \int_E \log\left|\frac{z_1 - t}{z_0 - t}\right| - h(t).\mathcal{R}[z_1 - z_0]\Big\} d\psi(t)$$
$$- H\,\mathcal{R}[z_1 - z_0] - \frac{1}{2}\left[K - \int_E k(t)\,d\psi(t)\right].\mathcal{R}[z_1^2 - z_0^2].$$

La convergence de $\frac{1}{\varphi(n)}\log|c_n P_n(z)|$ dans un domaine, si petit soit-il, sans point commun avec l'axe réel, ou sur un segment de l'axe réel dont on sait qu'il est sans point commun avec E, *entraîne la convergence partout en dehors de* E, *et la connaissance de la limite* U(z) *soit dans ce domaine, soit sur ce segment, détermine la fonction ψ sur tout l'axe réel, ainsi que les valeurs de* H *et* K.

Lorsque l'on sait que les zéros de tous les polynomes $P_n(z)$ sont bornés supérieurement, ou inférieurement, par un nombre fixe a, on peut supprimer la condition relative à $\frac{1}{\varphi(n)}\sum k[\alpha_p^n]$ qui est conséquence des deux autres, et enlever dans la formule écrite plus haut le terme en $\mathcal{R}[z_1^2 - z_0^2]$ qui est automatiquement nul.

En particulier, si l'on a $\alpha_p^n \leq a$, en prenant $h(t)$ égal à $\frac{1}{t - A}$, avec $A > a$, pour $t \leq a$, on retrouve les résultats du Chapitre II.

V. — Suites de produits canoniques à zéros réels et négatifs.

5.1. Notre méthode s'applique encore à l'étude des suites de fonctions entières de même genre fini ayant tous leurs zéros réels.

Nous nous bornerons ici au cas d'une suite de produits canoniques $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_n(z)$, ... *de même genre fini p et à zéros réels et négatifs.*

Nous désignerons les zéros de $\Pi_n(z)$ par $-\alpha_1^n, -\alpha_2^n, \ldots, -\alpha_r^{(n)}, \ldots$, ou plus simplement par $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_r, \ldots$, de sorte que l'on aura

$$\Pi_n(z) = \Pi\left(1+\frac{z}{\alpha_r}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_r}+\frac{z^2}{2\alpha_r^2}-\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{p\alpha_r^p}}.$$

Nous appellerons $\nu_n(t)$ le nombre de zéros de $\Pi_n(z)$ au moins égaux à $-t$.

De plus, à chaque $\Pi_n(z)$ nous associerons deux fonctions $S_n(t)$ et $\Sigma_n(t)$ définies pour $t>0$ par

$$S_n(t) = \sum_{\alpha_r \leq t} \frac{1}{\alpha_r^p} \quad \text{si } p>0 \qquad \text{et} \qquad = \sum_{\alpha_r \leq t} \log\frac{1}{\alpha_r} \quad \text{si } p=0,$$

et

$$\Sigma_n(t) = \sum_{\alpha_r > t} \frac{1}{\alpha_r^{p+1}}.$$

$\varphi(n)$ étant toujours une fonction positive de l'entier n, nous nous proposons d'établir les résultats suivants :

Si : 1° *la suite des fonctions croissantes* μ_n *définies par* $\mu_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)}\nu_n(t)$ *est vaguement convergente vers une fonction limite* μ,

2° A *étant un nombre positif tel que* μ *soit continue pour* $t=A$,

a. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A)$ *a une limite finie h pour n infini,*

b. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\Sigma_n(A)$ *a une limite finie k,*

alors, dans le domaine Π *constitué par le plan privé de la partie négative* Ox' *de l'axe réel, la détermination réelle pour z réel positif de la fonction* $\frac{1}{\varphi(n)}\log\Pi_n(z)$ *tend pour n infini vers une fonction limite* $\Psi(z)$. *La convergence est uniforme dans tout domaine borné contenu dans* Π *et situé à distance positive de* Ox'.

Réciproquement, si l'on sait que la fonction $\frac{1}{\varphi(n)}\log|\Pi_n(z)|$, *partie réelle de la précédente, converge vers une fonction limite* $U(z)$ *soit dans un domaine contenu dans* Π, *soit sur un segment de l'axe réel situé à droite de l'origine, on peut affirmer que :*

1° *la suite des fonctions* μ_n *définies comme plus haut est vaguement convergente vers une fonction limite* μ,

2° *quel que soit le nombre réel positif* A *tel que* μ *soit continue pour* $t=A$,

a. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A)$ *a une limite finie h pour n infini,*

b. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\Sigma_n(A)$ *a une limite finie k.*

La connaissance de $U(z)$ *détermine la fonction* μ *et, une fois choisi* A, *les valeurs de h et k.*

5.2. Nous suivrons une marche analogue à celle du Chapitre II.

Mais faisons d'abord une remarque sur l'énoncé que nous venons de donner : Il est évident que la fonction μ qui y figure est nécessairement nulle pour $t<0$ comme les fonctions μ_n qui convergent vaguement vers elle. Mais, de plus, on voit aisément que l'on a $\mu(+0)=0$ [et par suite $\mu(0)=0$].

En effet, en supposant par exemple $p>0$, on a, quel que soit le nombre réel positif a au plus égal à A,

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A) \geq \frac{\mu_n(a)}{a^p}.$$

Si a est choisi de manière que μ soit continue pour $t=a$, on en déduit à la limite

$$h \geq \frac{\mu(a)}{a^p}.$$

On a donc pour toutes les valeurs positives assez petites de t pour lesquelle μ est continue

$$\mu(t) \leq h t^p.$$

De même, si $p=0$, on a pour toutes les valeurs positives assez petites de t pour lesquelles μ est continue

$$\mu(t) \leq \frac{h}{\log \frac{1}{t}}.$$

5.3. Théorème I. — *Le genre p étant supposé au moins égal à* 1, *si :*

1° *La suite des fonctions croissantes* μ_n *définies par* $\mu_n(t)=\frac{1}{\varphi(n)}\nu_n(t)$ *est vaguement convergente vers une fonction limite* μ,

2° A *étant un nombre positif tel que* μ *soit continue pour* $t=A$,

a. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_i \leq A}\frac{1}{x_i^p}$ *a une limite finie h pour n infini,*

b. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_i \leq A}\frac{1}{x_i^{p+1}}$ *a une limite finie k,*

alors dans le domaine II *la détermination réelle pour z réel positif de la fonction* $\frac{1}{\varphi(n)}\log \Pi_n(z)$ *tend pour n infini vers*

$$\Psi(z)=\int_0^{+\infty}\left\{\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{p t^p}\right\}d\mu(t)$$
$$+\frac{(-1)^p}{p}\left[h-\int_0^A\frac{d\mu(t)}{t^p}\right]z^p+\frac{(-1)^p}{p+1}\left[k-\int_A^{\infty}\frac{d\mu(t)}{t^{p+1}}\right]z^{p+1},$$

où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ *et* $+\pi$.

La convergence est uniforme dans tout domaine borné contenu dans II *et situé à distance positive de* Ox'.

a. Notons d'abord que l'on a

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_i<A}\frac{1}{x_i^p}=\int_0^A\frac{d\mu_n(t)}{t^p},\qquad \frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_i>A}\frac{1}{x_i^{p-1}}=\int_A^{+\infty}\frac{d\mu_n(t)}{t^{p-1}}.$$

De ce que ces expressions tendent pour n infini vers des limites finies h et k et que la fonction μ_n converge vaguement vers μ, il résulte par les lemmes des paragraphes 1.4 et 1.4.2 que les intégrales

$$\int_0^A\frac{d\mu(t)}{t^p}\quad\text{et}\quad\int_A^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t^{p-1}}$$

sont convergentes et que l'on a

$$\int_0^A\frac{d\mu(t)}{t^p}\leq h\qquad\text{et}\qquad\int_A^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t^{p-1}}\leq k.$$

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left\{\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{pt^p}\right\}d\mu(t)$$

est aussi convergente, car lorsque t tend vers 0 la fonction entre crochets est un infiniment grand de l'ordre de $\frac{1}{t^p}$, et pour t infini elle est infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{t^{p+1}}$.

b. La détermination considérée de la fonction $\frac{1}{\varphi(n)}\log\Pi_n(z)$ est égale à

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum\left\{\log\left(1+\frac{z}{x_i}\right)-\frac{z}{x_i}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{px_i^p}\right\},$$

chaque logarithme étant pris avec la détermination réelle pour z réel >0.

Ceci peut s'écrire

$$\int_0^A g_1(t)\,d\mu_n(t)+\int_A^{+\infty}g_2(t)\,d\mu_n(t)+\frac{(-1)^p}{p}z^p\cdot\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_i<A}\frac{1}{x_i^p}+\frac{(-1)^p}{p+1}z^{p+1}\cdot\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_i<A}\frac{1}{x_i^{p+1}},$$

avec

$$g_1(t)=\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{z^{p-1}}{(p-1)t^{p-1}},$$

et

$$g_2(t)=\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^{p+1}\frac{z^{p+1}}{(p+1)t^{p+1}},$$

où les logarithmes sont pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Considérons un domaine borné Δ situé à distance positive de Ox' et appelons R la borne supérieure de $|z|$ dans Δ.

D'abord, les deux derniers termes de la formule ci-dessus convergent uniformément dans Δ vers

$$\frac{(-1)^p}{p} h z^p \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^p}{p+1} k z^{p+1}.$$

D'autre part, dans tout intervalle tel que $[\varepsilon, A]$, avec $0 < \varepsilon < A$, $g_1(t)$ est uniformément continu par rapport à t quand z parcourt Δ. De plus, on a quand z est dans Δ

$$|g_1(t)| \leqq \log\left(1 + \frac{R}{t}\right) + \pi + \frac{R}{t} + \frac{R^2}{2t^2} + \ldots + \frac{R^{p-1}}{(p-1)t^{p-1}},$$

de sorte que le produit $t^p g_1(t)$ tend uniformément vers 0 quand t tend vers 0. Il résulte donc du lemme du paragraphe 1.4.2 que pour n infini l'intégrale

$$\int_0^A g_1(t) d\mu_n(t)$$

converge uniformément dans Δ vers

$$\int_0^A g_1(t) d\mu(t).$$

De même, dans tout intervalle fini tel que $[A, L]$, la fonction $g_2(t)$ est uniformément continue par rapport à t lorsque z parcourt Δ. De plus, quand z est dans Δ, on a pour $t \geqq 2R$, par exemple, une inégalité de la forme

$$|g_2(t)| \leqq M \frac{R^{p+2}}{t^{p+2}},$$

de sorte que le produit $t^{p+1} g_2(t)$ tend uniformément vers 0 pour t infini. Il résulte alors du lemme des paragraphes 1.4 et 1.4.1 que pour n infini l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu_n(t)$$

converge uniformément dans Δ vers

$$\int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu(t).$$

En définitive, l'expression $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$, prise avec la détermination indiquée, converge uniformément dans Δ vers

$$\int_0^A g_1(t) d\mu(t) + \int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu(t) + \frac{(-1)^p}{p} h z^p + \frac{(-1)^p}{p+1} k z^{p+1},$$

ce qui s'écrit ensuite sous la forme donnée dans l'énoncé.

Notons que dans l'expression de $\Psi(z)$ les coefficients de z^p et z^{p+1} sont du signe de $(-1)^p$.

5.3.1. Théorème I *bis*. *Le genre p étant nul, si :*

1° *la suite des fonctions croissantes* μ_n *définies par* $\mu_n(t)=\frac{1}{\varphi(n)}\nu_n(t)$ *est vaguement convergente vers une fonction limite* μ,

2° A *étant un nombre positif tel que* μ *soit continue pour* $t=A$,

a. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{\alpha_r\leq A}\log\frac{1}{\alpha_r}$ *a pour n infini une limite finie h,*

b. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{\alpha_r>A}\frac{1}{\alpha_r}$ *a une limite finie k,*

alors dans le domaine II *la détermination réelle pour z réel positif de la fonction* $\frac{1}{\varphi(n)}\log\Pi_n(z)$ *tend pour n infini vers*

$$\Psi(z)=\int_0^{+\infty}\log\left(1+\frac{z}{t}\right)d\mu(t)+h-\int_0^{A}\log\frac{1}{t}\,d\mu(t)+\left[k-\int_A^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t}\right]z,$$

où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ *et* $+\pi$. *La convergence est uniforme dans tout domaine borné contenu dans* II *et située à distance positive de* Ox'.

a. On a

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{\alpha_r\leq A}\log\frac{1}{\alpha_r}=\int_0^{A}\log\frac{1}{t}\,d\mu_n(t),$$

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{\alpha_r>A}\frac{1}{\alpha_r}=\int_A^{+\infty}\frac{d\mu_n(t)}{t},$$

et, de ce que ces expressions tendent pour n infini vers des limites finies h et k et que la suite des fonctions μ_n converge vaguement vers la fonction μ, il résulte que les intégrales

$$\int_0^{A}\log\frac{1}{t}\,d\mu(t)\quad\text{et}\quad\int_A^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t}$$

sont convergentes et que l'on a

$$\int_0^{A}\log\frac{1}{t}\,d\mu(t)\leq h\quad\text{et}\quad\int_A^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t}\leq k.$$

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\log\left(1+\frac{z}{t}\right)d\mu(t)$$

est aussi convergente, car quand t tend vers zéro $\log\left(1+\frac{z}{t}\right)$ tend vers $+\infty$ comme $\log\frac{1}{t}$, et pour t infini $\log\left(1+\frac{z}{t}\right)$ est infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{t}$.

b. La détermination considérée de la fonction $\frac{1}{\varphi(n)}\log\Pi_n(z)$ peut s'écrire

$$\int_0^A g_1(t)\,d\mu_n(t)+\int_A^{+\infty} g_2(t)\,d\mu_n(t)+\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_r\leq A}\log\frac{1}{x_r}+z\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{x_r>A}\frac{1}{x_r},$$

avec

$$g_1(t)=\log(t+z) \qquad \text{et} \qquad g_2(t)=\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t},$$

les logarithmes étant pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Si l'on suppose que z varie dans un domaine borné Δ contenu dans Π et situé à distance positive de Ox', on voit d'abord que pour n infini les deux derniers termes convergent uniformément vers $h+kz$, puis le lemme rappelé au paragraphe 1.3 montre que l'intégrale

$$\int_0^A g_1(t)\,d\mu_n(t)$$

converge uniformément vers

$$\int_0^A g_1(t)\,d\mu(t);$$

enfin, on voit comme plus haut, par application du lemme des paragraphes 1.4 et 1.4.1, que l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} g_2(t)\,d\mu_n(t)$$

converge uniformément vers

$$\int_A^{+\infty} g_2(t)\,d\mu(t).$$

On a donc bien le résultat annoncé.

Notons que, dans l'expression de $\Psi(z)$, *la constante* $h-\int_0^A \log\frac{1}{t}\,d\mu(t)$ *et le coefficient de* z *sont positifs ou nuls, donc encore du signe de* $(-1)^p$.

5.4. p étant un entier positif, étant données une fonction croissante μ, nulle pour $t\leq 0$ et telle que $\mu(+0)=0$ et que les intégrales

$$\int_0^L \frac{d\mu(t)}{t^p} \quad \text{et} \quad \int_L^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}},$$

où L est un nombre positif quelconque, soient convergentes, et deux constantes réelles H et K, nous leur associerons une fonction $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ définie en dehors de Ox' par

$$\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)=\int_0^{+\infty}\left\{\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{pt^p}\right\}d\mu(t)+Hz^p+Kz^{p+1},$$

où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

De même, étant données une fonction croissante μ, nulle pour $t\leq 0$ et telle que $\mu(+0)=0$ et que les intégrales

$$\int_0^L \log\frac{1}{t}\,d\mu(t) \quad \text{et} \quad \int_L^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t}$$

soient convergentes, et deux constantes réelles H et K, nous leur associerons la fonction

$$\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)=\int_0^{+\infty}\log\left(1+\frac{z}{t}\right)d\mu(t)+H+Kz,$$

où le logarithme est toujours pris de la même façon.

Nous désignerons par

$$U^{(p)}_{\mu,H,K}(z) \quad \text{et} \quad V^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$$

la partie réelle et le coefficient de i dans $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ (pour p différent ou non de 0).

On voit de suite que la fonction $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ est holomorphe dans le domaine H constitué par le plan privé de Ox', de sorte que

$$U^{(p)}_{\mu,H,K}(z) \quad \text{et} \quad V^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$$

sont harmoniques dans le même domaine.

La connaissance de $U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ dans un domaine contenu dans H la détermine donc dans H tout entier. De plus, sa connaissance sur Ox, ou sur un segment de Ox, détermine $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ dans H tout entier, car c'est la fonction holomorphe dans H qui coïncide avec $U^{(p)}_{\mu,H,K}$ pour z réel positif.

Donc la connaissance de $U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$, soit dans un domaine D contenu dans H, soit sur un segment de Ox, détermine $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ dans tout le domaine H (et cela sans qu'il soit nécessaire de connaître l'entier p).

5.5. La connaissance de $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ détermine ensuite la fonction μ et les constantes H et k (1), comme il résulte du théorème suivant :

(1) *Cf.* note (1), p. 122.

THÉORÈME II. — *L'expression*

$$\frac{1}{\pi}\lim_{y>0} V^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(-t+iy)$$

définit une fonction croissante équivalente à μ.

En effet, nous allons montrer que, lorsque, x restant fixe, y tend vers o par valeurs positives, $V^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(x+iy)$ tend vers

$$\pi\,\frac{\mu(-x+o)+\mu(-x-o)}{2}.$$

Si $x>o$, ceci résulte de la continuité de $V^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(z)$ pour $z=x$.

Il suffit donc de considérer le cas où $x\leq o$.

Soit L un nombre réel supérieur à $-x$, et désignons par $\mathfrak{I}[\ ]$ le coefficient de i dans la quantité entre crochets. Si $p>o$ on peut écrire,

$$\begin{aligned} V^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(z) = {} & \mathfrak{I}\left\{\int_0^L\left[\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{pt^p}\right]d\mu(t)\right\} \\ & +\mathfrak{I}\left\{\int_L^{+\infty}\left[\log\left(1+\frac{z}{t}\right)-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{pt^p}\right]d\mu(t)\right\} \\ & +\Pi\,\mathfrak{I}[z^p]+K\,\mathfrak{I}[z^{p+1}]. \end{aligned}$$

La seconde intégrale est une fonction de z continue pour $z=x$ et réelle en ce point; par conséquent si l'on fait $z=x+iy$, le second terme tendra vers zéro avec y. Il en est évidemment de même du 3e et du 4e terme.

Le premier terme s'écrit

$$\int_0^L\left\{\operatorname{Arg}(z+t)+\mathfrak{I}\left[-\frac{z}{t}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{pt^p}\right]\right\}d\mu(t),$$

où l'argument est pris avec la détermination comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Si l'on fait $z=x+iy$ et si, x restant fixe, on astreint y à rester inférieur en module à un nombre fixe, $|z|$ restera inférieur à un nombre fixe R et la fonction sous le signe $\int$ restera inférieure en module à $\pi+\frac{R}{t}+\ldots+\frac{R^p}{pt^p}$, qui est sommable par rapport à la fonction μ sur l'intervalle (o, L).

Si maintenant y tend vers zéro par valeurs positives, la fonction sous le signe $\int$ tend vers π pour $o<t<-x$, vers zéro pour $t>-x$, et vers $\frac{\pi}{2}$ pour $t=-x$.

En appliquant le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe $\int$, on voit que l'intégrale considérée tend vers

$$\frac{\pi}{2}[\mu(-x+o)-\mu(-x-o)]+\pi[\mu(-x-o)-\mu(+o)]=\pi\,\frac{\mu(-x+o)+\mu(-x-o)}{2}.$$

On raisonnerait de façon semblable dans le cas où $p=o$.

Notons que la fonction μ est ainsi déterminée par la connaissance de $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ sans qu'il soit besoin de connaître la valeur de l'entier p.

Une fois μ déterminée, et p étant connu, les valeurs de H et de K sont déterminées par la formule qui donne l'expression de $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$.

5.6. Notons encore qu'il résulte de ce qui précède que, si l'on a dans tout un domaine contenu dans II, ou sur tout un segment de Ox,

$$U^{(p)}_{\mu_1,H_1,K_1}(z) = U^{(p)}_{\mu_2,H_2,K_2}(z),$$

les fonctions μ_1 et μ_2 sont équivalentes, et l'on a

$$H_1 = H_2, \qquad K_1 = K_2.$$

En particulier, $U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ ne peut être nulle dans un domaine, ou sur un segment de Ox, sans que $\mu(t) = 0$ et $H = K = 0$.

5.7. Considérons maintenant de nouveau une suite de produits canoniques de même genre fini p et à zéros réels et négatifs, et supposons que, soit dans un domaine D contenu dans II, soit sur un segment $[\alpha, \beta]$ de Ox, l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n)} \log |H_n(z)|$$

converge vers une fonction limite $U(z)$.

Nous allons montrer que :

1° *la suite des fonctions croissantes* μ_n *définies par*

$$\mu_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(t)$$

est vaguement convergente vers une fonction limite μ *;*

2° A *étant un nombre réel positif quelconque tel que* μ *soit continue pour* $t = A$,

a. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A)$ *a une limite finie* h *quand* n *tend vers l'infini,*

b. l'expression $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A)$ *a une limite finie* k (1).

Nous ferons le raisonnement en supposant $p \neq 0$ et nous laisserons au lecteur le soin de le modifier comme il convient pour le cas où $p = 0$.

a. Nous montrerons d'abord que, quelle que soit la suite d'entiers croissants $n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots$, on peut trouver une autre suite $n'_1, n'_2, \ldots, n'_q, \ldots$ extraite de celle-ci et un nombre positif A tels que :

---

(1) *Voir* page 140 les définitions de $S_n(t)$ et $\Sigma_n(t)$.

1° la suite des fonctions $\mu_{n'_q}$ soit vaguement convergente vers une fonction limite μ telle que $\mu(+0)=0$,

2° la fonction μ soit continue pour $t=A$,

3° les expressions $\frac{1}{\varphi(n'_q)}S_{n'_q}(A)$ et $\frac{1}{\varphi(n'_q)}\Sigma_{n'_q}(A)$ aient des limites finies h et k,

et que l'on aura alors dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)=U(z),$$

avec

$$H=\frac{(-1)^p}{p}\left[h-\int_0^A\frac{d\mu(t)}{t^p}\right],\qquad K=\frac{(-1)^p}{p+1}\left[k-\int_A^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t^{p+1}}\right].$$

Choisissons arbitrairement un nombre positf a (1) et posons

$$\rho(n)=S_n(a)+\Sigma_n(a)\qquad\text{et}\qquad\psi_n(t)=\frac{1}{\rho(n)}\nu_n(t).$$

On aura

$$\frac{1}{\rho(n)}S_n(a)\leqq 1,\qquad\frac{1}{\rho(n)}\Sigma_n(a)\leqq 1\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{\rho(n)}[S_n(a)+\Sigma_n(a)]=1.$$

Or, quel que soit t réel satisfaisant à $0<t\leqq a$, on a

$$\frac{1}{\rho(n)}S_n(a)\geqq\frac{\psi_n(t)}{t^p},$$

et, quel que soit t réel et $>a$, on a

$$\frac{1}{\rho(n)}\Sigma_n(a)\geqq\frac{\psi_n(t)-\psi_n(a)}{t^{p+1}}.$$

Les fonctions ψ_n, nulles pour $t\leqq 0$, satisferont donc pour $0<t\leqq a$ à

$$\psi_n(t)\leqq t^p,$$

et pour $t>a$ à

$$\psi_n(t)\leqq\psi_n(a)+t^{p+1}\leqq a^p+t^{p+1}.$$

Par conséquent, de la suite des fonctions ψ_{n_q} on pourra extraire une suite vaguement convergente $\psi_{n''_q}$, et l'on voit que la fonction limite ψ satisfera nécessairement à $\psi(+0)=0$.

Choisissons un nombre positif A tel que ψ soit continue pour $t=A$.

Les expressions

$$\frac{1}{\rho(n''_q)}S_{n''_q}(A)\quad\text{et}\quad\frac{1}{\rho(n''_q)}\Sigma_{n''_q}(A)$$

seront bornées indépendamment de n''_q.

---

(1) Dans le cas où $p=0$, il faut prendre $a<1$ pour que $\log\frac{1}{a}>0$.

En effet, d'abord ceci est évident si $A = a$; Si $A > a$ on a,

$$0 \leqq \frac{1}{\rho(n''_q)} \Sigma_{n''_q}(A) \leqq \frac{1}{\rho(n''_q)} \Sigma_{n''_q}(a) \leqq 1,$$

et, d'autre part, en appelant B un nombre positif inférieur à a et tel que ψ soit continue pour $t = B$,

$$0 \leqq \frac{1}{\rho(n''_q)} S_{n''_q}(A) \leqq \frac{1}{\rho(n''_q)} S_{n''_q}(a) + \int_B^A \frac{d\psi_{n''_q}(t)}{t^p} \leqq 1 + \int_B^A \frac{d\psi_{n''_q}(t)}{t^p},$$

et le dernier terme tend pour n''_q infini vers la limite finie $\int_B^A \frac{d\psi(t)}{t^p}$.

Si $A < a$, on peut raisonner de façon semblable.

Il résulte de là que de la suite d'entiers $n''_1, n''_2, \ldots, n''_q, \ldots$ on pourra en extraire une autre $n'_1, n'_2, \ldots, n'_q, \ldots$ telle que

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} S_{n'_q}(A) \text{ tende vers une limite finie } h_1,$$

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A) \text{ tende vers une limite finie } k_1.$$

Il est évident que la suite des fonctions $\psi_{n'_q}$ sera encore vaguement convergente vers ψ.

Il résulte alors du théorème I que dans le domaine II la détermination réelle pour z réel positif de $\frac{1}{\rho(n'_q)} \log \Pi_{n'_q}(z)$ convergera pour q infini vers $\Psi^{(p)}_{\psi, H_1, K_1}(z)$, avec

$$H_1 = \frac{(-1)^p}{p} \left[h_1 - \int_0^A \frac{d\psi(t)}{t^p} \right], \qquad K_1 = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[k_1 - \int_A^{+\infty} \frac{d\psi(t)}{t^{p+1}} \right],$$

de sorte que $\frac{1}{\rho(n'_q)} \log |\Pi_{n'_q}(z)|$ convergera vers $U^{(p)}_{\psi, H_1, K_1}(z)$.

Cette dernière fonction ne peut être nulle dans tout le domaine D, ou sur tout le segment $[\alpha, \beta]$.

En effet ceci exigerait que

$$\psi(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad H_1 = K_1 = 0,$$

d'où $h_1 = k_1 = 0$.

Les expressions

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} S_{n'_q}(A) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A)$$

tendraient donc vers zéro pour n'_q infini, et il en serait nécessairement de même de

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} S_{n'_q}(a) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(a),$$

car on a

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(A) - \frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(\alpha) = \int_\alpha^A \frac{d\psi_{n'_q}(t)}{t^p},$$

et

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(\alpha) - \frac{1}{\varphi(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A) = \int_\alpha^A \frac{d\psi_{n'_q}(t)}{t^{p-1}},$$

et les seconds membres tendraient vers zéro pour n'_q infini.

Or, on sait que

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(\alpha) + \frac{1}{\varphi(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(\alpha) = 1.$$

Soit donc z_0 un point de D, ou de $[\alpha, \beta]$, tel que

$$U^{(p)}_{\psi, H_1, K_1}(z_0) \neq 0.$$

Alors

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} \log \Pi_{n'_q}(z_0)$$

tend pour n'_q infini vers $U(z_0)$;

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} \log \Pi_{n'_q}(z_0)$$

tend vers $U^{(p)}_{\psi, H_1, K_1}(z_0)$, et l'on voit par division que $\frac{\varphi(n'_q)}{\varphi(n'_q)}$ tend vers la limite finie

$$\frac{U(z_0)}{U^{(p)}_{\psi, H_1, K_1}(z_0)} = \lambda.$$

Comme

$$\mu_{n'_q}(t) = \frac{\varphi(n'_q)}{\varphi(n'_q)} \cdot \psi_{n'_q}(t),$$

la suite des fonctions croissantes $\mu_{n'_q}$ est vaguement convergente vers la fonction μ définie par $\mu(t) = \lambda\psi(t)$, fonction qui satisfait à $\mu(+0) = 0$ et qui est, comme ψ, continue pour $t = A$.

De même, l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(A) = \frac{\varphi(n'_q)}{\varphi(n'_q)} \cdot \frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(A)$$

tend pour q infini vers $\lambda h_1 = h$.

De même, $\frac{1}{\varphi(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A)$ tend vers $\lambda k_1 = k$.

Enfin, l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} \log |\Pi_{n'_q}(z)| = \frac{\varphi(n'_q)}{\varphi(n'_q)} \cdot \frac{1}{\varphi(n'_q)} \log \Pi_{n'_q}(z)$$

converge dans le domaine Π *vers* $\lambda U^{(p)}_{\varphi,H_1,K_1}(z)$ *qui est égal à* $U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$, *avec*

$$H=\lambda H_1=\frac{(-1)^p}{p}\left[h-\int_0^A\frac{d\mu(t)}{t^p}\right],\qquad K=\lambda K_1=\frac{(-1)^k}{p+1}\left[k-\int_A^{-\infty}\frac{d\mu(t)}{t^{p+1}}\right],$$

et, par suite, on a dans D, *ou sur* $[\alpha,\beta]$,

$$U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)=U(z).$$

b. Ceci étant, on pourra d'abord trouver une suite n'_q extraite de la suite de tous les entiers et un nombre positif A_0 tels que :

1° la suite des fonctions croissantes $\mu_{n'_q}$ soit vaguement convergente vers une fonction limite μ;

2° la fonction μ soit continue pour $t=A_0$;

3° les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)}S_{n'_q}(A_0)\quad\text{et}\quad\frac{1}{\varphi(n'_q)}\Sigma_{n'_q}(A_0)$$

aient des limites finies h_0 et k_0.

On aura dans D, ou sur $[\alpha,\beta]$,

$$U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)=U(z),$$

avec

$$H=\frac{(-1)^p}{p}\left[h_0-\int_0^{A_0}\frac{d\mu(t)}{t^p}\right],$$

$$K=\frac{(-1)^p}{p+1}\left[k_0-\int_{A_0}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{t^{p-1}}\right].$$

Si alors la suite des fonctions μ_n tout entière n'était pas vaguement convergente vers la fonction μ, il existerait un nombre réel t_0 et une suite partielle μ_{n_q} tels que μ soit continue pour $t=t_0$ et que $\mu_{n_q}(t_0)$ tende vers une limite, finie ou non, différente de $\mu(t_0)$.

On pourrait alors trouver une autre suite partielle $\mu_{n''_q}$ extraite de celle-ci et un nombre réel positif A' tels que :

1° la suite des fonctions croissantes $\mu_{n''_q}$ soit vaguement convergente vers une fonction limite μ' telle que $\mu'(+0)=0$;

2° la fonction μ' soit continue pour $t=A'$;

3° les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n''_q)}S_{n''_q}(A')\quad\text{et}\quad\frac{1}{\varphi(n''_q)}\Sigma_{n''_q}(A')$$

aient des limites finies h' et k';

et l'on devrait avoir dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U^{(p)}_{\mu,H',K'}(z) = U(z) = U^{(p)}_{\mu,H,K}(z),$$

avec

$$H' = \frac{(-1)^p}{p}\left[h' - \int_0^{A'} \frac{d\mu'(t)}{t^p}\right], \qquad K' = \frac{(-1)^p}{p+1}\left[k' - \int_{A'}^{-\infty} \frac{d\mu'(t)}{t^{p-1}}\right].$$

La fonction μ' ne pourrait être équivalente à μ puisque $\mu_{n''_q}(t_0)$ ne tendrait pas vers $\mu(t_0)$. On arriverait donc à une contradiction.

La suite des fonctions μ_n est donc vaguement convergente vers la fonction μ. On voit ensuite que les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A_0)$$

tendent respectivement pour n infini vers h_0 et k_0.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite d'entiers croissants n'''_q telle que

$$\frac{1}{\varphi(n'''_q)} S_{n'''_q}(A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n'''_q)} \Sigma_{n'''_q}(A_0)$$

aient des limites h'' et k'', finies ou non, avec $h'' \neq h_0$ ou $k'' \neq k_0$. Le cas où l'une de ces limites serait infinie est d'ailleurs exclu du fait que de la suite n'''_q on doit pouvoir en extraire encore une autre n^{IV}_q telle que

$$\frac{1}{\varphi(n^{IV}_q)} S_{n^{IV}_q}(A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n^{IV}_q)} \Sigma_{n^{IV}_q}(A_0)$$

aient des limites finies.

Le théorème I entraînerait alors que dans le domaine II l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n'''_q)} \log \left| H_{n'''_q}(z) \right|$$

convergerait vers $U^{(p)}_{\mu,H'',K''}(z)$, avec

$$H'' = \frac{(-1)^p}{p}\left[h'' - \int_0^{A_0} \frac{d\mu(t)}{t^p}\right], \qquad K'' = \frac{(-1)^p}{p+1}\left[k'' - \int_{A_0}^{-\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p-1}}\right].$$

On aurait donc dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U^{(p)}_{\mu,H'',K''}(z) = U(z) = U^{(p)}_{\mu,H,K}(z),$$

alors que $H'' \neq H$ ou $K'' \neq K$, d'où contradiction.

Si maintenant A est un nombre positif quelconque tel que μ soit continue pour $t = A$, les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A)$$

tendront respectivement, pour n infini, vers les limites

$$h = h_0 - \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \frac{d\mu(t)}{t^p}, \qquad k = k_0 + \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}},$$

car on a

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(\Lambda) = \frac{1}{\varphi(n)} S_n(\Lambda_0) - \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \frac{d\mu_n(t)}{t^p},$$

et

$$\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(\Lambda) = \frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(\Lambda_0) + \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d\mu_n(t)}{t^{p+1}}.$$

Notons que l'on a

$$\frac{(-1)^p}{p}\left[h - \int_0^{\Lambda} \frac{d\mu(t)}{t^p}\right] = \mathrm{H}. \qquad \frac{(-1)^p}{p-1}\left[k - \int_{\Lambda}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}}\right] = \mathrm{K}.$$

Comme nous l'avons dit plus haut, nous laissons au lecteur le soin de modifier comme il convient le raisonnement qui précède pour le cas où $p = 0$. Dans ce cas, la première des égalités ci-dessus sera remplacée par

$$h - \int_0^{\Lambda} \log \frac{1}{t}\, d\mu(t) = \mathrm{H}.$$

5.8. Grâce à l'égalité

$$\mathrm{U}^{(p)}_{\mu,\mathrm{H},\mathrm{K}}(z) = \mathrm{U}(z)$$

qui a lieu dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$, *la connaissance de* $\mathrm{U}(z)$ *détermine la fonction croissante* μ *et les constantes* H *et* K, comme il a été expliqué aux paragraphes 5.3 et 5.4. Ensuite, une fois fixé A, les égalités que nous venons de mentionner déterminent h et k.

On peut compléter comme il suit l'énoncé donné au début du Chapitre :

$\Psi(z)$ *étant la fonction holomorphe en dehors de* Ox' *qui coïncide pour* z *réel positif avec* $\mathrm{U}(z)$, *ou avec son prolongement analytique, et* $\mathrm{V}(z)$ *étant le coefficient de* i *dans* $\Psi(z)$, *on peut prendre*

$$\mu(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} \mathrm{V}(-t + iy) \quad (1).$$

Les constantes H *et* K *étant ensuite déterminées par la formule*

$$\Psi(z) = \int_0^{+\infty} \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{t}\right) - \frac{z}{t} + \ldots - (-1)^p \frac{z^p}{p t^p} \right\} d\mu(t) + \mathrm{H} z^p + \mathrm{K} z^{p+1}, \qquad \text{si } p > 0,$$

ou

$$\Psi(z) = \int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{z}{t}\right) d\mu(t) + \mathrm{H} - \mathrm{K} z, \qquad \text{si } p = 0,$$

(1) *Cf.* note (1), page 129.

où le logarithme est pris dans les deux cas avec le coefficient de i compris entre $-\pi$ et $+\pi$. h et k seront déterminées, une fois A fixé, par

$$H = \frac{(-1)^p}{p}\left[h - \int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p}\right] \quad \text{si } p > 0, \qquad H = h - \int_0^A \log\frac{1}{t}\, d\mu(t) \quad \text{si } p = 0.$$

$$K = \frac{(-1)^p}{p-1}\left[k - \int_A^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p-1}}\right].$$

Il est évident que, si l'on connaît d'avance une fonction croissante μ^* nulle pour $t \leq 0$ et satisfaisant à $\mu^*(+0) = 0$ et deux constantes H^* et K^* telles que l'on ait dans D, ou sur $[\alpha, \beta]$,

$$U^{(p)}_{\mu^*,H^*,K^*}(z) = U(z),$$

on peut prendre de suite

$$\mu = \mu^*, \qquad H = H^*, \qquad K = K^*.$$

5.9. Il est intéressant de remarquer que *la convergence de* $\frac{1}{\varphi(n)}\log|\Pi_n(z)|$ *sur un segment de droite non nécessairement situé sur* Ox *suffit encore à entraîner les conditions indiquées plus haut, si ce segment satisfait à des hypothèses convenables. Il en est ainsi, en particulier, pour tout segment porté par une demi-droite* Ou *issue de* O, *distincte de* Ox', *et telle que, si l'on appelle* θ *l'angle* $\widehat{Ox.\,Ou}$, *pris de module* $< \pi$, *il n'existe aucun entier impair* m *satisfaisant à*

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m\frac{\pi}{2p} \quad (^1).$$

Cela résulte de ce que, si les fonctions $U^{(p)}_{\mu_1,H_1,K_1}(z)$ et $U^{(p)}_{\mu_2,H_2,K_2}$ sont égales sur un segment satisfaisant à la condition indiquée, les fonctions μ_1 et μ_2 sont équivalentes et l'on a $H_1 = H_2$, $K_1 = K_2$; en particulier $U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ ne peut être nulle sur un tel segment sans que $\mu(t) = 0$ et $H = K = 0$. On voit alors qu'un tel segment peut jouer le même rôle qu'un segment de Ox dans les raisonnements du paragraphe 5.7.

Il suffit donc de montrer qu'une fonction $\mathfrak{U}(z)$ de la forme

$$U^{(p)}_{\mu_1,H_1,K_1}(z) - U^{(p)}_{\mu_2,H_2,K_2}(z)$$

ne peut être nulle sur un segment de droite satisfaisant à la condition indiquée sans être nulle dans tout le domaine Π.

D'ailleurs, par suite de l'analyticité, si la fonction $\mathfrak{U}(z)$ est nulle sur un segment porté par une demi-droite issue de O, elle est nulle sur toute cette demi-droite, Il suffira donc de montrer que, si l'on a

$$\mathfrak{U}(re^{i\theta}) = 0 \qquad \text{quel que soit } r > 0$$

(1) Il en est de même pour beaucoup d'autres segments; nous nous sommes limité volontairement à ceux dont le support passe par O, ce qui suffit pour les applications que nous avons en vue.

pour une valeur de θ de module $< \pi$ et telle qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m\frac{\pi}{2p},$$

$\mathfrak{U}(z)$ est nulle dans tout le domaine II.

5.10. L'entier p étant fixé ≥ 1, étant donné α satisfaisant à $0 < \alpha < \pi$, on voit aisément qu'il existe deux nombres positifs $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ tels que, si $u = \rho e^{i\theta}$, avec $|\theta| \leq \alpha$, et si l'on prend pour $\log(1+u)$ la valeur dans laquelle le coefficient de i est de module $< \pi$, on a

$$\left|\log(1+u) - u + \ldots + (-1)^p \frac{u^p}{p}\right| \leq A(\alpha)\rho^p \qquad \text{pour } \rho \geq 1,$$

et

$$\left|\log(1+u) - u + \ldots + (-1)^p \frac{u^p}{p}\right| \leq B(\alpha)\rho^{p+1} \qquad \text{pour } \rho \leq 1.$$

Il en résulte que, si $p \geq 1$, toute fonction $\Psi^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(z)$ satisfait pour $|\theta| \leq \alpha$ à l'inégalité

$$|\Psi^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(re^{i\theta})| \leq A(\alpha)r^p \int_0^r \frac{d\mu(t)}{t^p} + B(\alpha)r^{p+1}\int_r^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} + |H|r^p + |K|r^{p+1}.$$

Pour r infini, le second terme est manifestement $o[r^{p+1}]$. Comme le premier peut s'écrire

$$A(\alpha)r^p\left[\frac{\mu(r)}{r^p} + p\int_0^r \frac{\mu(t)\,dt}{t^{p+1}}\right]$$

et que $\mu(r) = o[r^{p+1}]$, il est aussi $o[r^{p+1}]$.

Pour r infiniment petit, le premier terme est $o[r^p]$. Comme le second peut s'écrire

$$B(\alpha)r^{p+1}\left[-\frac{\mu(r)}{r^{p+1}} + (p+1)\int_r^{+\infty} \frac{\mu(t)\,dt}{t^{p+2}}\right]$$

et que $\mu(r) = o[r^p]$, il est aussi $o[r^p]$.

On voit donc que, quel que soit α satisfaisant à $0 < \alpha < \pi$, on a pour r infiniment grand

$$\operatorname*{Max}_{|\theta| \leq \alpha} |\Psi^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(re^{i\theta})| = O[r^{p+1}],$$

et pour r infiniment petit

$$\operatorname*{Max}_{|\theta| \leq \alpha} |\Psi^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(re^{i\theta})| = O[r^p].$$

On verrait de façon semblable que $\Psi^{(p)}_{\mu,\Pi,K}(z)$ satisfait aux mêmes relations dans le cas où $p = 0$.

La fonction $U^{(\rho)}_{\mu,H,K}(z)$, partie réelle de $\Psi^{(\rho)}_{\mu,H,K}(z)$, satisfait évidemment aux mêmes relations.

De plus, on a manifestement

$$U^{(\rho)}_{\mu,H,K}(re^{-i\theta}) = U^{(\rho)}_{\mu,H,K}(re^{i\theta}).$$

En définitive, *si l'on considère une fonction* $\mathcal{U}(z)$ *de la forme*

$$U^{(\rho)}_{\mu_1,H_1,K_1}(z) - U^{(\rho)}_{\mu_2,H_2,K_2}(z),$$

on voit que $\mathcal{U}(z)$ *est une fonction harmonique dans le domaine* H, *satisfaisant à* $\mathcal{U}(re^{-i\theta}) = \mathcal{U}(re^{i\theta})$ *et, quel que soit* α *tel que* $0 < \alpha < \pi$, *à*

$$\operatorname*{Max}_{|\theta|\leq\alpha} |\mathcal{U}(re^{i\theta})| = O[r^{\rho+1}] \qquad \textit{pour } r \textit{ infiniment grand,}$$

et

$$\operatorname*{Max}_{|\theta|\leq\alpha} |\mathcal{U}(re^{i\theta})| = O[r^{\rho}] \qquad \textit{pour } r \textit{ infiniment petit.}$$

5.11. Ceci étant, supposons qu'une fonction $\mathcal{U}(z)$ de la forme

$$U^{(\rho)}_{\mu_1,H_1,K_1}(z) - U^{(\rho)}_{\mu_2,H_2,K_2}(z)$$

satisfasse à $\mathcal{U}(re^{i\theta_0}) = 0$ pour tout r positif, avec $0 < |\theta_0| < \pi$.

Définissons une fonction $\mathcal{H}(Z)$ pour $\mathcal{R}(Z) \geq 0$ avec $Z \neq 0$ par

$$\mathcal{H}(Z) = \mathcal{U}\left(Z^{\frac{2|\theta_0|}{\pi}}\right),$$

où $Z^{\frac{2|\theta_0|}{\pi}}$ sera pris avec la détermination d'argument $\frac{2|\theta_0|}{\pi}\operatorname{Arg} Z$, avec $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} Z \leq +\frac{\pi}{2}$.

$\mathcal{H}(Z)$ est harmonique dans le demi-plan $\mathcal{R}(Z) > 0$, continue pour $\mathcal{R}(Z) = 0$ avec $Z \neq 0$, et nulle pour ces valeurs. On peut la prolonger analytiquement dans le demi-plan $\mathcal{R}(Z) < 0$ en prenant

$$\mathcal{H}(X + iY) = -\mathcal{H}(-X + iY),$$

et l'on obtiendra ainsi une fonction harmonique dans tout le plan, sauf peut-être à l'origine.

Comme $\mathcal{U}(re^{-i\theta}) = \mathcal{U}(re^{i\theta})$, on a

$$\mathcal{H}(X - iY) = \mathcal{H}(X + iY)$$

et, en combinant avec la relation précédente,

$$\mathcal{H}(-Z) = -\mathcal{H}(Z).$$

De plus, si l'on pose $|Z| = R$, il résulte des propriétés établies plus haut pour $\mathcal{U}(Z)$, en prenant $\alpha = |\theta_0|$, que l'on a pour R infini

$$|\mathcal{H}(Z)| = O\left[R^{\frac{2(\rho+1)|\theta_0|}{\pi}}\right],$$

et pour R infiniment petit

$$|\mathcal{H}(Z)| = O\left[R^{\frac{2p|\theta_0|}{\pi}}\right].$$

La deuxième relation montre d'abord que $\mathcal{H}(Z)$ est harmonique à l'origine; on a

$$\mathcal{H}(0) = 0 \qquad \text{puisque} \qquad \mathcal{H}(-Z) = -\mathcal{H}(Z).$$

La fonction $\mathcal{H}(Z)$ est donc la partie réelle d'une fonction entière $\mathcal{F}(Z)$, que l'ou peut d'ailleurs supposer nulle à l'origine. $\mathcal{F}(Z)$ est alors impaire

On voit ensuite que, si $\mathcal{F}(Z)$ n'est pas identiquement nulle, elle est un polynome dont tous les termes sont de degré au plus égal à $\frac{2(p+1)|\theta_0|}{\pi}$ et au moins égal à $\frac{2p|\theta_0|}{\pi}$, degré qui est d'ailleurs impair.

Ceci n'est possible que s'il existe au moins un entier impair m satisfaisant à

$$\frac{2p|\theta_0|}{\pi} \leq m \leq \frac{2(p+1)|\theta_0|}{\pi},$$

ou

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta_0| \leq m\frac{\pi}{2p}.$$

Donc, s'il n'existe aucun tel entier, on a

$$\mathcal{F}(Z) \equiv 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{H}(Z) \equiv 0,$$

puis $\mathcal{U}(re^{i\theta}) = 0$ pour $|\theta| \leq |\theta_0|$ et par suite $\mathcal{U}(z) = 0$ dans tout le domaine H.

5.12. Il est clair que, comme dans le cas d'un domaine ou d'un segment de Ox, la connaissance de la limite $U(z)$ de $\frac{1}{\varphi(n)}\log|\Pi_n(z)|$ sur un segment S satisfaisant à la condition indiquée au paragraphe 5.9 détermine la fonction μ vers laquelle les fonctions μ_n convergent vaguement et, en fonction de A, les limites h et k de $S_n(A)$ et $\Sigma_n(A)$.

L'égalité $U^{(p)}_{\mu,H,K}(z) = U(z)$, qui a lieu sur le segment S, détermine μ, H et K; puis h et k sont donnés par les formules écrites plus haut.

Mais, ici, il n'existe pas un procédé aussi simple pour la détermination effective de μ, H et K.

VI. — Examen d'un cas particulier.

6.1. D'après ce qui précède, les produits canoniques $\Pi_n(z)$ étant de même genre fini p et à zéros réels et négatifs, si dans un domaine D sans point commun avec la demi-droite Ox', ou sur un segment de Ox, ou même sur un segment satisfaisant à la condition indiquée au paragraphe 5.9., la fonction $\frac{1}{\varphi(n)}\log|\Pi_n(z)|$ converge vers une fonction limite $U(z)$, alors, dans le

domaine Π constitué par le plan privé de la demi-droite Ox', la détermination réelle pour z réel positif de $\frac{1}{\varphi(n)}\log\Pi_n(z)$ converge vers une fonction limite $\Psi(z)$. Celle-ci appartient à la famille des fonctions $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ définies au paragraphe 5.4, et même plus précisément à la famille des fonctions $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ pour lesquelles H et K sont du signe de $(-1)^p$.

Elle est entièrement déterminée par le fait que sa partie réelle est égale à $U(z)$ dans le domaine ou sur le segment considéré.

6.2. D'autre part on peut énoncer le résultat suivant :

La fonction μ *(possédant les propriétés indiquées au paragraphe* 5.4*) et les constantes* H *et* K *du signe de* $(-1)^p$ *étant fixées, et* A *étant un nombre réel positif quelconque tel que* μ *soit continue pour* $t = A$*, pour que la suite des produits canoniques* $\Pi_n(z)$ *de genre p et à zéros réels et négatifs possède la propriété que, dans le plan privé de la demi-droite* Ox'*, la détermination réelle pour z réel positif de la fonction* $\frac{1}{\varphi(n)}\log\Pi_n(z)$ *converge vers* $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$*, il faut et il suffit que :*

1° *la suite des fonctions croissantes* μ_n *définies comme plus haut soit vaguement convergente vers la fonction* μ*;*

2° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)}S_n(A)$ *tende vers la limite h définie par l'égalité :*

$$\frac{(-1)^p}{p}\left[h-\int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p}\right]=H \qquad \text{ou} \qquad h-\int_0^A \log\frac{1}{t}\,d\mu(t)=H$$

suivant que $p \neq 0$ *ou* $p = 0$*;*

3° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)}\Sigma_n(A)$ *tende vers la limite k définie par l'égalité*

$$\frac{(-1)^p}{p+1}\left[k-\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}}\right]=K.$$

La convergence de $\frac{1}{\varphi(n)}\log|\Pi_n(z)|$ *vers* $U^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ *dans un domaine, ou sur un segment de* Ox*, ou même sur un segment satisfaisant à la condition indiquée au paragraphe* 5.9*, suffit à entraîner ces conditions.*

Si la fonction μ est continue quel que soit t, la condition que la suite des fonctions μ_n converge vaguement vers μ équivaut à celle que, pour $t > 0$, $\mu_n(t)$ tende vers $\mu(t)$; de plus, on peut choisir A tout à fait arbitrairement.

6.3. Examinons s'il est possible, avec un choix convenable de μ, H et K, que l'on ait

$$\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z) = az^\rho,$$

a et ρ étant deux constantes réelles (avec $a \neq 0$ et $\rho \geq 0$) et z^ρ étant pris avec la détermination réelle et positive pour z réel positif.

Le théorème II du paragraphe 5.5 montre que la fonction μ doit être équivalente à celle qui vaut 0 pour $t \leq 0$ et $\frac{a}{\pi} t^{\rho} \sin \pi\rho$ pour $t > 0$. Cette dernière étant continue quel que soit t, nous pouvons même dire *égale* au lieu de *équivalente*.

Si ρ n'est pas entier, on a $\sin \pi\rho \neq 0$; la croissance de μ nécessite que $a \sin \pi\rho > 0$ et les autres conditions que doit remplir μ se traduisent par $p < \rho < p+1$ [en tenant compte de celle-ci, la première équivaut à $(-1)^p a > 0$].

Ces conditions étant remplies, en prenant $\mu(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\mu(t) = \frac{a}{\pi} t^{\rho} \sin \pi\rho$ pour $t > 0$, on trouve que l'intégrale qui figure dans l'expression de $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ est égale à az^{ρ}.

On aura alors

$$\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z) = az^{\rho}$$

en prenant en outre $H = K = 0$.

Si ρ est entier on doit avoir $\mu(t) = 0$. La fonction $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z)$ doit donc se réduire à $Hz^p + Kz^{p+1}$, qui ne peut être égal à az^{ρ} que si $\rho = p$ ou $\rho = p+1$. Si $\rho = p$, on aura $\Psi^{(\rho)}_{\mu,H,K}(z) = az^{\rho}$ en prenant $H = a$, $K = 0$; si $\rho = p+1$, il faudra prendre $H = 0$, $K = a$.

Dans les deux cas H et K ne peuvent être du signe de $(-1)^p$ que si $(-1)^p a > 0$.

En résumé, *on ne peut avoir* $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z) = az^{\rho}$, *en prenant* H *et* K *du signe de* $(-1)^p$, *que si*

$$p \leq \rho \leq p+1 \qquad \text{et} \qquad (-1)^p a > 0.$$

Si $p < \rho < p+1$, *on a* $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z) = az^{\rho}$ *en prenant* $\mu(t)$ *égale à* 0 *pour* $t \leq 0$ *et à* $\frac{a}{\pi} t^{\rho} \sin \pi\rho$ *pour* $t > 0$, *et* $H = K = 0$.

Si $\rho = p$, *on a* $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z) = az^{\rho}$ *en prenant* $\mu(t) = 0$, $H = a$, $K = 0$.

Si $\rho = p+1$, *on a* $\Psi^{(p)}_{\mu,H,K}(z) = az^{\rho}$ *en prenant* $\mu(t) = 0$, $H = 0$, $K = a$.

6.4. En appliquant d'abord le résultat énoncé au paragraphe 6.1, on voit que, les produits canoniques $\Pi_n(z)$ de genre p ayant tous leurs zéros réels et négatifs, la fonction $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(x)$ ne peut tendre vers ax^{ρ} pour x réel et positif que si

$$p \leq \rho \leq p+1 \qquad \text{et} \qquad (-1)^p a > 0.$$

Ces inégalités étant supposées satisfaites, le résultat énoncé au paragraphe 6.2 donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans le domaine Π, la détermination réelle pour z réel positif de $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$ converge vers az^{ρ}. On peut prendre $A = 1$.

En supposant $p > 0$, on trouve que :

a. si $p < \rho < p+1$, *il faut et il suffit que lorsque n tend vers l'infini*

1° *pour t positif* $\mu_n(t)$ *tende vers* $\frac{a}{\pi} t^\rho \sin \pi\rho$,

2° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(1)$ *tende vers* $\frac{\rho}{\rho - p} \frac{a}{\pi} \sin \pi\rho$,

3° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(1)$ *tende vers* $\frac{\rho}{p+1-\rho} \frac{a}{\pi} \sin \pi\rho$.

b. si $\rho = p$, *il faut et il suffit que :*

1° *pour t positif* $\mu_n(t)$ *tende vers* 0,

2° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(1)$ *tende vers* $(-1)^p pa$,

3° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(1)$ *tende vers* 0.

c. Si $\rho = p+1$, *il faut et il suffit que :*

1° *pour t positif* $\mu_n(t)$ *tende vers* 0,

2° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(1)$ *tende vers* 0,

3° *l'expression* $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(1)$ *tende vers* $(-1)^p (p+1) a$.

Dans le cas où $p = 0$, *il faut remplacer dans ces énoncés* $\frac{\rho}{\rho - p}$ *par* $\frac{1}{\rho}$ *et* $(-1)^p pa$ *par a.*

Dans tout les cas la convergence de $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(x)$ *vers* ax^ρ *pour x réel positif suffit à entraîner les conditions indiquées.*

Il en est de même de la convergence de $\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(re^{i\theta})|$ *vers* $ar^\rho \cos \rho\theta$ *pour une valeur de* θ *de module* $< \pi$ *et telle qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à*

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p}.$$

VII. — Étude des fonctions entières orientées.

7.1. Une fonction entière est dite orientée si, ses zéros étant rangés par ordre de module croissant en la suite $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, la demi-droite Oz_n a une position limite Ou pour n infini. On dira que cette fonction est orientée dans la direction Ou. Nous nous proposons essentiellement ici d'appliquer les résultats précédents à l'étude de la relation entre la distribution des zéros d'une telle fonction, supposée de genre fini, et sa croissance en fonction de $|z|$ lorsque le point z se déplace sur une demi-droite issue de O.

On peut toujours se ramener par un changement de variable linéaire au cas où Ou est la direction d'argument π.

Nous commencerons par étudier la relation entre la distribution des zéros d'un produit canonique $\Pi(z)$ de genre fini et *à zéros tous réels et négatifs* et la croissance de $\Pi(z)$ lorsque z s'éloigne sur une demi-droite issue de O.

Nous désignerons les zéros de $\Pi(z)$ par $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_r, \ldots$, de sorte que

$$\Pi(z)=\Pi\left(1+\frac{z}{\alpha_r}\right)e^{-\frac{z}{\alpha_r}+\ldots+(-1)^p\frac{z^p}{\alpha_r^p}} \quad (1),$$

et nous appellerons $\nu(t)$ le nombre de zéros de module au plus égal à t.

Nous considérerons dans le plan privé de la demi-droite Ox' la détermination réelle pour z réel positif de $\log\Pi(z)$ et nous la désignerons par $\mathrm{Log}\Pi(z)$.

La méthode consistera à considérer la famille des produits canoniques $\Pi(\lambda z)$, où λ est un nombre réel positif quelconque, et à en extraire des suites.

$\Pi(\lambda z)$ est un produit canonique de même genre que $\Pi(z)$ et à zéros réels et négatifs $\frac{-\alpha_1}{\lambda}, \frac{-\alpha_2}{\lambda}, \ldots, \frac{-\alpha_r}{\lambda}, \ldots$.

Si l'on considère dans le plan privé de la demi-droite Ox' la détermination réelle pour z réel et positif de $\log\Pi(\lambda z)$, elle sera égale à $\mathrm{Log}\Pi(\lambda z)$.

En donnant à λ une suite de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, on obtiendra une suite de produits canoniques $\Pi_1(z), \Pi_2(z), \ldots, \Pi_n(z), \ldots$, où $\Pi_n(z)$ aura pour zéros $-\alpha_1^{(n)}=\frac{-\alpha_1}{\lambda_n}, \ldots, -\alpha_r^{(n)}=\frac{-\alpha_r}{\lambda_n}, \ldots$.

Si l'on cherche à appliquer à cette suite l'un des résultats du paragraphe 6.4, on aura à considérer la fonction $\nu_n(t)$ égale au nombre de zéros de $\Pi_n(z)$ au moins égaux à $-t$ et les expressions $S_n(1)$ et $\Sigma_n(1)$. On aura

$$\nu_n(t)=\nu(\lambda_n t)$$

et

$$S_n(1)=\sum_{\alpha_r^{(n)}\leq 1}\frac{1}{[\alpha_r^{(n)}]^p}=\lambda_n^p\sum_{\alpha_r\leq\lambda_n}\frac{1}{\alpha_r^p} \qquad \text{si } p>0,$$

$$S_n(1)=\sum_{\alpha_r^{(n)}\leq 1}\log\frac{1}{\alpha_r^{(n)}}=\sum_{\alpha_r\leq\lambda_n}\log\frac{\lambda_n}{\alpha_r} \qquad \text{si } p=0,$$

et

$$\Sigma_n(1)=\sum_{\alpha_r^{(n)}>1}\frac{1}{[\alpha_r^{(n)}]^{p+1}}=\lambda_n^{p+1}\sum_{\alpha_r>\lambda_n}\frac{1}{\alpha_r^{p+1}}.$$

On est donc conduit à former la fonction $\nu(\lambda t)$ et les expressions S_λ et Σ_λ définies par

$$S_\lambda=\lambda^p\sum_{\alpha_r\leq\lambda}\frac{1}{\alpha_r^p} \quad \text{si } p>0 \qquad \text{et} \qquad S_\lambda=\sum_{\alpha_r\leq\lambda}\log\frac{\lambda}{\alpha_r} \quad \text{si } p=0,$$

$$\Sigma_\lambda=\lambda^{p+1}\sum_{\alpha_r>\lambda}\frac{1}{\alpha_r^{p+1}},$$

(1) Il est bien entendu que p est pris le plus petit possible pour que ce produit soit convergent.

de manière que

$$S_n(1) = S_{\lambda_n} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_n(1) = \Sigma_{\lambda_n}.$$

Il peut être commode de transformer ces expressions comme il suit :

si $p > 0$, on a

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^p} = \int_0^{\lambda} \frac{d\nu(t)}{t^p}$$

et en intégrant par parties on trouve

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\nu(t)}{t^p} = \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^p} + p \int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{p+1}};$$

de même, pour $p = 0$,

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \log \frac{\lambda}{\alpha_r} = \int_0^{\lambda} \log \frac{\lambda}{t}\, d\nu(t) = \int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)\,dt}{t};$$

dans tous les cas

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^{p+1}} = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{t^{p+1}} = \frac{-\nu(\lambda)}{\lambda^{p+1}} + (p+1) \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{p+2}} \quad (1).$$

On a ainsi

$$S_\lambda = \nu(\lambda) + p\lambda^p \int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{p+1}} \quad \text{si } p > 0, \qquad S_\lambda = \int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)\,dt}{t} \quad \text{si } p = 0,$$

et

$$\Sigma_\lambda = -\nu(\lambda) + (p+1)\lambda^{p+1} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{p+2}}.$$

7.2. Comme premier exemple, supposons que l'on ait, lorsque t tend vers $+\infty$, $\nu(t) \sim At^\rho$, avec ρ positif et non entier.

Le genre de $\Pi(z)$ est alors l'entier p tel que

$$p \leq \rho < p+1.$$

Si $p > 0$, on trouve que, pour λ infini, on a

$$\nu(\lambda t) \sim A t^\rho \lambda^\rho \qquad (t \text{ fixe}),$$

$$S_\lambda \sim \frac{A\rho}{\rho - p} \lambda^\rho,$$

$$\Sigma_\lambda \sim \frac{A\rho}{p+1-\rho} \lambda^\rho.$$

---

(1) Il faut observer ici que la convergence de l'intégrale $\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{t^{p+1}}$ entraîne que pour t infini $\frac{\nu(t)}{t^{p+1}}$ tend vers zéro

Donc, quelle que soit la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ tendant vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\lambda_n^\rho}\nu(\lambda_n t) \quad \text{tend pour } t>0 \text{ vers } A t^\rho,$$

$$\frac{1}{\lambda_n^\rho} S_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } \frac{A\rho}{\rho - p},$$

et

$$\frac{1}{\lambda_n^\rho} \Sigma_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } \frac{A\rho}{p+1-\rho}.$$

Par suite, dans le plan privé de la demi-droite Ox', la fonction $\frac{1}{\lambda_n^\rho}\operatorname{Log}\Pi(\lambda_n z)$ converge vers $\frac{\pi A}{\sin \pi\rho} z^\rho$, où z^ρ est pris avec la détermination réelle et positive pour z réel positif.

Si $p=0$, au lieu de $S_\lambda \sim \frac{A\rho}{\rho - p}\lambda^\rho$ on a $S_\lambda \sim \frac{A\lambda^\rho}{\rho}$ et l'on arrive au même résultat.

Ceci étant vrai quelle que soit la suite λ_n, on peut dire que, lorsque λ tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\lambda^\rho}\operatorname{Log}\Pi(\lambda z) \quad \text{tend vers } \frac{\pi A}{\sin \pi\rho} z^\rho.$$

En particulier, pour $z=1$,

$$\frac{1}{\lambda^\rho}\operatorname{Log}\Pi(\lambda) \quad \text{tend vers } \frac{\pi A}{\sin \pi\rho}.$$

Autrement dit, si λ est réel et positif, $\operatorname{Log}\Pi(\lambda)$ est équivalent pour λ infini à $\frac{\pi A}{\sin \pi\rho}\lambda^\rho$.

On peut aussi prendre $z = e^{i\theta}$, avec $-\pi < \theta < +\pi$.

On voit alors que, si λ est réel et positif, on a pour λ infini

$$\operatorname{Log}\Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim \frac{\pi A}{\sin \pi\rho} e^{\rho\theta i}\lambda^\rho.$$

7.2.1. Supposons maintenant que l'on ait lorsque t tend vers $+\infty$: $\nu(t) \sim A t^p$, avec p entier positif.

$\Pi(z)$ est alors de genre p et l'on trouve que pour λ infini

$$\nu(\lambda t) \sim A t^p \lambda^p,$$
$$S_\lambda \sim p A \lambda^p \log\lambda,$$
$$\Sigma_\lambda \sim p A \lambda^p.$$

Donc, quelle que soit la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ tendant vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\lambda_n^p \log\lambda_n}\nu(\lambda_n t) \quad \text{tend vers } 0,$$

$$\frac{1}{\lambda_n^p \log\lambda_n} S_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } p A,$$

$$\frac{1}{\lambda_n^p \log\lambda_n} \Sigma_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } 0,$$

d'où résulte que $\frac{1}{\lambda_n^p \log\lambda_n}\operatorname{Log}\Pi(\lambda_n z)$ tend vers $(-1)^p A z^p$.

Par suite, quand λ tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\lambda^p \log\lambda} \operatorname{Log}\Pi(\lambda z)$ tend vers $(-1)^p A z^p$.

En faisant alors $z = 1$, on voit que, si λ est réel et positif et tend vers $+\infty$, on a

$$\operatorname{Log}\Pi(\lambda) \sim (-1)^p A \lambda^p \log\lambda.$$

En faisant $z = e^{i\theta}$, avec $-\pi < \theta < +\pi$, on voit que

$$\operatorname{Log}\Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim (-1)^p A e^{p\theta i} \lambda^p \log\lambda.$$

7.2.2. Comme autre exemple, prenons encore

$$\Pi(z) = \prod_{0}^{-\infty} \left(1 + \frac{z}{2^n}\right).$$

On trouve que pour t infini positif

$$\nu(t) \sim \frac{\log t}{\log 2},$$

que pour λ infini

$$S_\lambda \sim \frac{(\log\lambda)^2}{2\log 2},$$

et que $\Sigma_\lambda < 2$.

Par conséquent, pour λ infini

$$\frac{1}{(\log\lambda)^2} \nu(\lambda t) \quad \text{tend vers } 0,$$

$$\frac{1}{(\log\lambda)^2} S_\lambda \quad \text{tend vers } \frac{1}{2\log 2},$$

$$\frac{1}{(\log\lambda)^2} \Sigma_\lambda \quad \text{tend vers } 0.$$

On en conclut que, dans le plan privé de la demi-droite Ox',

$$\frac{1}{(\log\lambda)^2} \operatorname{Log}\Pi(\lambda z) \text{ tend vers } \frac{1}{2\log 2}.$$

En faisant $z = e^{i\theta}$, avec $-\pi < \theta < +\pi$, on voit que pour λ réel positif infiniment grand

$$\operatorname{Log}\Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim \frac{(\log\lambda)^2}{2\log 2}.$$

7.3. Dans les exemples qui précèdent, nous avons déduit de la distribution des zéros de $\Pi(z)$ la croissance de $\operatorname{Log}\Pi(z)$ quand z s'éloigne sur une demi-droite issue de O et distincte de Ox'.

Nous allons voir maintenant que les résultats du paragraphe 6.3 permettent dans certains cas de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que, pour x réel positif infiniment grand, $\log\Pi(x)$ soit équivalent à une fonction donnée.

Soit $\rho(x)$ une fonction définie pour x positif assez grand, dérivable, satisfaisant à

$$q < \varliminf_{x \to +\infty} \rho(x) \leq \varlimsup_{x \to +\infty} \rho(x) < q+1 \qquad (\text{avec } q \text{ entier} \geq 0)$$

et telle que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\rho'(x)x\log x$ tende vers zéro.

Nous allons montrer que *le produit canonique* $\Pi(z)$ *ne peut satisfaire pour* x *réel positif infiniment grand à* $\log\Pi(x) \sim A x^{\rho(x)}$, *avec* $A \neq 0$, *que si* $(-1)^q A > 0$, *et que, cette condition étant remplie, il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que l'on ait pour* t *positif infiniment grand*

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi\rho(t) \quad (^1).$$

a. Supposons donc d'abord que l'on ait quand x réel tend vers $+\infty$

$$\log\Pi(x) \sim A x^{\rho(x)}.$$

On voit que, si λ_n tend vers $+\infty$ de manière que $\rho(\lambda_n)$ ait une limite ρ_0 (nécessairement comprise entre q et $q+1$), pour x réel positif $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \operatorname{Log}\Pi(\lambda_n x)$ tend vers $A x^{\rho_0}$.

Les résultats du paragraphe 6.4 montrent d'abord que ceci exige que le genre p de $\Pi(z)$ soit égal à q et que $(-1)^q A > 0$, puis que pour t positif $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \nu(\lambda_n t)$ doit tendre vers $\frac{A}{\pi} t^{\rho_0} \sin \pi\rho_0$.

En particulier, pour $t = 1$,

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \nu(\lambda_n) \quad \text{doit tendre vers } \frac{A}{\pi} \sin \pi\rho_0.$$

Par suite,

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)} \sin \pi\rho(\lambda_n)} \nu(\lambda_n) \quad \text{doit tendre vers } \frac{A}{\pi}.$$

Comme de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$ on peut en extraire une qui satisfasse à la condition indiquée, on voit que pour λ infini

$$\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)} \sin \pi\rho(\lambda)} \nu(\lambda) \quad \text{tend vers } \frac{A}{\pi};$$

autrement dit

$$\nu(\lambda) \sim \frac{A}{\pi} \lambda^{\rho(\lambda)} \sin \pi\rho(\lambda).$$

---

(1) Ce résultat a été établi pour la première fois par M. Valiron [*Annales de Toulouse*, (3), 5, 1913, p. 117-257].

b. Réciproquement, supposons que l'on ait pour t tendant vers $+\infty$

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t).$$

Ceci entraîne d'abord que $H(z)$ soit de genre q.

D'autre part, on a pour λ infini

$$\int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}} \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\lambda^{\rho(\lambda)-q}}{\rho(\lambda)-q},$$

car la dérivée du second membre est équivalente à $\frac{\nu(\lambda)}{\lambda^{q+1}}$. De même,

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+2}} \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\lambda^{\rho(\lambda)-q-1}}{q+1-\rho(\lambda)},$$

car la dérivée du second membre est équivalente à $\frac{-\nu(\lambda)}{\lambda^{q+2}}$.

Par suite, si $q > 0$, on a

$$S_{\lambda} \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\rho(\lambda)}{\rho(\lambda)-q} \lambda^{\rho(\lambda)},$$

si $q = 0$, on a

$$S_{\lambda} \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\lambda^{\rho(\lambda)}}{\rho(\lambda)},$$

et dans tous les cas

$$\Sigma_{\lambda} \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\rho(\lambda)}{q+1-\rho(\lambda)} \lambda^{\rho(\lambda)}.$$

On voit alors que, si λ_n tend vers $+\infty$ de manière que $\rho(\lambda_n)$ ait une limite ρ_0,

(a) pour $t > 0$, $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \nu(\lambda_n t)$ tend vers $\frac{A}{\pi} \sin \pi \rho_0 t^{\rho_0}$,

(b) $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} S_{\lambda_n}$ tend vers $\frac{A}{\pi} \sin \pi \rho_0 \frac{\rho_0}{\rho_0 - q}$ dans le cas où $q > 0$

et vers $\frac{A}{\pi \rho_0} \sin \pi \rho_0$ dans le cas où $q = 0$,

(c) $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \Sigma_{\lambda_n}$ tend vers $\frac{A}{\pi} \sin \pi \rho_0 \frac{\rho_0}{q-1-\rho_0}$.

Par suite, dans le plan privé de la demi-droite Ox', la fonction

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \operatorname{Log} H(\lambda_n z) \quad \text{tend vers } A z^{\rho_0},$$

où z^{ρ_0} est pris avec la détermination réelle et positive pour z réel positif.

En particulier, pour $z = 1$,

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \operatorname{Log} H(\lambda_n) \quad \text{tend vers } A.$$

Comme de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$ on peut en extraire une satisfaisant à la condition indiquée, on voit que pour λ infini $\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)}}\operatorname{Log}\Pi(\lambda)$ tend vers A. Autrement dit, pour λ réel positif infiniment grand,

$$\operatorname{Log}\Pi(\lambda) \sim A\lambda^{\rho(\lambda)}.$$

Notons qu'en faisant $z = e^{i\theta}$, avec $-\pi < \theta < +\pi$, au lieu de $z = 1$, l'on verrait que pour λ infini $\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)}e^{i\theta\rho(\lambda)}}\operatorname{Log}\Pi(\lambda e^{i\theta})$ tend vers A, c'est-à-dire que, pour λ réel positif infiniment grand et θ fixe,

$$\operatorname{Log}\Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim A\lambda^{\rho(\lambda)}e^{i\theta\rho(\lambda)}.$$

On verrait aussi que $\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)}}\left[\log|\Pi(\lambda e^{i\theta})| - A\lambda^{\rho(\lambda)}\cos\theta\rho(\lambda)\right]$ tend vers zéro, de sorte que

$$\log|\Pi(\lambda e^{i\theta})| = A\lambda^{\rho(\lambda)}\cos\theta\rho(\lambda) + o[\lambda^{\rho(\lambda)}].$$

Si $\cos\theta\rho$ ne s'annule pas pour $\varliminf_{x\to+\infty}\rho(x) \leq \rho \leq \varlimsup_{x\to+\infty}\rho(x)$, on peut écrire

$$\log|\Pi(\lambda e^{i\theta})| \sim A\lambda^{\rho(\lambda)}\cos\theta\rho(\lambda).$$

Notons que, *la fonction $\rho(x)$ satisfaisant aux conditions indiquées, si $\Pi(z)$ est supposé de genre q, le fait que, pour une valeur de θ de module $< \pi$ et telle qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à*

$$m\frac{\pi}{2(q+1)} \leq |\theta| \leq m\frac{\pi}{2q},$$

l'on ait pour r infini

$$\log|\Pi(re^{i\theta})| \sim Ar^{\rho(r)}\cos\theta\rho(r)$$

suffit à entraîner que pour t infini

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi}t^{\rho(t)}\sin\pi\rho(t).$$

En effet, si λ_n tend vers $+\infty$ de façon que $\rho(\lambda_n)$ ait une limite ρ_0, $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}}\log|\Pi(\lambda_n re^{i\theta})|$ tend alors vers $Ar^{\rho_0}\cos\theta\rho_0$, ce qui entraîne les mêmes conditions que la convergence de $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}}\log\Pi(\lambda_n x)$ vers Ax^{ρ_0} pour x réel positif.

7.3.1. On peut penser qu'il est peut-être intéressant de considérer le cas particulier où $\rho(x)$ a une limite ρ pour x infini.

On voit que l'ensemble des fonctions de la forme $x^{\rho(x)}$, où $\rho(x)$ est dérivable et telle que pour x infini positif $\rho'(x).x\log x$ tende vers o, et tend en outre vers ρ pour x infini positif, est identique à l'ensemble des fonctions de la forme $x^{\rho}\omega(x)$, où $\omega(x)$ est positive, dérivable et telle que pour x infini $\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}$ tende vers zéro.

Ceci nous amène à l'énoncé suivant :

Si ρ n'est pas entier et si $\omega(x)$ est une fonction positive définie pour x positif assez grand, dérivable, et telle que pour x infini positif $\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}$ tende vers 0, on ne peut avoir pour x réel positif infiniment grand $\log\Pi(x) \sim A x^{\rho}\omega(x)$ (avec $A \neq 0$), que si $(-1)^q A > 0$, où q est la partie entière de ρ, et, cette condition étant remplie, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait pour t tendant vers $+\infty$

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho}\omega(t)\sin\pi\rho.$$

Nous laissons au lecteur le soin de voir ce que donne la remarque qui termine le paragraphe précédent.

7.4. Nous allons voir que, même si ρ est un nombre entier positif ou nul, notre méthode permet encore de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait pour x réel positif infiniment grand

$$\log\Pi(x) \sim A x^{\rho}\omega(x) \qquad (\text{avec } A \neq 0),$$

$\omega(x)$ étant toujours une fonction donnée satisfaisant aux conditions que nous venons d'indiquer.

Supposons donc d'abord que ρ soit égal au nombre entier positif q.

Notons que les conditions imposées à $\omega(x)$ entraînent que, si k est une constante positive quelconque, on a, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\omega(kx) \sim \omega(x).$$

Il résulte de là l'hypothèse que pour x réel positif infiniment grand

$$\log\Pi(x) \sim A x^{q}\omega(x)$$

équivaut à celle que, si λ tend vers $+\infty$, pour x réel positif

$$\frac{1}{\lambda^{q}\omega(\lambda)}\log\Pi(\lambda x) \quad \text{tend vers } A x^{q},$$

ou encore que, pour x réel positif, quelle que soit la suite de valeurs λ_n tendant vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\lambda_n^{q}\omega(\lambda_n)}\log\Pi(\lambda_n x) \quad \text{tend vers } A x^{q}.$$

On sait que, si p est le genre de $\Pi(z)$, qui est aussi celui de tous les produits canoniques $\Pi(\lambda_n z)$, ceci n'est possible que si

$$p \leq q \leq p+1 \qquad [\text{et } (-1)^{p} A > 0].$$

Il faut donc que p soit égal à q ou à $q-1$.

Si l'on suppose $p = q$ [ce qui nécessite $(-1)^q A > 0$], pour que pour x réel positif $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \log \Pi(\lambda_n x)$ tende vers $A x^q$, il faut et il suffit que

1° pour t positif $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \nu(\lambda_n t)$ tende vers 0,

2° l'expression $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} S_{\lambda_n}$ tende vers $(-1)^q q A$,

3° l'expression $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \Sigma_{\lambda_n}$ tende vers 0.

Pour que ceci soit satisfait quelle que soit la suite λ_n tendant vers $+\infty$, il faut et il suffit que pour λ infini

1° pour t positif $\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \nu(\lambda t)$ tende vers 0,

2° l'expression $\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} S_\lambda$ tende vers $(-1)^q q A$.

3° l'expression $\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \Sigma_\lambda$ tende vers 0.

La première condition équivaut à $\nu(t) = o[t^q \omega(t)]$ pour t infini positif, et les deux autres se traduisent par $S_\lambda \sim (-1)^q q A \lambda^q \omega(\lambda)$ et $\Sigma_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)]$ pour λ infini positif.

Comme $\frac{1}{\lambda^q} S_\lambda$, qui est égal à $\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$, est nécessairement une fonction non décroissante de λ infiniment grande avec λ, ceci n'est possible que si $\omega(x)$ tend vers $+\infty$ pour x infini et

$$\inf_{u \geq x} \omega(u) \sim \omega(x) \quad (1).$$

Si l'on suppose $p = q - 1$ [ce qui nécessite $(-1)^q A < 0$], pour que pour x réel positif $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \log \Pi(\lambda_n x)$ tende vers $A x^q$, il faut et il suffit que :

1° pour t positif $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \nu(\lambda_n t)$ tende vers 0,

2° l'expression $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} S_{\lambda_n}$ tende vers 0,

3° l'expression $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \Sigma_{\lambda_n}$ tende vers $(-1)^{q-1} q A$.

Pour que ceci soit vrai quelle que soit la suite λ_n tendant vers $+\infty$, il faut et il suffit que l'on ait pour t infini positif

$$\nu(t) = o[t^q \omega(t)],$$

(1) Ce ne serait pas le cas par exemple pour

$$\omega(x) = \log(\log x) \{2 + \sin[\log(\log x)]\}.$$

et pour λ infini positif

$$S_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)] \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\lambda \sim (-1)^{q-1} q A \lambda^q \omega(\lambda).$$

Comme $\frac{1}{\lambda^q}\Sigma_\lambda$, qui est égal à $\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$, est nécessairement une fonction non croissante de λ qui tend vers zéro pour λ infini positif, ceci n'est possible que si $\omega(x)$ tend vers zéro pour x infini positif et

$$\operatorname*{Sup}_{u} \omega(u) \sim \omega(x) \quad (1).$$

Au total, on voit que l'on ne peut avoir pour x réel positif infiniment grand $\log \Pi(x) \sim A x^q \omega(x)$, avec les conditions que nous avons indiquées pour $\omega(x)$, que si :

ou bien $\omega(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et $\operatorname*{Inf}_{u>x} \omega(u) \sim \omega(x)$ et $(-1)^q A > 0$,

ou bien $\omega(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ et $\operatorname*{Sup}_{x<u} \omega(u) \sim \omega(x)$ et $(-1)^q A < 0$.

Dans le premier cas, il faut et il suffit pour que l'on ait la propriété énoncée que $\Pi(z)$ soit de genre q et que l'on ait pour t infini positif

$$\nu(t) = o[t^q \omega(t)],$$

et pour λ infini positif

$$S_\lambda \sim (-1)^q q A \lambda^q \omega(\lambda) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda)$$

et

$$\Sigma_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Dans le second cas, il faut et il suffit que $\Pi(z)$ soit de genre $q-1$ et que l'on ait pour t infini positif

$$\nu(t) = [t^q \omega(t)],$$

et pour λ infini positif

$$S_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)]$$

et

$$\Sigma_\lambda \sim (-1)^{q-1} q A \lambda^q \omega(\lambda) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda).$$

Nous allons voir que dans les deux cas ces conditions se réduisent.

---

(1) Ce ne serait pas le cas pour

$$\omega(x) = \frac{1}{\log(\log x)} \{2 + \sin[\log(\log x)]\}.$$

a. Dans le premier cas, si l'on a pour λ infini

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q \, A \, \omega(\lambda),$$

les autres conditions sont automatiquement satisfaites.

En effet, ceci peut se traduire par

$$\frac{\nu(\lambda)}{\lambda^q} + q \int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^q q \, A \, \omega(\lambda), \tag{1}$$

ou

$$\frac{\nu(\lambda)}{\lambda} + q\lambda^{q-1} \int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^q q \, A \lambda^{q-1} \omega(\lambda).$$

Le premier membre est la dérivée à droite de $\lambda^q \int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}}$ et le second membre est équivalent à la dérivée de $(-1)^q A \lambda^q \omega(\lambda)$, fonction qui tend vers l'infini. On a donc pour λ infini

$$\lambda^q \int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^q A \lambda^q \omega(\lambda)$$

et en combinant ceci avec la relation (1) on trouve

$$\nu(\lambda) = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Cette dernière relation montre que le genre de $\Pi(z)$ ne dépasse pas q.

Comme par ailleurs $\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$ croît indéfiniment avec λ, il est exactement égal à q.

D'autre part, pour λ infini $\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$ tend vers zéro et sa dérivée est équivalente à $\frac{-\omega(\lambda)}{\lambda^2}$. La relation $\frac{\nu(\lambda)}{\lambda^{q+2}} = o\left[\frac{\omega(\lambda)}{\lambda^2}\right]$ entraîne donc

$$\int_\lambda^{+\infty} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+2}} = o\left[\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\right].$$

La formule

$$\Sigma_\lambda = -\nu(\lambda) + (q+1)\lambda^{q+1} \int_\lambda^{+\infty} \frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+2}}$$

montre alors que

$$\Sigma_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

b. Dans le second cas, si la série $\sum \frac{1}{\alpha_r^q}$ est convergente et si l'on a pour λ infini

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q \, A \, \omega(\lambda),$$

les autres conditions sont automatiquement satisfaites.

D'abord $\Pi(z)$ est bien de genre $q-1$.

Si $q=1$, cela résulte de la convergence de $\sum\frac{1}{\alpha_r}$, et si $q>1$, cela résulte de ce que $\sum\frac{1}{\alpha_r^q}$ converge et $\sum\frac{1}{\alpha_r^{q-1}}$ diverge. En effet, si cette dernière série était convergente, on aurait

$$\sum_{\alpha_r>\lambda}\frac{1}{\alpha_r^q}<\frac{1}{\lambda}\sum_{\alpha_r>\lambda}\frac{1}{\alpha_r^{q-1}},$$

d'où, pour λ infini,

$$\sum_{\alpha_r>\lambda}\frac{1}{\alpha_r^q}=o\left[\frac{1}{\lambda}\right],$$

ce qui est incompatible avec la relation donnée.

Ensuite la relation

$$\sum_{\alpha_r>\lambda}\frac{1}{\alpha_r^q}\sim(-1)^{q-1}q\,A\,\omega(\lambda)\qquad\text{pour }\lambda\text{ infini}$$

peut se traduire par

$$\frac{-\nu(\lambda)}{\lambda^q}+q\int_\lambda^{+\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}}\sim(-1)^{q-1}q\,A\,\omega(\lambda),\tag{2}$$

ou

$$\frac{-\nu(\lambda)}{\lambda}+q\lambda^{q-1}\int_\lambda^{+\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}}\sim(-1)^{q-1}q\,A\lambda^{q-1}\omega(\lambda).$$

Le premier membre est la dérivée à droite de $\lambda^q\int_\lambda^{+\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{q-2}}$ et le second membre est équivalent à la dérivée de $(-1)^{q-1}A\lambda^q\omega(\lambda)$, fonction qui tend vers $+\infty$. On a donc pour λ infini

$$\lambda^q\int_\lambda^{+\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{q-1}}\sim(-1)^{q-1}A\lambda^q\omega(\lambda),$$

et en combinant ceci avec la relation (2) on trouve

$$\nu(\lambda)=o[\lambda^q\omega(\lambda)].$$

Pour λ infini, $\lambda\omega(\lambda)$ tend vers $+\infty$ et sa dérivée est équivalente à $\omega(\lambda)$. La relation $\frac{\nu(\lambda)}{\lambda^q}=o[\omega(\lambda)]$ entraîne donc

$$\int_0^\lambda\frac{\nu(t)\,dt}{t^q}=o[\lambda\omega(\lambda)].$$

Alors, si $q>1$, la formule

$$S_\lambda=\nu(\lambda)+(q-1)\lambda^{q-1}\int_0^\lambda\frac{\nu(t)\,dt}{t^q}$$

montre que pour λ infini

$$S_\lambda=o[\lambda^q\omega(\lambda)].$$

Si $q = 1$, la formule

$$S_\lambda = \int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t}$$

montre que

$$S_\lambda = o[\lambda\omega(\lambda)].$$

En définitive, on peut énoncer le résultat suivant :

Si q est un entier positif et $\omega(x)$ une fonction positive définie pour x positif assez grand, dérivable et telle que pour x infini positif $\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}$ tende vers zéro, le produit canonique $\Pi(z)$ de genre fini et à zéros réels et négatifs ne peut satisfaire pour x réel positif infiniment grand à

$$\log\Pi(x) \sim A x^q \omega(x)$$

que si l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :

(a). $\omega(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et

$$\operatorname*{Inf}_{u>x} \omega(u) \sim \omega(x) \qquad \text{et} \qquad (-1)^q A > 0.$$

(b). $\omega(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ et

$$\operatorname*{Sup}_{u>x} \omega(u) \sim \omega(x) \qquad \text{et} \qquad (-1)^q A < 0.$$

Dans le premier cas, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que pour λ infini

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda).$$

Dans le second cas, il faut et il suffit que la série $\sum \frac{1}{\alpha_r^q}$ soit convergente et que l'on ait pour λ infini

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda).$$

Dans les deux cas on voit aisément que la condition indiquée peut effectivement être satisfaite.

Remarquons que, lorsqu'elle est satisfaite, dans le plan privé de la demi-droite Ox', la fonction $\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \operatorname{Log}\Pi(\lambda z)$ tend pour r infini vers $A z^q$, d'où l'on déduit que, si $-\pi < \theta < -\pi$, l'on a pour λ réel positif infiniment grand

$$\log\Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim A \lambda^q \omega(\lambda) e^{q\theta i}$$

et

$$\log|\Pi(\lambda e^{i\theta})| = A \lambda^q \omega(\lambda) \cos q\theta + o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Si $\cos q\theta \neq 0$, on peut écrire

$$\log|\Pi(\lambda e^{i\theta})| \sim A \lambda^q \omega(\lambda) \cos q\theta.$$

Notons que, $\omega(x)$ *étant une fonction du type indiqué au début de l'énoncé précédent et satisfaisant à l'une des conditions* (a) *ou* (b), *si le genre* p *de* $\Pi(z)$ *est supposé* a priori *égal à* q *ou* $q-1$, *suivant le cas, le fait que, pour une valeur de* θ *de module* $<\pi$ *et telle qu'il n'existe aucun entier impair* m *satisfaisant à*

$$m\frac{\pi}{2(p+1)}\leq|\theta|\leq m\frac{\pi}{2p},$$

l'on ait pour r *infini*

$$\log|\Pi(re^{i\theta})|\sim Ar^{q}\omega(r)\cos q\theta$$

suffit à entraîner que pour λ *infini*

$$\sum_{\alpha_r\leq\lambda}\frac{1}{\alpha_r^{q}}\sim(-1)^{q}\quad qA\,\omega(\lambda)\qquad \textit{dans le cas } (a),$$

ou

$$\sum_{\alpha_r>\lambda}\frac{1}{\alpha_r^{q}}\sim(-1)^{q-1}qA\,\omega(\lambda)\qquad \textit{dans le cas } (b).$$

En effet, pour λ infini $\frac{1}{\lambda^{q}\omega(\lambda)}\log|\Pi(\lambda re^{i\theta})|$ tend alors vers $Ar^{q}\cos q\theta$, ce qui entraîne les mêmes conditions que la convergence de $\frac{1}{\lambda^{q}\omega(\lambda)}\log\Pi(\lambda x)$ vers Ax^{q} pour x réel positif.

7.5. On peut traiter de la même façon le cas où ρ serait nul.

La fonction ω étant toujours assujettie aux mêmes conditions, l'hypothèse que l'on ait pour x réel positif infiniment grand

$$\log\Pi(x)\sim A\omega(x)$$

équivaut à celle que, lorsque λ tend vers $+\infty$, pour x réel positif, $\frac{1}{\omega(\lambda)}\log\Pi(\lambda x)$ tende vers A.

D'après le paragraphe 6.4, ceci n'est possible que si $\Pi(z)$ est de genre zéro et $A>0$ [il faut $p\leq 0\leq p+1$ et $(-1)^{p}A>0$]. De plus, Π étant supposé de genre zéro, pour que la propriété indiquée ait lieu, il faut et il suffit que, lorsque λ tend vers $+\infty$,

1° pour t positif $\frac{1}{\omega(\lambda)}\nu(\lambda t)$ tende vers 0,

2° $\frac{1}{\omega(\lambda)}S_{\lambda}$ tende vers A,

3° $\frac{1}{\omega(\lambda)}\Sigma_{\lambda}$ tende vers 0,

ou encore que l'on ait pour t infini $\nu(t)=o[\omega(t)]$ et pour λ infini

$$S_{\lambda}\sim A\omega(\lambda)\qquad\text{et}\qquad\Sigma_{\lambda}=o[\omega(\lambda)].$$

La formule

$$S_\lambda = \int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t}$$

montre que S_λ est une fonction convexe de $\log\lambda$ et que, si ν n'est pas bornée, c'est-à-dire si $\Pi(z)$ n'est pas un polynome, $\frac{S_\lambda}{\log\lambda}$ est infiniment grand avec λ.

Donc, si l'on rejette le cas du polynome, les conditions indiquées ne peuvent être satisfaites que si pour x infini positif, $\frac{\omega(x)}{\log x}$ tend vers $+\infty$ et qu'il existe une fonction $\omega_1(x)$ qui soit fonction convexe de $\log x$ et telle que

$$\omega(x) \sim \omega_1(x) \quad (1).$$

D'autre part, si la condition

$$S_\lambda \sim A\omega(\lambda), \qquad \text{ou} \qquad \int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t} \sim A\omega(\lambda)$$

est satisfaite, les autres le sont aussi.

On voit d'abord que

$$\nu(t) = o\,[\omega(t)].$$

En effet, si k est une constante quelconque réelle et supérieure à 1, on a pour u infini

$$\int_0^{ku} \frac{\nu(t)\,dt}{t} \sim A\omega(ku) \sim A\omega(u).$$

Or

$$\int_0^{ku} \frac{\nu(t)\,dt}{t} \geq \nu(u) \int_u^{ku} \frac{dt}{t} = \nu(u)\log k.$$

Donc

$$\overline{\lim_{u \to +\infty}} \frac{\nu(u)}{\omega(u)} \leq \frac{A}{\log k}.$$

Ceci étant vrai quel que soit k, on a

$$\overline{\lim_{u \to -\infty}} \frac{\nu(u)}{\omega(u)} = 0.$$

On déduit ensuite de là que $\Pi(z)$ est de genre zéro, puis que pour λ infini $\Sigma_\lambda = o[\omega(\lambda)]$.

---

(1) Ce ne serait pas le cas pour

$$\omega(x) = (\log x)^2 \left\{2 + \sin[a \log(\log x)]\right\}, \qquad \text{avec } e^{\frac{2\pi}{a}} < 3.$$

Il serait facile de préciser cette condition, mais nous la laissons telle quelle pour ne pas compliquer l'énoncé.

En définitive, on a l'énoncé suivant :

Si $\omega(x)$ est une fonction positive définie pour x positif assez grand, dérivable et telle que pour x infini positif $\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}$ tende vers zéro, le produit canonique $\Pi(z)$ de genre fini et à zéros réels et négatifs, supposé non réduit à un polynome, ne peut satisfaire pour x réel positif infiniment grand à

$$\log\Pi(x) \sim A\omega(x)$$

que si $A > 0$ et si $\omega(x)/\log x$ tend vers $+\infty$ pour x infini et qu'il existe une fonction $\omega_1(x)$ qui soit fonction convexe de $\log x$ telle que

$$\omega(x) \sim \omega_1(x).$$

Ces conditions étant remplies, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que pour λ infini

$$\int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)\,dt}{t} \sim A\omega(\lambda).$$

On voit immédiatement que cette condition peut effectivement être satisfaite.

Alors, dans le plan privé de Ox', la fonction $\frac{1}{\omega(\lambda)}\operatorname{Log}\Pi(\lambda z)$ tend vers A pour λ infini, de sorte que

$$\log\Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim A\omega(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \log|\Pi(\lambda e^{i\theta})| \sim A\omega(\lambda).$$

Notons que, *si $\Pi(z)$ est supposé de genre zéro, le fait que, pour une valeur de θ de module $< \frac{\pi}{2}$, l'on ait pour r infini*

$$\log|\Pi(re^{i\theta})| \sim A\omega(r)$$

suffit à entraîner que pour λ infini

$$\int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)\,dt}{t} \sim A\omega(\lambda).$$

En effet, $\frac{1}{\omega(\lambda)}\log|\Pi(\lambda re^{i\theta})|$ tend alors vers A, ce qui entraîne les mêmes conditions que la convergence de $\frac{1}{\omega(\lambda)}\log\Pi(\lambda x)$ vers A pour x réel positif.

7.6. Dans les énoncés des paragraphes 7.4 et 7.5 on pourrait remplacer l'hypothèse que $\omega(x)$ est dérivable et que pour x infini $x\omega'(x)\,\omega(x)$ tend vers zéro par celle que, quelle que soit la constante positive k, l'on a pour x infini $\omega(kx) \sim \omega(x)$, qui en est une conséquence.

En effet, c'est seulement ce fait qui est intervenu pour établir que les conditions indiquées étaient nécessaires, et l'on n'a considéré la dérivée de $\omega(x)$ que

pour la démonstration des réciproques. Or, dans ces réciproques, $\omega(x)$ est assujettie non seulement à l'hypothèse que nous venons de rappeler, mais aussi à d'autres. On voit aisément que, si $\omega(x)$ satisfait à ces autres conditions et si, quel que soit k positif, on a pour x infini $\omega(kx)\sim\omega(x)$, on peut trouver une fonction $\Omega(x)$ dérivable et telle que pour x infini $x\Omega'(x)\,\Omega(x)$ tende vers zéro et $\omega(x)\sim\Omega(x)$. On pourrait alors raisonner avec $\Omega(x)$ comme on l'a fait avec $\omega(x)$.

On pourrait aussi, dans l'énoncé de la fin du paragraphe 7.3.1, supposer que le rapport $\frac{\omega(kx)}{\omega(x)}$ tend uniformément vers 1 pour x infini quand k décrit un intervalle tel que $\left(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Cela compliquerait les raisonnements sans grand profit.

7.7. Il est intéressant de noter que les conditions trouvées au paragraphe 7.4 peuvent être satisfaites même avec une croissance tout à fait irrégulière pour la fonction $\nu(t)$.

Considérons par exemple le produit canonique ayant comme zéros tous les entiers négatifs de la forme -2^{2^n}, chacun ayant comme ordre de multiplicité 2^{2^n}.

Le genre est 1 et l'on trouve que pour λ infini

$$\sum_{\alpha_r\leq\lambda}\frac{1}{\alpha_r}\sim\frac{\log(\log\lambda)}{\log 2},$$

de sorte que pour x réel positif très grand

$$\log\Pi(x)\sim-\frac{x\log(\log x)}{\log 2}.$$

Or on a

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\log\nu(t)}{\log t}=1 \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\log\nu(t)}{\log t}=\frac{1}{2}.$$

7.8. Si maintenant, au lieu de supposer que le produit canonique $\Pi(z)$ a tous ses zéros réels et négatifs, on le suppose simplement orienté dans la direction Ox', les résultats des paragraphes 7.3, 7.4 et 7.5 subsistent en remplaçant $\log\Pi(x)$ par $\log|\Pi(x)|$ et en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ *les modules des zéros*, $\nu(t)$ étant toujours le nombre de zéros de module au plus égal à t.

Cela résulte du fait suivant :

$\Pi(z)$ étant orienté dans la direction Ox' et ses zéros ayant pour modules $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$, si l'on appelle $\Pi'(z)$ le produit canonique de zéros $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_r, \ldots$, l'on a pour x réel positif infiniment grand

$$\log|\Pi(x)|\sim\log\Pi'(x)$$

et, plus généralement, si $|\theta|<\pi$ et s'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(p+1)}\leq|\theta|\leq m\frac{\pi}{2p},$$

où p est le genre de $\Pi(z)$, on a pour r infini

$$\log|\Pi(re^{i\theta})| \sim \log|\Pi'(re^{i\theta})| \quad (^1).$$

Si de plus on admet la possibilité pour $\Pi(z)$ d'avoir un certain nombre de zéros nuls, on voit que les résultats subsistent encore en remplaçant éventuellement

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \quad \text{par} \quad \sum_{0<\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$$

et

$$\int_0^\lambda \frac{\nu(t)\,dt}{t} \quad \text{par} \quad \int_0^\lambda \frac{\nu(t)-\nu(0)}{t}\,dt.$$

7.9. Nous pouvons maintenant traiter le cas général d'une fonction entière de genre fini orientée dans la direction Ox'.

Une telle fonction peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = e^{P(z)+iQ(z)}\Pi(z),$$

P et Q étant des polynomes à coefficients réels, et Π un produit canonique de genre fini orienté dans la direction Ox'.

On appellera $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ les modules des zéros, $\nu(t)$ le nombre de ces zéros de module au plus égal à t, p le genre de $\Pi(z)$, s le degré de $P(z)$, et Cz^s le terme de plus haut degré de $P(z)$.

---

(1) Pour établir ce fait, il suffit d'observer que, si θ satisfait à la condition indiquée, d'une part pour r infiniment grand l'expression

$$\sum_{\alpha_r>\lambda} \mathcal{R}\left[\log\left(1+\frac{re^{i\theta}}{\alpha_r}\right) - \frac{re^{i\theta}}{\alpha_r} + \ldots + (-1)^p \frac{r^p e^{pi\theta}}{p\alpha_r^p}\right]$$

croît plus vite que r^p si $p>0$ et que $\log r$ si $p=0$; d'autre part pour u réel positif l'expression

$$\frac{\mathcal{R}\left[\log(1+ue^{i(\theta-\varphi)}) - ue^{i(\theta-\varphi)} + \ldots + (-1)^p \frac{u^p e^{pi(\theta-\varphi)}}{p}\right]}{\mathcal{R}\left[\log(1+ue^{i\theta}) - ue^{i\theta} + \ldots + (-1)^p \frac{u^p e^{pi\theta}}{p}\right]}$$

reste comprise entre deux bornes $m(\varphi)$ et $M(\varphi)$ qui tendent vers 1 lorsque φ tend vers zéro.

Si les zéros de $\Pi(z)$ sont $-\alpha_1 e^{i\varphi_1}, -\alpha_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, -\alpha_r e^{i\varphi_r}, \ldots$ la première remarque montre que pour r infiniment grand $\log|\Pi'(re^{i\theta})|$ tend vers l'infini et les plus petite et plus grande limite de $\frac{\log|\Pi(re^{i\theta})|}{\log|\Pi'(re^{i\theta})|}$ sont, quel que soit $\lambda>0$, les mêmes que celles de

$$\frac{\sum_{\alpha_r>\lambda} \mathcal{R}\left[\log\left(1+\frac{re^{i(\theta-\varphi_r)}}{\alpha_r}\right) - \frac{re^{i(\theta-\varphi_r)}}{\alpha_r} + \ldots + (-1)^p \frac{r^p e^{pi(\theta-\varphi_r)}}{p\alpha_r^p}\right]}{\sum_{\alpha_r>\lambda} \mathcal{R}\left[\log\left(1+\frac{re^{i\theta}}{\alpha_r}\right) - \frac{re^{i\theta}}{\alpha_r} + \ldots + (-1)^p \frac{r^p e^{pi\theta}}{p\alpha_r^p}\right]}.$$

La deuxième remarque montre ensuite que, si petit que soit ε positif, il suffit de prendre λ assez grand pour être assuré que celles-ci sont comprises entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$.

On a pour x réel

$$\log|f(x)| = P(x) + \log|\Pi(x)|,$$

et, comme pour x infini positif

$$\log|\Pi(x)| = o[x^{p+1}] \qquad \text{et} \qquad x^p = o[\log|\Pi(x)|],$$

on a

$$\log|f(x)| \sim Cx^s \qquad \text{si } s > p,$$

et

$$\log|f(x)| \sim \log|\Pi(x)| \qquad \text{si } s \leq p.$$

Notons que, dans le cas où $s \leq p$, si Q est aussi de degré $\leq p$, l'on a pour r infini avec θ fixe (de module $< \pi$)

$$\log|f(re^{i\theta})| = \log|\Pi(re^{i\theta})| + O[r^p];$$

dans le cas où $s > p$, si l'on suppose $f(z)$ réelle pour z réel, de sorte que l'on peut prendre $Q(z) = o$ ou $Q(z) = \pi$, l'on a dans les mêmes conditions

$$\log|f(re^{i\theta})| = Cr^s \cos s\theta + o[r^s].$$

On déduit aisément de là les résultats suivants :

I. *Si $\rho(x)$ est une fonction définie pour x positif assez grand, dérivable, et telle que*

$$q < \varliminf_{x \to -\infty} \rho(x) \leq \varlimsup_{x \to -\infty} \rho(x) < q + 1 \qquad (\text{avec } q \text{ entier} \geq o)$$

et que pour x infini positif $\rho'(x)\, x \log x$ tende vers zéro, l'on ne peut avoir pour x réel positif infiniment grand

$$\log|f(x)| \sim A x^{\rho(x)},$$

que si $(-1)^q A > o$. Cette condition étant remplie, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que

$$s \leq q \qquad \text{et} \qquad \nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t).$$

Si, de plus, Q est aussi de degré $\leq q$, de sorte que f est de genre q, on a aussi pour r infini avec θ fixe (de module $< \pi$)

$$\log|f(re^{i\theta})| = A r^{\rho(r)} \cos\theta\, \rho(r) + o[r^{\rho(r)}].$$

Inversement, dans l'hypothèse où f est de genre q, le fait que, pour une valeur de θ de module $< \pi$ et telle qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p},$$

l'on ait pour r infini

$$\log|f(re^{i\theta})| \sim A r^{\rho(r)} \cos\theta\, \rho(r)$$

suffit à entraîner que pour t infini

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t).$$

II. *Si $\omega(x)$ est une fonction positive définie pour x positif assez grand et telle que, quelle que soit la constante positive k, l'on ait pour x infini $\omega(kx) \sim \omega(x)$, l'on ne peut avoir pour x réel positif infiniment grand*

$$\log |f(x)| \sim A x^q \omega(x), \qquad \text{avec } q \text{ entier} > 0 \text{ et } A \neq 0,$$

que si l'on est dans l'un des trois cas suivants :

(*a*). *$\omega(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et*

$$\operatorname*{Inf}_{u>x} \omega(u) \sim \omega(x),$$

et d'autre part $(-1)^q A > 0$.

(*b*). *$\omega(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ et*

$$\operatorname*{Sup}_{u>x} \omega(u) \sim \omega(x),$$

et d'autre part $(-1)^q A < 0$.

(*c*). *$\omega(x)$ tend pour x infini vers une limite finie et non nulle l, de sorte que la relation indiquée équivaut à*

$$\log |f(x)| \sim K x^q, \qquad \text{avec } K = A l.$$

Dans le cas (a), pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que $s \leq q$ et que pour λ infini

$$\sum_{0 < \alpha_r < \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda).$$

Dans le cas (b), il faut et il suffit que $s \leq q-1$, que la série $\sum \frac{1}{\alpha_r^q}$ soit convergente, et que pour λ infini

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda).$$

Dans le cas (c), il faut et il suffit que

$$s = q, \qquad C = K \qquad \text{et} \qquad p < q.$$

Dans les cas (a) et (b), si, en plus des conditions indiquées, le degré de Q satisfait à la même inégalité que s, l'on a pour r infini avec θ fixe (de module $< \pi$)

$$\log |f(r e^{i\theta})| = A r^q \omega(r) \cos q\theta + o[r^q \omega(r)].$$

Dans le cas (c), si, en plus des conditions indiquées, $f(z)$ est supposée réelle pour z réel, on a pour r infini avec θ fixe (toujours de module $< \pi$)

$$\log|f(re^{i\theta})| = Kr^q \cos q\theta + o[r^q].$$

Inversement, la fonction $\omega(x)$ du type indiqué et la constante A satisfaisant aux conditions (a) ou aux conditions (b), si l'on suppose que le genre g de $f(z)$ est égal à q ou à $q-1$, suivant le cas, le fait que, pour une valeur de θ de module $< \pi$ et telle qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(g+1)} \leq |\theta| \leq m\frac{\pi}{2g},$$

l'on ait pour r infini

$$\log|f(re^{i\theta})| \sim Ar^q\omega(r)\cos q\theta$$

suffit à entraîner que pour λ infini

$$\sum_{0<\alpha_r\leq\lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q \quad qA\,\omega(\lambda) \qquad \textit{si l'on a les conditions (a)},$$

ou

$$\sum_{\alpha_r>\lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} qA\,\omega(\lambda) \qquad \textit{si l'on a les conditions (b)}.$$

Si $f(z)$ est supposée réelle pour z réel, et de genre q, le fait que pour une valeur de θ de module $< \pi$ et telle qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(q+1)} \leq |\theta| \leq m\frac{\pi}{2q},$$

l'on ait pour r infini

$$\log|f(re^{i\theta})| \sim Kr^q\cos q\theta$$

suffit à entraîner que

$$s = q, \qquad C = K \qquad \text{et} \qquad p < q.$$

III. *Si $\omega(x)$ est une fonction positive définie pour x réel positif assez grand et telle que, quel que soit k positif, l'on ait pour x infini $\omega(kx) \sim \omega(x)$, l'on ne peut avoir pour x réel positif infiniment grand*

$$\log|f(x)| \sim A\,\omega(x)$$

que si $A > 0$, $\dfrac{\omega(x)}{\log x}$ tend vers $+\infty$ pour x infini, et qu'il existe une fonction $\omega_1(x)$ qui soit fonction convexe de $\log x$ et telle que $\omega(x) \sim \omega_1(x)$ (1).

Ces conditions étant remplies, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que P *se réduise à une constante et que pour λ infini*

$$\int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)-\nu(0)}{t}\,dt \sim A\,\omega(\lambda).$$

(1) Nous excluons le cas où $f(z)$ se réduirait à un polynome.

Si, de plus, Q *est aussi une constante, de sorte que* f *est de genre zéro, l'on a aussi pour* r *infini avec* θ *fixe (de module* $< \pi$*)*

$$\log|f(re^{i\theta})| \sim A\,\omega(r).$$

Inversement, si f *est supposée de genre zéro, le fait que, pour une valeur de* θ *de module* $< \frac{\pi}{2}$*, l'on ait pour* r *infini*

$$\log|f(re^{i\theta})| \sim A\,\omega(r)$$

suffit à entraîner

$$\int_0^{\lambda} \frac{\nu(t)-\nu(0)}{t}\,dt \sim A\,\omega(\lambda).$$

ESSAI SUR L'APPLICATION

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

A L'ARITHMÉTIQUE

PAR M. J. DELSARTE.

L'examen de la plupart des développements formels ou asymptotiques que l'on rencontre en théorie des nombres met en évidence le rôle important joué par des séries procédant suivant les sinus et cosinus d'arcs qui sont des parties aliquotes de la circonférence. De telles séries se rencontrent aussi lorsque l'on considère le développement de Fourier d'une fonction presque périodique définie sur le groupe additif des entiers, les « exposants de Fourier » de cette fonction étant des nombres rationnels. Il est donc naturel d'examiner dans quels cas une fonction de la théorie des nombres (nous entendons par là une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur l'ensemble des entiers rationnels, ou sur l'ensemble des entiers rationnels positifs) admet un tel développement, et possède par suite certaines propriétés de presque-périodicité. C'est à l'étude de cette question qu'est consacré ce travail.

1. UNE GÉNÉRALISATION DE L'INDICATEUR D'EULER. — Soit n un entier positif; parmi les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il y a $\varphi(n)$ racines primitives; soit m un entier positif ou nul; la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces $\varphi(n)$ racines primitives sera appelée l'*indicateur d'ordre m* de l'entier n, et sera notée $\Phi(n\,|\,m)$. Il est clair que l'on a

$$\Phi(n\,|\,0)=\varphi(n), \qquad |\Phi(n\,|\,m)|\leq\varphi(n), \qquad \Phi(n\,|\,m)=\Phi(n\,|\,m'), \quad \text{si } m\equiv m' \pmod{n}.$$

Propriété fondamentale. — On a

$$\sum_{d/n}\Phi(d\,|\,m)=0 \text{ ou } n, \tag{1}$$

suivant que n ne divise pas, ou divise m.

En effet, si d/n, les racines primitives $d^{\text{ièmes}}$ de l'unité, sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ admettant l'exposant d, et l'ensemble de toutes les racines primitives $d^{\text{ièmes}}$ quand d décrit l'ensemble des diviseurs de n, fournit, sans omission ni répétition, l'ensemble de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (ce n'est là qu'un des aspects de la décomposition, bien connue depuis Gauss, de l'ensemble des classes de restes, modulo n, en familles de classes dont tous les éléments ont le même p. g. c. d. avec n). On peut dire aussi que la somme

$$\sum_{d/n} \Phi(d \mid m)$$

n'est autre que la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; cette somme vaut donc n ou 0, suivant que n divise, ou ne divise pas m.

Ce résultat permet d'expliciter l'indicateur généralisé $\Phi(n \mid m)$. Posons

$$\sigma_m(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \mid m, \\ 0, & \text{si } n \nmid m. \end{cases}$$

On a

$$\sum_{d/n} \Phi(d \mid m) = \sigma_m(n),$$

puis, par la formule d'inversion de Mertens-Möbius,

$$\Phi(n \mid m) = \sum_{d/n} \mu(d)\, \sigma_m\left(\frac{n}{d}\right),$$

qui peut s'écrire aussi, en posant $d\delta = n$,

$$\Phi(n \mid m) = \sum_{\delta/m;n} \delta\, \mu\left(\frac{n}{\delta}\right); \tag{2}$$

la sommation étant cette fois étendue aux δ divisant le p. g. c. d. de m et n. On peut d'ailleurs effectuer complètement la sommation précédente, en introduisant le quotient ν de n par le p. g. c. d. de m et n, ainsi que le plus grand diviseur commun Δ de m et de n, qui soit premier avec ν. On trouve ainsi par un raisonnement facile

$$\frac{1}{n}\Phi(n \mid m) = \frac{\mu(\nu)}{\nu}\,\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}. \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) conduisent aisément aux conséquences suivantes, que nous nous bornons à énoncer :

a. $\Phi(n \mid m)$ est toujours un entier rationnel.

b. On a

$$|\Phi(n \mid m)| \leq (m; n).$$

c. Si $(m; n) = 1$, on a

$$\Phi(n \mid m) = \mu(n).$$

d. Si les entiers n et n' sont premiers entre eux, on a

$$\Phi(n\,|\,m)\,\Phi(n'\,|\,m)=\Phi(nn'\,|\,m).$$

e. p premier, $0<m<p$, entraînent

$$\Phi(p\,|\,m)=-1.$$

f. p premier, $0<m<p^{\alpha}$, m premier avec p ou multiple de p^{β}, avec $\beta<\alpha-1$ entraînent

$$\Phi(p^{\alpha}\,|\,m)=0.$$

g. p premier $0<m<p^{\alpha}$, m multiple de $p^{\alpha-1}$ entraînent

$$\Phi(p^{\alpha}\,|\,m)=-p^{\alpha-1}.$$

Les énoncés (d), (e), (f), (g) permettent le calcul pratique de l'indicateur généralisé dans tous les cas.

2. Développements formels des fonctions de la théorie des nombres. — *a. Moyenne d'une fonction.* — Soit $f(n)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur l'ensemble des entiers rationnels. Si la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)\right]$$

existe et est finie, nous la nommerons, avec Dirichlet, la *moyenne* de la fonction f; cette moyenne se note parfois $\mathrm{M}(f)$.

b. Produit scalaire de deux fonctions. — Soient $f(n)$ et $g(n)$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur l'ensemble des entiers rationnels; leur produit scalaire, quand il existe, est défini par

$$[f.g]=\mathrm{M}(f\bar{g})=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)\,\bar{g}(k)\right].$$

Cette expression a toutes les propriétés formelles d'un produit.

c. Système orthogonal des racines de l'unité. — Soient α et β deux racines de l'unité, de degrés quelconques; supposons-les distinctes; alors $\alpha\bar{\beta}\neq 1$. Posons

$$f_{\alpha}(n)=\alpha^{n};\qquad f_{\beta}(n)=\beta^{n}.$$

Il est clair que le produit scalaire $[f_{\alpha}.f_{\beta}]$ est nul, car la somme

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha\bar{\beta})^{k}$$

est une fonction bornée de n. Au contraire, si $\alpha=\beta$, on a visiblement

$$[f_{\alpha}.f_{\alpha}]=1.$$

Les fonctions $f_\alpha(n)$ constituent donc un système orthogonal normé relativement au produit scalaire défini plus haut.

Revenons maintenant à l'indicateur généralisé $\Phi(n|m)$; on a, par définition,

$$\Phi(n|m)=\sum_{\alpha} f_\alpha(m),$$

où la sommation est étendue aux racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On en déduit immédiatement que le produit scalaire

$$[\Phi(n|m)\,\Phi(n'|m)],$$

calculé par rapport à la variable m, est nul pour $n \neq n'$, et a pour valeur $\varphi(n)$, si $n=n'$.

d. Expression formelle des coefficients de Fourier d'une fonction $f(n)$. — Soit $f(n)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur l'ensemble des entiers rationnels positifs; nous la supposerons en outre partout finie, et nous désignerons par $\mathrm{F}(n)$ son image de Möbius; on sait que l'on a

$$f(n)=\sum_{d|n} \mathrm{F}(d); \qquad \mathrm{F}(n)=\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Calculons formellement le produit scalaire $[f.f_\alpha]$, où l'on a posé comme plus haut $f_\alpha(n)=\alpha^n$, en désignant par α une racine de l'unité de degré k. On a

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)\bar{f}_\alpha(m)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{d|m}\mathrm{F}(d)\bar{\alpha}^m$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\mathrm{F}(d)\left[\bar{\alpha}^d+\bar{\alpha}^{2d}+\ldots+\bar{\alpha}^{-d\left[\frac{n}{d}\right]}\right].$$

Si d est multiple de k, le crochet vaut $\left[\frac{n}{d}\right]$; sinon, on voit sans peine qu'il reste borné quel que soit n. Donc, *moyennant des hypothèses convenables sur la fonction* $\mathrm{F}(n)$, la somme

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)\bar{f}_\alpha(m)$$

a pour partie principale, pour n grand,

$$n\sum_{h=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]}\frac{\mathrm{F}(kh)}{kh};$$

de telle sorte qu'on est conduit à prendre

$$[ff_\alpha]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m)\bar{f}_\alpha(m)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(kh)}{kh},$$

pourvu que la limite existe et que la série obtenue converge. Si l'on observe alors que ce résultat ne dépend que du degré k de la racine α, et reste par suite le même pour toutes les racines primitives $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité, on est conduit à associer à la fonction $f(n)$ la série formelle

$$\sum_{\alpha}[ff_{\alpha}]f_{\alpha}(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}(k)\Phi(k\,|\,n), \tag{4}$$

avec

$$\mathrm{A}(k)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(kh)}{kh}, \tag{5}$$

puisque

$$\Phi(k\,|\,n)=\sum_{\alpha}f_{\alpha}(n),$$

α décrivant l'ensemble des racines primitives $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

e. Sommation formelle de la série précédente. — Laissant toujours de côté les questions de convergence, on peut écrire

$$\sum_{k=1}\mathrm{A}(k)\Phi(k\,|\,n)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(kh)}{kh}\Phi(k\,|\,n),$$

puis, en échangeant les deux sommations, et sommant pour $hk=d$,

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(d)}{d}\left\{\sum_{k/d}\Phi(k\,|\,n)\right\};$$

mais, d'après la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé, l'accolade vaut o ou d, suivant que d ne divise pas, ou divise n; il reste donc en définitive

$$\sum_{d/n}\mathrm{F}(d)=f(n).$$

On peut dire qu'il y a *convergence formelle* de la série (4) vers $f(n)$.

f. Première généralisation du calcul précédent. — Désignons maintenant par λ un exposant entier au moins égal à l'unité. Posons, lorsque cette expression a un sens,

$$\mathrm{A}_{\lambda}(k)=\sum_{k/d^{\lambda}}\frac{\mathrm{F}(d)}{d^{\lambda}}. \tag{6}$$

La sommation est donc étendue aux entiers d dont la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ est multiple de k. On a, en revenant aux notations précédentes,

$$\mathrm{A}(k)=\mathrm{A}_1(k).$$

Considérons maintenant la série formelle

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_{\lambda}(k)\Phi(k\,|\,n^{\lambda}). \tag{7}$$

Il vient, toujours en laissant de côté la question de la légitimité de ces transformations de calcul,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\,\Phi(k\mid n^\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k/d^\lambda}\frac{F(d)}{d^\lambda}\,\Phi(k\mid n^\lambda);$$

ou encore

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{F(d)}{d^\lambda}\left\{\sum_{k/d^\lambda}\Phi(k\mid n^\lambda)\right\};$$

mais, d'après la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé, l'accolade vaut o ou d^λ, suivant que d^λ ne divise pas, ou divise n^λ, c'est-à-dire, suivant que d ne divise pas, ou divise n; la somme se réduit donc en définitive à

$$\sum_{d/n} F(d)=f(n).$$

Plus généralement, on peut encore considérer la série formelle

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\,\Phi(k\mid n), \tag{8}$$

et, par le même calcul, lui donner pour valeur l'expression

$$\sum_{d^\lambda/n} F(d),$$

où la sommation est cette fois étendue aux diviseurs d dont la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ divise n. Désignons alors par la notation

$$[n]_\lambda,$$

le plus grand des entiers dont la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ divise n. Dire que d^λ divise n équivaut à dire que d divise $[n]_\lambda$; il en résulte que la série (8) *converge formellement* vers la fonction

$$\mathcal{F}_\lambda(n)=f([n]_\lambda).$$

3. Légitimation des calculs précédents. Propriétés de presque-périodicité. — 1^er^ *cas.* — *La série des images de Möbius est absolument convergente.*

Soit donc la fonction $f(n)$; désignons toujours par $F(n)$ son image de Möbius, et supposons l'absolue convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n).$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Les séries*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\,\Phi(k\mid n)$$

sont absolument convergentes pour tout entier $\lambda \geq 1$; *elles convergent uniformé-*

ment par rapport à n; leur somme $\mathcal{F}_\lambda(n)$ *est telle que l'on ait*

$$\mathcal{F}_\lambda(n)=f([n]_\lambda)$$

et en particulier

$$\mathcal{F}_\lambda(n^\lambda)=f(n).$$

Il suffit, pour établir ces différents points, d'utiliser la majoration

$$|\Phi(k|n)|\leq\varphi(k).$$

Considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\,\Phi(k|n)$$

ou, mieux, la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k/d^\lambda}\frac{F(d)}{d^\lambda}\Phi(k|n).$$

Elle est majorée, en module, quel que soit n, par la série à termes positifs

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k/d^\lambda}\frac{|F(d)|}{d^\lambda}\varphi(k).$$

Or, cette dernière est convergente; commençant en effet la sommation par l'indice d, elle s'écrit

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{|F(d)|}{d^\lambda}\left\{\sum_{k/d^\lambda}\varphi(k)\right\}=\sum_{d=1}^{\infty}|F(d)|.$$

Ce qui établit notre assertion. La série proposée converge donc absolument et uniformément vers une fonction $\mathcal{F}_\lambda(n)$, et, le calcul formel donné plus haut en (2; f) devenant valable par suite de l'absolue convergence, on a

$$\mathcal{F}_\lambda(n)=f([n]_\lambda).$$

Il est bien clair par ailleurs que la formule (6) donnant les coefficients $A_\lambda(k)$ a un sens.

Propriété de presque-périodicité. — Si l'on remplace dans les séries $\mathcal{F}_\lambda(n)$ les $\Phi(k|n)$ par leurs expressions comme somme d'exponentielles, le raisonnement précédent montre que la série d'exponentielles obtenue est aussi absolument et uniformément convergente, puisque la majoration faite revient à remplacer les exponentielles par l'unité. D'où l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. — *Sous les mêmes hypothèses, les séries*

$$\mathcal{F}_\lambda(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_\lambda(k)\,\Phi(k|n)$$

ont pour sommes des fonctions presque périodiques de Bohr sur le groupe additif Z *des entiers rationnels. Par suite, la fonction* $f(n)$

$$f(n)=\mathcal{F}_1(n)=\mathcal{F}_2(n^2)=\mathcal{F}_3(n^3)=\ldots=\mathcal{F}_\lambda(n^\lambda)$$

est elle-même presque périodique de Bohr sur Z, *en même temps qu'elle est la restriction à l'ensemble des entiers positifs, puissances* $\lambda^{\text{ièmes}}$ *exactes, d'une autre fonction presque périodique de Bohr* $\mathcal{F}_\lambda(n)$.

2^e *Cas.* — *Il existe une constante* $A > 0$, *et un exposant* $\sigma > 0$, *tels que*

$$\sum_{k=1}^{n} |F(k)| \leq A n^\sigma.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Les séries*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\Phi(k|n),$$

sont absolument convergentes et ont pour sommes $\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda)$ *pourvu que* $\lambda > \sigma$.

En premier lieu, l'hypothèse faite implique la convergence des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(k)|}{k^s}$$

pour $\mathcal{R}(s) > \sigma$; la convergence des séries donnant les coefficients $A_\lambda(k)$ s'ensuit immédiatement, dès que $\lambda > \sigma$. Considérons alors la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/d^\lambda} \frac{F(d)}{d^\lambda} \Phi(k|n)$$

et utilisons cette fois la majoration $|\Phi(k|n)| \leq n$ qui résulte de (1; *b*); la série des valeurs absolues est alors majorée par la suivante :

$$n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/d^\lambda} \frac{|F(d)|}{d^\lambda} = n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(d)|}{d^\lambda} T(d^\lambda),$$

où l'on désigne par $T(d^\lambda)$ le nombre des diviseurs de d^λ. Or, on sait qu'à tout ε positif, aussi petit qu'on le veut, correspond un B_ε tel que

$$T(m) \leq B_\varepsilon m^\varepsilon.$$

On trouve donc ainsi la nouvelle majoration

$$n B_\varepsilon \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|F(d)|}{d^{\lambda(1-\varepsilon)}}.$$

Mais $\lambda > \sigma$ entraîne la possibilité de prendre ε assez petit pour que

$$\lambda(1-\varepsilon) > \sigma.$$

De là résulte la convergence de la dernière série majorante, puis l'absolue convergence de la série double donnant $\mathcal{F}_\lambda(n)$; on en déduit comme plus haut la validité de la formule

$$\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda).$$

Remarque. — Il y a lieu de noter que le théorème III ne donne aucun renseignement sur la convergence, ou la divergence de la série d'exponentielles obtenue en remplaçant les $\Phi(k|n)$ par leurs expressions comme somme d'exponentielles. *A fortiori*, ne peut-on tirer de ce théorème aucun renseignement sur l'éventuelle presque-périodicité des fonctions $\mathcal{F}_\lambda(n)$. Tout ce qu'on peut dire, c'est que l'on a obtenu un développement de ces fonctions sous forme d'une série d'exponentielles, cette série convergeant absolument *par groupes*. Pour aller plus loin, il est nécessaire d'améliorer les hypothèses.

3° *Cas. Application du théorème de Fischer-Riesz-Bésicovitch.* — Le seul moyen dont on dispose pour déceler l'éventuelle presque-périodicité de la somme d'une série d'exponentielles est d'appliquer à ce développement le théorème de Fischer-Riesz-Bésicovitch, en examinant la convergence ou la divergence de la série des carrés des modules des coefficients des exponentielles. Dans cet ordre d'idées, on peut énoncer, relativement aux développements précédents, et en conservant les mêmes notations, le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Si* $\lambda > 2\sigma$ *la fonction* $\mathcal{F}_\lambda(n)$ *est presque périodique, au sens de Bésicovitch, sur* Z.

Puisque $\lambda > 2\sigma$, la fonction $\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda)$ est définie, d'après le théorème III, comme somme de la série absolument convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\Phi(k|n).$$

Regardons cette série comme une série formelle d'exponentielles. La somme des carrés des modules des coefficients s'écrit formellement

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\overline{A}_\lambda(k)\varphi(k)$$

ou, en remplaçant les $A_\lambda(k)$ par leurs expressions, sous forme de série triple

$$\sum_{d;\delta;k} \frac{F(d)\overline{F}(\delta)}{(d\delta)^\lambda}\varphi(k),$$

avec $k|d^\lambda$; $k|\delta^\lambda$ et k variant de 1 à l'infini. Mais $k|d^\lambda$, $k|\delta^\lambda$ entraîne $k|\Delta^\lambda$, avec $\Delta = (d;\delta)$. Sommant par rapport à k, la série considérée devient

$$\sum_{d;\delta;1}^{\infty} \Delta^\lambda \frac{F(d)\overline{F}(\delta)}{(d\delta)^\lambda},$$

que l'inégalité $\Delta < \sqrt{d\delta}$ permet de majorer par la nouvelle série

$$\sum_{d;\delta;1}^{\infty} \frac{|F(d)|\,|F(\delta)|}{(d\delta)^{\lambda/2}},$$

manifestement convergente, moyennant l'hypothèse $\lambda > 2\sigma$. Notre assertion résulte ensuite du théorème de Bésicovitch. On peut, par suite, affirmer que

$$M[\mathcal{F}_\lambda(n)\bar{\mathcal{F}}_\gamma(n)] = \sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\bar{A}_\gamma(k)\varphi(k),$$

d'après une propriété connue; c'est ce qu'il serait possible de vérifier directement.

On notera qu'à un développement d'exponentielles presque périodiques convergeant en moyenne au sens de Bésicovitch, correspond en fait *une classe* de fonctions presque périodiques de Bésicovitch, définies sur Z, sauf peut-être sur un ensemble fini; dans le cas qui nous intéresse, parmi toutes ces fonctions figure la fonction $\mathcal{F}_\lambda(n)$, qui est, elle, parfaitement définie par le développement absolument convergent (8).

4. Exemples. — *a*. Soit α un nombre réel ou complexe quelconque; désignons par $S_\alpha(n)$ la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de n; l'image de Möbius de cette fonction est évidemment n^α, et l'on a

$$\sum_{k=1}^{n} |F(k)| = \sum_{k=1}^{n} k^u \leq n^\sigma,$$

en posant $u = \mathcal{R}(\alpha)$ et $\sigma = 1 + u = 1 + \mathcal{R}(\alpha)$ pour $u \neq -1$. Dans le cas où $u = -1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |F(k)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \operatorname{Log} n$$

et, prenant ε positif arbitrairement petit, il vient $\operatorname{Log} n \leq A_\varepsilon n^\varepsilon$, de sorte que l'on doit choisir dans chaque cas, σ égal à $1 + \mathcal{R}(\alpha)$ pour $\mathcal{R}(\alpha) \neq -1$ et à $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, pour $\mathcal{R}(\alpha) = -1$.

Calculons par ailleurs les coefficients $A_\gamma(k)$; on a

$$A_\gamma(k) = \sum_{k|d^\lambda} \frac{1}{d^{\lambda-\alpha}}.$$

Désignons par la notation m_λ la plus petite puissance $\lambda^{\text{ième}}$ exacte qui soit divisible par m; alors $k|d^\lambda$ entraîne

$$d^\lambda = k_\lambda h^\lambda,$$

où h est un entier rationnel; il vient alors

$$A_\lambda(k) = (k_\lambda)^{\frac{\alpha}{\lambda}-1} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\lambda-\alpha}} = \frac{\zeta(\lambda-\alpha)}{k_\lambda^{1-\frac{\alpha}{\lambda}}},$$

pourvu que

$$\mathcal{R}(\lambda - \alpha) > 1.$$

Appliquons maintenant nos résultats généraux :

1° Il y a absolue convergence des séries

$$S_\alpha([n]_\lambda)=\zeta(\lambda-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi(k,n)}{k^{\lambda-\frac{\alpha}{\lambda}}},$$

pour

$$\lambda>1+\mathcal{R}(\alpha), \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha)\neq -1,$$

et pour

$$\lambda>0, \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha)=-1.$$

2° $S_\alpha([n]_\lambda)$ est presque périodique sur Z, au sens de Bésicovitch, pour

$$\lambda>2[1+\mathcal{R}(\alpha)], \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha)\neq -1,$$
$$\lambda>0, \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha)=-1.$$

3° Enfin $S_\alpha([n]_\lambda)$ est presque périodique sur Z, au sens de Bohr pour

$$\lambda\geq 1, \qquad \mathcal{R}(\alpha)<-1.$$

On notera en particulier que

$$S_{-1}(n), \quad T([n]_2), \quad S_1([n]_2), \quad S_2([n]_4), \quad \ldots$$

sont représentables par des séries d'exponentielles absolument convergentes *par groupes*, tandis que

$$S_{-1}(n), \quad T([n]_3), \quad S_1([n]_3), \quad S_2([n]_7), \quad \ldots$$

sont presque périodiques au sens de Bésicovitch : de plus

$$S_{-2}(n), \qquad S_{-3}(n), \qquad \ldots$$

sont presque périodiques au sens de Bohr.

b. Prenons maintenant $f(n)=\frac{\varphi(n)}{n}$ avec la notation habituelle pour l'indicateur d'Euler. On sait que l'image de Möbius de cette fonction est

$$F(n)=\frac{\mu(n)}{n},$$

$\mu(n)$ désignant la fonction de Möbius : par suite $|F(n)|\leq\frac{1}{n}$ et l'on peut prendre $\sigma=\varepsilon>0$ arbitrairement petit ; d'où :

La fonction

$$\frac{\varphi([n]_\lambda)}{n},$$

est presque périodique par rapport à n au sens de Bésicovitch, dès que $\lambda>1$, *et elle est représentable par une série d'exponentielles absolument convergente par groupes.*

Le calcul des coefficients $A_\lambda(k)$ se fait par des procédés classiques; on trouve

$$A_\lambda(k)=\frac{1}{\zeta(\lambda+1)}\,\frac{\mu(\sqrt[\lambda]{k_\lambda})}{k_\lambda^{1+\frac{1}{\lambda}}}\,\frac{1}{\prod_{p/k_\lambda}\left(1-\frac{1}{p^{\lambda+1}}\right)};$$

la notation k_λ a été définie plus haut; dans le produit qui se trouve en dénominateur, les *nombres premiers* p sont les facteurs premiers de k_λ. On notera en particulier le développement suivant :

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{\prod_{p/k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}\,\frac{\Phi(k\mid n)}{k^2}.$$

c. Prenons encore $f(n)=n$, d'où $F(n)=\varphi(n)$; on sait que $\varphi(n)<n$, donc

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\leq n^2,$$

et il faut prendre ici $\sigma=2$. Par suite :

La fonction $[n]_\lambda$ *est presque périodique au sens de Bésicovitch dès que* $\lambda\geq 5$ *et elle est représentable par une série d'exponentielles convergeant absolument, par groupes, dès que* $\lambda\geq 3$.

Le calcul des coefficients $A_\lambda(k)$ est ici un peu délicat; on trouve

$$[n]_\lambda=\frac{\zeta(\lambda-1)}{\zeta(\lambda)}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\prod_{p/k_\lambda}\frac{p-1}{p^{(\lambda-1)(u-1)}(p^\lambda-1)}\right\}\Phi(k\mid n),$$

les nombres premiers p étant les facteurs premiers de k_λ, suivant la formule

$$k_\lambda=\Pi p^{\lambda u}.$$

d. Prenons enfin $f(n)=\mu(n)$ (fonction de Möbius). Soit $\nu(n)$ l'image de Möbius de cette fonction; on sait que

$$\frac{1}{\zeta^2(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)}{n^s};\qquad\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\nu(n)|}{n^s};$$

Les valeurs de $\nu(n)$ sont données par les formules suivantes :

$$\nu(1)=1;\qquad \nu(n)=0,\qquad \text{si } m^2/n\qquad (m\neq 1)$$

et

$$\nu(n)=(-2)^r,\qquad \text{si } n=p_1p_2\ldots p_r(q_1q_2\ldots q_s)^2;$$

les p_i et les q_j étant des facteurs premiers distincts.

Ajoutons encore que l'application d'une méthode classique depuis Dirichlet permet de donner la forme asymptotique

$$\sum_{k=1}^{n} |\nu(k)| = \frac{\pi^4}{36} n \operatorname{Log} n + O(n).$$

Il faut donc prendre ici $\sigma = 1 + \varepsilon$, avec ε strictement positif et arbitrairement petit. On en conclut, par application des théorèmes précédents, que :

$\mu([n]_2)$ *est développable en série d'exponentielles absolument convergente par groupes, tandis que* $\mu([n]_3)$ *est presque périodique au sens de Bésicovitch.*

On peut ici encore donner une expression finie des coefficients $A_\lambda(k)$; la voici, elle est assez compliquée :

$$A_\lambda(k) = \frac{1}{\zeta^2(\lambda)} \frac{\nu(\sqrt[\lambda]{k_\lambda})}{k_\lambda} \prod_{p/k_\lambda} \left\{ \frac{1 + \dfrac{\mu(p^u)}{2p^{u\lambda}}}{\left(1 - \dfrac{1}{p^\lambda}\right)^2} \right\}.$$

Les p sont toujours les facteurs premiers de k_λ, suivant la formule

$$k_\lambda = \prod_p p^{\lambda u}.$$

5. Dernière généralisation de la théorie précédente. — Un examen attentif de la transformation de calcul, d'ailleurs très simple, qui conduit aux développements généraux trouvés plus haut, permet d'étendre notablement le champ d'application de la méthode; nous verrons qu'on peut donner à ce procédé la plus grande extension possible et obtenir ainsi les développements en séries d'exponentielles de *n'importe quelle fonction de la théorie des nombres,* pourvu qu'elle soit toujours finie.

Donnons d'abord une définition :

Isomorphisme de Z, *relativement à la divisibilité.* — Nous appellerons ainsi une application de l'ensemble Z_+ des entiers rationnels strictement positifs, *dans* Z_+, soit $n \to I(n)$, telle que la relation n/m soit *équivalente* à la relation $I(n)/I(m)$.

Il est aisé de construire de tels isomorphismes; par exemple, si

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

est la décomposition canonique de l'entier n, on prendra

$$I(n) = p_1^{f(p_1;\alpha_1)} p_2^{f(p_2;\alpha_2)} \dots p_r^{f(p_r;\alpha_r)},$$

la fonction $f(p;\alpha)$ prenant ses valeurs dans Z_+ et étant monotone croissante par rapport à α, quel que soit p.

Plus généralement, on peut construire un isomorphisme par récurrence sur n : connaissant $I(1), I(2), \dots, I(n)$; on choisira $I(n+1)$ par la condition

que cet entier soit : 1° un multiple commun des $I(d)$ pour $d/n+1$; 2° qu'il ne soit divisible par aucun $I(e)$, pour $e \leqq n$; $e \not/ n+1$. Il est clair que cette construction par récurrence laisse encore beaucoup d'arbitraire dans la détermination de l'isomorphisme $I(n)$; on notera en particulier qu'il est toujours possible de déterminer un isomorphisme $I(n)$ majorant une fonction donnée $f(n)$, pourvu que celle-ci soit toujours finie; de même, si $F(n)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes toujours finies, et si α est un exposant positif quelconque, il est possible de déterminer un isomorphisme $I(n)$ rendant absolument convergente la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k)}{[I(k)]^{\alpha}}.$$

Ce dernier point nous sera utile.

Généralisons maintenant les calculs formels qui nous ont servi de point de départ. Soit $f(n)$ une fonction de la théorie des nombres qui soit toujours finie; soit $F(n)$ son image de Möbius; soit enfin $I(n)$ un isomorphisme. Posons

$$A_I(k) = \sum_{k/I(d)} \frac{F(d)}{I(d)}. \tag{9}$$

La sommation est donc étendue aux indices d tels que $I(d)$ soit multiple de k. On a alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_I(k)\Phi(k \mid n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/I(d)} \frac{F(d)}{I(d)} \Phi(k \mid n),$$

ou, en permutant les sommations,

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{F(d)}{I(d)} \left\{ \sum_{k/I(d)} \Phi(k \mid n) \right\}$$

et la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé permet d'écrire cette dernière somme double sous forme finie

$$\sum_{I(d)/n} F(d) = \mathcal{F}_I(n). \tag{10}$$

Cette définition *finie* de $\mathcal{F}_I(n)$ ne peut être condensée davantage [comme c'était le cas pour les isomorphismes $I(n) = n^{\nu}$], à moins de faire des hypothèses plus précises sur l'isomorphisme $I(n)$; mais on doit remarquer que, pour tout isomorphisme $I(n)$, on a

$$\mathcal{F}_I[I(n)] = f(n). \tag{11}$$

La légitimation du calcul formel qui vient d'être indiqué se fait exactement comme dans le cas des isomorphismes $I(n) = n^{\nu}$, et elle conduit encore à deux théorèmes analogues aux théorèmes III et IV du paragraphe 3; nous nous

bornerons à énoncer ces deux théorèmes, les démonstrations se transposant de façon immédiate :

a. Le développement

$$\mathcal{F}_1(n)=\sum_{k=1}^{\infty} A_1(k)\,\Phi(k\mid n) \tag{12}$$

converge absolument, et a pour somme

$$\sum_{1\,d\mid n} F(d),$$

pourvu que l'isomorphisme $I(n)$ *soit tel qu'il existe un exposant* α *strictement positif et strictement inférieur à l'unité, rendant absolument convergente la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k)}{[I(k)]^{\alpha}}.$$

b. La même série (12) *définit une fonction* $\mathcal{F}_1(n)$ *presque périodique, au sens de Bésicovitch, sur* Z, *pourvu que l'isomorphisme* $I(n)$ *rende absolument convergente la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{I(k)}}.$$

De ce dernier énoncé résulte le théorème suivant, assez inattendu :

Théorème V. — *Si la fonction de la théorie des nombres* $f(n)$ *est partout finie, il est possible de trouver un isomorphisme* $I(n)$ *tel que l'on ait*

$$f(n)=\mathcal{F}[I(n)],$$

$\mathcal{F}(n)$ *étant une fonction presque périodique sur* Z, *au sens de Bésicovitch, d'ailleurs représentable par un développement en exponentielles convergeant absolument, par groupes.*

6. Cas de l'arithmétique sur un corps algébrique. — Les considérations précédentes peuvent s'étendre au cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur le groupe additif des entiers d'un corps algébrique K.

Le premier point est de définir d'abord l'indicateur généralisé. Soit donc un corps algébrique K; nous noterons au moyen de minuscules grecques les entiers du corps, et par des minuscules gothiques les idéaux dans le corps. Enfin Z_K désignera le groupe additif des entiers du corps. Si $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe de Z_K, le plus grand des idéaux contenus dans $\mathfrak{g}$ est évidemment le p. g. c. d. des idéaux contenus dans $\mathfrak{g}$. Considérons en particulier le groupe des classes d'entiers du corps, modulo un idéal $\mathfrak{a}$, soit $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$. On sait que c'est un groupe abélien fini d'ordre $N(\mathfrak{a})$. Un sous-groupe quelconque $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$

peut être regardé comme un sous-groupe du groupe Z_K contenant évidemment l'idéal $\mathfrak{a}$; le plus grand des idéaux contenus dans $\mathfrak{g}$ est donc un idéal non vide, diviseur de $\mathfrak{a}$; si $\mathfrak{b}$ est cet idéal, nous dirons que le sous-groupe $\mathfrak{g}$ *définit l'idéal* $\mathfrak{b}$.

Soit maintenant χ un caractère de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$; nous dirons que c'est un caractère *attaché* à l'idéal $\mathfrak{a}$. On notera souvent les valeurs d'un tel caractère $\chi(\mathfrak{a}|A)$, A étant une classe appartenant à $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$, ou encore $\chi(\mathfrak{a}|\alpha)$, α étant un entier quelconque de K; $\chi(\mathfrak{a}|\alpha)$ est donc la valeur prise par le caractère considéré sur la classe de α, modulo $\mathfrak{a}$.

L'équation $\chi(\mathfrak{a}|\alpha)=1$, où $\mathfrak{a}$ est fixe, détermine comme on sait un sous-groupe $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$, qui définit, ainsi qu'il a été dit, un certain idéal $\mathfrak{b}$ divisant $\mathfrak{a}$; nous dirons que $\mathfrak{b}$ est l'idéal défini par le caractère χ.

Donc, tout élément $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *définit un idéal bien déterminé* $\mathfrak{b}$ *divisant* $\mathfrak{a}$ *et qui est le* p. g. c. d. *de tous les idéaux sur lesquels* χ *prend la valeur* 1.

Définition. — Nous dirons qu'un caractère $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *est* PRIMITIF, *lorsque l'idéal* $\mathfrak{b}$ *défini par* χ *se réduit à* $\mathfrak{a}$.

Nous désignerons provisoirement par $\psi(\mathfrak{a})$ le nombre des caractères primitifs attachés à l'idéal $\mathfrak{a}$.

Classification des caractères attachés à l'idéal $\mathfrak{a}$. — Soit $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ un caractère attaché à l'idéal $\mathfrak{a}$; soit $\mathfrak{b}$ l'idéal défini par χ. Sur cet idéal χ se réduit à l'unité; il en résulte immédiatement que χ reste constant sur les classes modulo $\mathfrak{b}$; donc χ est aussi un caractère attaché à l'idéal $\mathfrak{b}$; mais comme χ définit $\mathfrak{b}$ exactement, on voit que χ est un *caractère primitif* attaché à $\mathfrak{b}$. Inversement, tout caractère primitif attaché à $\mathfrak{b}$ reste constant sur les classes modulo $\mathfrak{a}$; c'est donc un élément de $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ définissant l'idéal $\mathfrak{b}$.

En résumé, *le groupe des caractères* $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *est tel qu'on puisse y établir une partition, l'indice des parties décrivant l'ensemble des diviseurs de* $\mathfrak{a}$, *et la partie correspondant à l'indice* $\mathfrak{b}_{/\mathfrak{a}}$ *étant constituée par l'ensemble des caractères primitifs attachés à l'idéal* $\mathfrak{b}$. *Autrement dit, tout élément* $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *est un caractère primitif attaché à un diviseur* $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ *et cela d'une façon et d'une seule, tandis que tous les caractères primitifs attachés à* $\mathfrak{b}_{/\mathfrak{a}}$ *sont des éléments de* $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$.

Il résulte immédiatement de ce dénombrement que l'on a

$$\sum_{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}),$$

d'où, comme on sait, par utilisation de la formule d'inversion de Möbius $\psi(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a})$ en désignant par $\varphi(\mathfrak{a})$ l'indicateur de l'idéal $\mathfrak{a}$ (1).

(1) Le raisonnement qui vient d'être donné correspond, dans le cas du corps des rationnels, au célèbre raisonnement de Gauss sur la classification des classes de restes modulo n, suivant les valeurs du p. g. c. d. des nombres de ces classes avec n (Gauss, *Disqu.*, Section III; Art. 53 et suiv.).

Indicateur généralisé. — Nous noterons maintenant

$$\varpi_i(\mathfrak{a}\,|\,\alpha) \qquad [i=1, 2, \ldots, \varphi(\mathfrak{a})],$$

les valeurs des différents caractères primitifs attachés à l'idéal $\mathfrak{a}$, prises en α.

Définition. — L'indicateur généralisé d'ordre α (α étant un entier du corps) *est, par définition, égal à*

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)=\sum_{i=1}^{\varphi(\mathfrak{a})}\varpi_i(\mathfrak{a}\,|\,\alpha).$$

Il est clair que l'on a

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,0)=\varphi(\mathfrak{a}); \qquad |\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)|\leq\varphi(\mathfrak{a});$$
$$\alpha\equiv\beta; \qquad (\mathrm{mod}\,\mathfrak{a})\rightarrow\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)=\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\beta).$$

Propriété fondamentale. — On a

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{d}\,|\,\alpha)=0 \text{ ou } N(\mathfrak{a}), \tag{13}$$

suivant que l'idéal $\mathfrak{a}$ *ne divise pas, ou divise l'idéal principal* (α).

Cette somme s'écrit en effet

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}}\sum_{i=1}^{\varphi(\mathfrak{d})}\varpi_i(\mathfrak{d}\,|\,\alpha)$$

et, d'après la classification donnée plus haut des caractères de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$, l'ensemble de tous les caractères primitifs attachés aux différents idéaux $\mathfrak{d}$ divisant $\mathfrak{a}$, reproduit exactement, sans omission ni répétition, l'ensemble *de tous* les caractères de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$. La somme précédente s'écrit donc aussi

$$\sum_{\chi\in\bar{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})}\chi(\alpha)$$

et, d'après une propriété classique, elle vaut 0 ou $N(\mathfrak{a})$ suivant que α n'appartient pas, ou appartient à l'idéal $\mathfrak{a}$. C'est la propriété annoncée. On déduit facilement de là l'expression de l'indicateur généralisé : Introduisons la fonction caractéristique $\varepsilon_\alpha(\mathfrak{a})$ égale à 1 si $\alpha\in\mathfrak{a}$ et à 0 si $\alpha\notin\mathfrak{a}$; on a

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{d}\,|\,\alpha)=\varepsilon_\alpha(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a}),$$

puis par inversion de Mertens-Möbius

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)=\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}}\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right)\varepsilon_\alpha(\mathfrak{d})\,N(\mathfrak{d}), \tag{14}$$

ou encore

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)=\sum_{\mathfrak{d}/(\mathfrak{a};\,\alpha)}\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right)N(\mathfrak{d}), \tag{15}$$

en introduisant le p. g. c. d. de α et de $\mathfrak{a}$.

Les expression (14) et (15) prouvent que la valeur de l'indicateur généralisée est toujours un entier rationnel.

Les fonctions $\varepsilon_\alpha(\mathfrak{a})$ et $N(\mathfrak{a})$ possédant la propriété de multiplicativité restreinte

$$\varepsilon_\alpha(\mathfrak{a})\varepsilon_\alpha(\mathfrak{b})=\varepsilon_\alpha(\mathfrak{ab}),\qquad N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})=N(\mathfrak{ab}),\qquad \text{si } (\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})=1,$$

on déduit de la formule (14) et d'une proposition connue, que l'indicateur généralisé a la même propriété

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)\,\Phi(\mathfrak{b}\,|\,\alpha)=\Phi(\mathfrak{ab}\,|\,\alpha),\qquad \text{si } (\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})=1.$$

On peut, à partir de la formule (15), donner une expression plus condensée de l'indicateur généralisé; posons

$$(\mathfrak{a};\,\alpha)=\mathfrak{b},\qquad \text{puis}\qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{bc},$$

on a

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}=\mathfrak{c}\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}$$

et, si les deux idéaux $\mathfrak{c}$ et $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}$ sont premiers entre eux,

$$\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right)=\mu(\mathfrak{c})\,\mu\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\right);$$

sinon l'idéal $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}$ est divisible par des idéaux carrés, et $\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right)=0$. Il vient donc

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)=\mu(\mathfrak{c})\sum_{\mathfrak{d}}N(\mathfrak{d})\,\mu\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\right),$$

la sommation étant cette fois étendue aux idéaux $\mathfrak{d}/\mathfrak{b}$ tels que l'idéal $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}$ soit premier avec l'idéal $\mathfrak{c}$. Posons encore $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}=\mathfrak{d}'$ on peut écrire

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)=\mu(\mathfrak{c})\,N(\mathfrak{b})\sum_{\mathfrak{d}'}\frac{\mu(\mathfrak{d}')}{N(\mathfrak{d}')},$$

avec

$$\mathfrak{d}'/\mathfrak{b};\quad(\mathfrak{d}';\,\mathfrak{c})=(1).$$

Mais les idéaux $\mathfrak{d}'$ divisant $\mathfrak{b}$ et premiers avec $\mathfrak{c}$ sont tous les diviseurs du plus grand d'entre eux $\mathfrak{n}$, on peut donc écrire

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)=\mu(\mathfrak{c})\,N(\mathfrak{b})\frac{\varphi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}\qquad\text{ou}\qquad\frac{\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)}{N(\mathfrak{a})}=\frac{\mu(\mathfrak{c})}{N(\mathfrak{c})}\frac{\varphi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}. \tag{16}$$

La première de ces deux expressions montre que la valeur absolue de l'indicateur généralisé est au plus égale à la norme de l'idéal plus grand commun diviseur des idéaux $\mathfrak{a}$ et (α); cette valeur absolue est donc aussi au plus égale à la norme de l'idéal principal (α).

Prolongement de l'indicateur généralisé. — $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux sur le corps K, on posera

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{d}/(\mathfrak{a};\mathfrak{b})} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) N(\mathfrak{d}). \tag{17}$$

Les valeurs de cette nouvelle fonction sont encore des entier rationnels; il est clair qu'on obtient bien ainsi un prolongement de l'indicateur généralisé $\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)$ à l'ensemble des idéaux non principaux $\mathfrak{b}$. Il y a encore multiplicativité restreinte de la fonction prolongée par rapport à la variable $\mathfrak{a}$; de plus la formule de définition peut s'écrire

$$\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) \varepsilon_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{d})\, N(\mathfrak{d}),$$

en introduisant une fonction caractéristique $\varepsilon_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$ égale à 1 si $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ et à zéro dans le cas contraire; par suite, la formule d'inversion donne à nouveau

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{d}\,|\,\mathfrak{b}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathfrak{a} \not/ \mathfrak{b}; \\ N(\mathfrak{a}), & \text{si } \mathfrak{a}/\mathfrak{b}; \end{cases}$$

ce qui généralise la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé.

Application au développement des fonctions numériques définie sur l'ensemble des idéaux du corps. — Nous sommes maintenant en possession de tout ce qui est nécessaire pour transposer les calculs formels et les démonstrations de convergence qui ont été indiqués plus haut dans le cas des entiers rationnels. Bornons nous ici au cas le plus simple. Soit $f(\mathfrak{a})$ une fonction numérique partout finie, définie sur l'ensemble des idéaux du corps; soit $F(\mathfrak{a})$ son image de Möbius. On posera

$$A(\mathfrak{k}) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{F(\mathfrak{k}\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{k}\mathfrak{a})},$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux du corps, et l'on vérifiera formellement que la série

$$\sum_{\mathfrak{k}} A(\mathfrak{k})\Phi(\mathfrak{k}\,|\,\mathfrak{a}) \tag{18}$$

a pour somme $f(\mathfrak{a})$. La légitimation est immédiate si l'on suppose absolument convergente la série des images de Möbius

$$\sum_{\mathfrak{k}} F(\mathfrak{k});$$

$\mathfrak{k}$ décrivant l'ensemble des idéaux du corps. Comme dans le cas des entiers rationnels, la démonstration utilise la majoration

$$|\Phi(\mathfrak{k}|\mathfrak{a})| \leq \varphi(\mathfrak{a}),$$

qui a été établie plus haut lorsque l'idéal $\mathfrak{a}$ est principal, et qui se vérifie directement dans le cas général, au moyen de la formule de définition (17).

Il faut encore noter ici que la démonstration prouve l'uniforme convergence de la série (18) relativement à l'idéal $\mathfrak{a}$; si de plus $\mathfrak{a}=(\alpha)$ est principal, on se trouve en possession d'un développement de $f(\alpha)$ en une série d'exponentielles — les caractères ϖ_i — qui sont des racines de l'unité, ce développement est absolument et uniformément convergent, puisque la majoration utilisée revient à remplacer les exponentielles par l'unité, il en résulte, — sous l'hypothèse faite — la *presque-périodicité* de $f(\alpha)$, au sens de Bohr, sur le groupe additif Z_K des entiers du corps.

Indiquons, à titre d'exemple, la formule suivante :

$$S_s(\mathfrak{a}) = \zeta_K(s+1)\sum_{\mathfrak{k}} \frac{\Phi(\mathfrak{k}|\mathfrak{a})}{[N(\mathfrak{k})]^{s+1}},$$

relative à la somme des puissances $-s$ des normes des diviseurs de l'idéal $\mathfrak{a}$. Il y a absolue convergence de cette série si $\mathcal{R}(s)>1$ et la restriction $S_s(\alpha)$ de cette fonction est alors presque-périodique sur Z_K.

Nous laisserons au lecteur le soin d'étendre au cas de l'arithmétique sur le corps K, les calculs et les raisonnements des paragraphes 2, 3 et 4. La transposition est sensiblement immédiate.

Bornons-nous, pour terminer, à poser quelques questions :

Quelle est la propriété remplaçant la presque-périodicité pour une fonction telle que $S_s(\mathfrak{a})$ par exemple, lorsque $\mathcal{R}(s)>1$, quand l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est pas principal?

Existe-t-il une définition de l'indicateur généralisé $\Phi(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ généralisant celle de $\Phi(\mathfrak{a}|\alpha)$ par le moyen d'une somme de caractères?

SUR UN PROBLÈME

DE

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

PAR M. ÉLIE CARTAN.

I. — Introduction. Position du problème.

1. On sait qu'étant donné dans l'espace projectif à trois dimensions, un complexe linéaire non dégénéré K, toute courbe C du complexe, c'est-à-dire toute courbe C qui, en chacun de ses points M, est tangente au plan focal P du complexe en M, admet en ce point un contact du second ordre avec le plan P. On peut encore dire que toutes les courbes du complexe en sont des lignes asymptotiques, ou encore que *les lignes asymptotiques d'un complexe linéaire sont indéterminées*.

Ce théorème admet une démonstration analytique immédiate. Toute courbe du complexe, lieu d'un point (x_1, x_2, x_3, x_4) dépendant d'un paramètre t, est définie par une relation de la forme

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \, dx_j = 0, \tag{1}$$

où les coefficients constants $a_{ij} = -a_{ji}$ sont les coordonnées du complexe. On en déduit par différentiation la relation

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \, d^2 x_j = 0, \tag{2}$$

qui exprime précisément le contact du second ordre de la courbe en chacun de ses points (x_i) avec le plan d'équation

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i X_j = 0, \tag{3}$$

qui est le plan focal du point (x_i).

2. Ce théorème admet-il une réciproque et quelle est cette réciproque? Il ne semble pas que cette question ait été étudiée, bien que la réponse soit fort simple. Nous allons d'abord poser le problème dans toute sa généralité.

Problème. — *Étant donné un espace projectif réel à r dimensions* ($r \geq 3$), *on attache suivant une loi déterminée à chaque point* M *de l'espace un hyperplan* P (*variété linéaire à* $r-1$ *dimensions*). *On définit ainsi dans l'espace un champ d'éléments de contact* (M, P). *Appelons courbe du champ une courbe tangente en chacun de ses points* M *à l'hyperplan* P *associé à ce point. Déterminer les champs jouissant de la propriété que toute courbe du champ admette en chacun de ses points* M *un contact du second ordre avec l'hyperplan* P *associé à ce point;* ou encore, *déterminer les champs dont les lignes asymptotiques sont indéterminées.*

3. Ce problème peut se généraliser en se donnant en chaque point M de l'espace projectif à r dimensions une variété linéaire P à $p < r-1$ dimensions passant par ce point. On définit ainsi dans l'espace un *champ d'éléments plans* à p dimensions. Il s'agira alors de déterminer tous ceux de ces champs dont les courbes ont en chacun de leurs points M un contact du second ordre avec la variété P associée à ce point. Nous appellerons *champ* (C) tout champ jouissant de cette propriété.

4. Tous les champs (C) jouissent de la propriété énoncée dans le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné un champ* (C) *d'éléments plans à p dimensions dans l'espace à r dimensions, toutes les droites issues d'un point quelconque* M *et situées dans la variété plane* P *associée à ce point sont des lignes du champ.*

Il nous suffira de faire la démonstration dans le cas le plus simple $r=3$, $p=2$. Soient M_0 un point quelconque de l'espace, P_0 le plan associé, M_0T une droite quelconque du plan P_0 partant de M_0. Menons par la droite M_0T un plan quelconque Q distinct de P_0. Il existe une infinité de lignes du champ situées dans le plan Q et toutes ces lignes sont données par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre (1); parmi toutes ces lignes, une et une seule

(1) Si l'équation du plan P associé au point M de coordonnées (x, y, z) est

$$Z - z = p(x, y, z)(X - x) + q(x, y, z)(Y - y)$$

et si l'on prend pour plan Q le plan

$$Y - y_0 = m(X - x_0),$$

l'équation différentielle à intégrer est

$$\frac{dz}{dx} = p(x, y, z) + mq(x, y, z),$$

où l'on remplace y par $mx + y_0 - mx_0$. On suppose naturellement les fonctions $p(x, y, z)$ et $q(x, y, z)$ continues et continûment différentiables.

passe par le point M_0 et admet la tangente M_0T en ce point. Or, en chacun de ses points M, cette ligne a un contact du second ordre à la fois avec le plan fixe Q et le plan P associé à M. Ces deux plans étant distincts, le point M est un point d'inflexion de la ligne, qui est donc une droite. C. Q. F. D.

Ajoutons la remarque évidente que les droites issues d'un point M quelconque et appartenant au plan P associé à M sont les seules droites du champ. De là résulte le

COROLLAIRE. — *Si le point* N *est dans le plan associé au point* M, *réciproquement le point* M *est dans le plan associé au point* N.

II. — Deux classes de champs (C) de l'espace projectif à trois dimensions.

5. Dans l'espace projectif réel à trois dimensions on trouve immédiatement une classe de champs (C) en se donnant une famille à un paramètre de plans (plans tangents à une surface développable), telle que par un point quelconque M d'un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace, il passe un plan P de la famille et un seul. Il est alors évident que le champ déterminé dans $\mathcal{D}$ en associant à chaque point M de $\mathcal{D}$ le plan P de la famille qui passe par M est un champ (C). Une telle solution du problème ne peut en général être prolongée dans tout l'espace de manière que le plan associé à tout point M soit univoquement déterminé. Les solutions de la classe que nous venons d'indiquer sont des solutions *locales* du problème, non prolongeables dans tout l'espace.

6. Nous allons maintenant nous placer dans le cas où le champ est régulier dans tout l'espace projectif. Nous admettrons le corollaire du n° 4, *mais en faisant abstraction des conditions de continuité et de différentiabilité nécessaires à sa démonstration.* Nous allons démontrer géométriquement le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Considérons dans l'espace projectif réel un champ d'éléments de contact satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *à tout point de l'espace projectif* M *est associé un plan déterminé* P ;

2° *à deux points distincts sont associés deux plans distincts ;*

3° *si le point* N *est dans le plan* P *associé au point* M, *réciproquement le point* M *est dans le plan* Q *associé au point* M ;

Dans ces conditions le plan associé au point M *est le plan focal de* M *dans un complexe linéaire fixe non dégénéré* K.

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'*à trois points alignés* M_1, M_2, M_3 *sont associés trois plans* P_1, P_2, P_3 *appartenant à un même faisceau linéaire.* En effet les plans distincts P_1, P_2 se coupent suivant une droite Δ. Soit N un point

de Δ; N étant dans les plans associés à M_1 et M_2, réciproquement M_1 et M_2 sont dans le plan Q associé à N; par suite il en est de même de M_3; donc N est dans le plan associé à M_3; le plan P_3 associé à M_3 contient donc tous les points de Δ, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement les plans P_1, P_2, P_3 associés à *trois points* M_1, M_2, M_3 *non alignés ne peuvent appartenir à un même faisceau linéaire*. Sinon, en effet, soit Δ l'intersection commune des plans P_1, P_2, P_3, et soit N un point quelconque de Δ; les points M_1, M_2, M_3 appartiennent au plan Q associé à N; le plan Q est donc confondu avec le plan $M_1 M_2 M_3$; à deux points distincts de Δ est donc associé le même plan, contrairement à l'hypothèse 2°.

Cela posé appliquons une corrélation $\mathcal{C}$ déterminée aux plans P, transformant le plan P associé au point M en un point M′. Il en résulte une correspondance point par point transformant M en M′. Cette correspondance transforme deux points distincts en deux points distincts, trois points alignés en trois points alignés, trois points non alignés en trois points non alignés. Par suite cette correspondance est une homographie $\mathcal{H}$ (¹). Le passage du point M au plan associé P résulte alors de l'homographie $\mathcal{H}$ transformant M en M′, et de la corrélation $\mathcal{C}^{-1}$ inverse de $\mathcal{C}$, transformant M′ en P. *C'est donc une corrélation.* Autrement dit en utilisant les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4, l'équation du plan P associé au point (x_i) est de la forme

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i X_j = 0, \tag{4}$$

où les X_i désignent les coordonnées courantes.

Rappelons-nous enfin que le point M est situé dans le plan P associé; autrement dit on a l'identité

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a_{ij} = -a_{ji}.$$

Par suite si (y_i) désigne un point quelconque du plan P associé au point (x_i), on a

$$a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + a_{14}(x_1y_4 - x_4y_1) + a_{24}(x_2y_4 - x_4y_2) + a_{34}(x_3y_4 - y_4x_3) = 0.$$

Cela signifie que *le plan* P *est le plan focal du point* M *dans un complexe linéaire fixe, celui dont les coordonnées sont* a_{23}, a_{31}, a_{12}, a_{14}, a_{24}, a_{34}. Il est clair que ce complexe linéaire ne peut être dégénéré, car les plans focaux du complexe passeraient par une droite fixe et chacun d'eux serait associé à chacun des points qu'il contient. On doit donc avoir

$$a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} \neq 0.$$

(¹) *Voir*, au sujet de ce théorème, E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Gauthier-Villars, 1931, Chap. I, p. 1-11).

7. Les deux classes de champs (C) que nous venons de déterminer correspondent la première à un problème *local*, la seconde à un problème *global*, dans lequel intervient l'espace projectif tout entier. Le problème général posé n'est pas complètement résolu. Il reste à déterminer les solutions du problème définies *localement* dans un domaine donné $\mathcal{D}$ de l'espace, et ensuite à rechercher si ces solutions sont, ou non, susceptibles d'être prolongées dans l'espace tout entier. Nous avons déjà observé (n° 5) que les solutions locales, pour lesquelles les plans associés aux points d'un domaine $\mathcal{D}$ sont tangents à une surface développable, *ne sont pas prolongeables dans tout l'espace*. Nous allons montrer qu'au contraire les solutions *locales* pour lesquelles les plans associés aux différents points du domaine $\mathcal{D}$ envisagé ne satisfont pas à la condition d'être tangents à une même surface développable *sont prolongeables dans tout l'espace*, les plans associés aux points M de $\mathcal{D}$ étant les plans focaux de M par rapport à un complexe linéaire non dégénéré K.

Rappelons à ce propos un problème classique, celui des transformations conformes. Si l'on se place dans l'espace à deux dimensions constitué par le plan d'une variable complexe z (y compris le point représentant la valeur ∞ de z), une solution locale du problème n'est prolongeable dans tout l'espace que si la transformation conduisant du point z au point z' est homographique (ou encore si z' est une fonction homographique de la variable $\bar{z}$ complexe conjuguée de z). Au contraire dans l'espace à trois dimensions (en réalité l'espace anallagmatique réel), toute solution locale du problème est prolongeable dans tout l'espace (y compris le point à l'infini); néanmoins il convient de remarquer que ce théorème n'est démontré qu'en supposant que les fonctions qui donnent les coordonnées du point transformé au moyen des coordonnées du point initial sont deux fois continûment différentiables, ce qui dépasse les conditions strictement suffisantes auxquelles doivent satisfaire ces fonctions pour que le problème ait un sens.

Nous allons démontrer que toute solution locale du problème qui nous occupe dans le cas où l'équation de Pfaff

$$dz = p(x, y, z)\,dx + q(x, y, z)\,dy,$$

qui est considérée dans la Note du n° 4, n'est pas complètement intégrable, est prolongeable dans tout l'espace de manière que le plan P associé à un point M soit le plan focal de M dans un complexe linéaire non dégénéré fixe K. Il suffira pour la démonstration de supposer les fonctions p et q dérivables jusqu'à un certain ordre fini. Il restera la question ouverte de savoir quel est le minimum de cet ordre.

Nous allons, pour arriver à la solution de ce problème local, appliquer la méthode du repère mobile.

III. — La méthode du repère mobile appliquée au problème des champs (C) (1).

8. Attachons à chaque point de l'espace projectif un repère formé de quatre points *analytiques* indépendants A_0, A_1, A_2, A_3 (*points de base* du repère), en désignant par point analytique l'ensemble de quatre coordonnées non toutes nulles rapportées à un système de référence fixe; ces quatre points analytiques déterminent quatre points géométriques non coplanaires. Tout point analytique M est déterminé d'une manière et d'une seule par la formule

$$\mathbf{M} = x^0 \mathbf{A}_0 + x^1 \mathbf{A}_1 + x^2 \mathbf{A}_2 + x^3 \mathbf{A}_3 ; \tag{5}$$

les x^i sont les *coordonnées relatives* du point M; si on les multiplie par un même facteur λ non nul, le point analytique M deviendra le point analytique λM; mais il correspond au même point géométrique : autrement dit, considéré comme système de référence, le repère (A_0, A_1, A_2, A_3) ne diffère pas du repère $(\lambda A_0, \lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$.

Si l'on considère une famille à r paramètres de repères projectifs, la variation infinitésimale de ces repères est définie par des relations

$$d\mathbf{A}_i = \omega_i^k \mathbf{A}_k \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{6}$$

où les ω_i^k sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des paramètres, les coefficients étant des fonctions de ces paramètres. Si l'on remplace A_i par λA_i, les expressions ω_i^k se reproduisent, à l'exception de ω_0^0, ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3, qui s'augmentent de $\frac{d\lambda}{\lambda}$, de sorte que la variation infinitésimale *géométrique* du repère mobile ne dépend que des formes $\omega_i^j (i \neq j)$ et $\omega_i^i - \omega_0^0$.

9. Les formes ω_i^j ne sont pas arbitraires; elles satisfont à certaines relations qu'on obtient en exprimant que les équations (6) sont complètement intégrables. Ces relations, qui sont les *équations de structure* du groupe projectif, sont (2)

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j], \tag{7}$$

où $d\omega_i^j$ désigne la *différentielle extérieure* (3) de la forme ω_i^j et $[\omega_i^k \omega_k^j]$ la somme

(1) On peut consulter sur la méthode du repère mobile, E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* (Gauthier-Villars, 1937, 1re partie), et *La théorie des groupes finis et continus* (Gauthier-Villars, 1937).

(2) Dans cette formule comme dans la formule (6), nous adoptons l'usage qui consiste à ne pas indiquer le symbole de sommation devant une expression où figure deux fois le même indice k, qui est donc à regarder automatiquement comme un indice de sommation.

(3) La différentielle extérieure $d\omega$ d'une forme $\omega = A_i\, dx^i$ est la forme différentielle quadratique *extérieure* $[dA_i\, dx^i]$; le crochet signifie que la multiplication de dA_i par dx^i change de signe par le changement de l'ordre des facteurs. Voir E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (*Actual scient.*, 391, Hermann, 1945). La notation $d\omega$, due à E. Kähler, est différente de la notation ω', employée par l'auteur dans ses ouvrages précédents.

par rapport à k des *produits extérieurs* des deux formes ω_i^k et ω_k^j. On vérifie facilement que si $i \neq j$, les seconds membres ne font intervenir, avec les $\omega_\alpha^3 (\alpha \neq 3)$, que les différences $\omega_i^i - \omega_0^0$. Il en est de même de l'expression développée de la différentielle extérieure de $\omega_i^i - \omega_0^0$.

Cela posé imaginons dans l'espace, d'une manière plus précise dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace, qu'on ait attaché à chaque point A_0 un plan de manière à définir un champ d'éléments de contact. Nous choisirons le repère attaché à A_0 de manière que les points A_1 et A_2 soient dans ce plan. En se déplaçant constamment dans une direction tangente au plan $A_0 A_1 A_2$, on aura l'équation (1)

$$\omega^3 = 0; \tag{8}$$

cette équation de Pfaff est celle qui définit les courbes du champ.

On aura un champ d'éléments (**C**) si $d^2 A_0$ est une combinaison linéaire de A_0, A_1, A_2. Or de

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2,$$

on déduit par différentiation ordinaire, en ne conservant dans le second membre que les termes en A_3,

$$d^2 A_0 = (\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3) A_3 + \dots.$$

La condition pour que le champ soit (**C**) *est donc*

$$\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 \equiv 0 \pmod{\omega^3}. \tag{9}$$

Comme les trois formes ω^1, ω^2, ω^3 sont des combinaisons linéairement indépendantes des coordonnées non homogènes d'un point de l'espace, on devra avoir, d'après (9),

$$\omega_1^3 \equiv c\omega^2, \qquad \omega_2^3 \equiv -c\omega_1 \pmod{\omega^3},$$

ou, d'une manière plus précise,

$$\omega_1^3 = c\omega^2 + a\omega^3, \qquad \omega_2^3 = -c\omega^1 + b\omega^3. \tag{10}$$

Si c était nul l'équation (8) serait complètement intégrable. Nous laissons de côté ce cas, qui a été traité au n° 5. Nous pouvons alors choisir les repères de manière à avoir $c = 1$, $a = b = 0$. En effet par un changement de repère laissant fixe le point A_0 et le plan $A_0 A_1 A_2$, c se reproduit multiplié par un facteur arbitraire, ce qui permet de ramener c à la valeur 1 ; les coefficients a et b deviennent nuls en prenant $A_1 - aA_0$ et $A_2 - bA_0$ comme nouveaux points de base à la place de A_1 et A_2.

(1) Nous écrirons dorénavant ω^1, ω^2, ω^3 au lieu de ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3.

Finalement *la recherche des champs* (**C**) *revient à l'intégration du système différentiel*

$$\omega_1^3 = \omega^2, \qquad \omega_2^3 = -\omega^1. \tag{11}$$

10. Pour intégrer le système (11), nous allons le *différentier extérieurement* (1) en tenant compte des équations de structure (7). Le calcul donne les équations quadratiques extérieures

$$\begin{cases} [\omega^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3)] + [\omega^3(\omega_3^2 + \omega_1^0)] = 0, \\ [\omega^1(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3)] + [\omega^3(\omega_3^1 - \omega_2^0)] = 0. \end{cases} \tag{12}$$

La première de ces équations montre que la forme $\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3$ est une combinaison linéaire de ω^2 et de ω^3; la deuxième montre, d'autre part, qu'elle est une combinaison linéaire de ω^1 et de ω^3. On en déduit

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 = A\omega^3, \tag{13}$$

d'où l'on déduit ensuite

$$\begin{cases} \omega_3^2 + \omega_1^0 = A\omega^2 + B\omega^3, \\ \omega_3^1 - \omega_2^0 = A\omega^1 + C\omega^3, \end{cases} \tag{14}$$

les quantités A, B, C étant des fonctions inconnues.

La différentiation extérieure de la relation (13), en tenant compte des équations de structure (7), donne

$$2[\omega^1(\omega_3^2 + \omega_1^0)] - 2[\omega^2(\omega_3^1 - \omega_2^0)] + 2A[\omega^1\omega^2] + A[\omega^3(\omega_3^3 - \omega_0^0)] + [dA\omega^3] = 0, \tag{15}$$

d'où, en tenant compte de (14), et ne conservant que les termes qui ne contiennent pas ω^3 en facteur, il reste le seul terme $6A[\omega^1\omega^2]$. On en déduit

$$A = 0. \tag{16}$$

La différentiation extérieure des équations (14) donne ensuite, en tenant compte de ces équations elles-mêmes et en laissant de côté les termes qui contiennent ω^3 en facteur,

$$B[\omega^1\omega^2] = 0, \qquad C[\omega^1\omega^2] = 0,$$

d'où

$$B = C = 0. \tag{17}$$

Finalement *le système* (11) *à intégrer entraîne les équations*

$$\begin{cases} \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 = 0, \\ \omega_3^2 + \omega_1^0 = 0, \\ \omega_3^1 - \omega_2^0 = 0, \end{cases} \tag{18}$$

(1) Nous appliquons ici les méthodes développées dans l'ouvrage cité dans la Note (3) du n° 9.

qui, avec les équations (11), *forment un système complètement intégrable*, la différentiation extérieure des équations (11) et (18) ne donnant aucune relation nouvelle.

La solution générale du problème dépend donc de cinq constantes arbitraires, et, en outre, on peut toujours passer par une transformation projective d'une solution particulière à une autre solution quelconque (1). Comme le groupe projectif dépend de 15 paramètres arbitraires, il en résulte que *chaque solution est invariante par un groupe projectif à* $15 - 5 = 10$ *paramètres*.

11. Il est facile maintenant de montrer que la solution générale dont nous venons de démontrer l'existence est fournie par les champs d'éléments associés à un complexe linéaire arbitraire. Il suffit pour cela de remarquer que ces champs dépendent de 5 constantes arbitraires, à savoir les rapports mutuels des six coordonnées a_{ij} d'un complexe linéaire; ils épuisent donc toutes les solutions du problème. Mais on peut aussi le vérifier de plusieurs manières.

a. Remarquons d'abord que, les 15 formes $\omega_i^j (i \neq j)$ et $\omega_i^i - \omega_0^0$ étant liées par les 5 équations (11) et (18), les 10 formes

$$\omega^1, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \quad \omega_1^1 - \omega_0^0, \quad \omega_2^2 - \omega_0^0, \quad \omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_1^0, \quad \omega_2^0, \quad \omega_3^0$$

restent arbitraires. Autrement dit les repères qu'on peut attacher aux différents points du domaine $\mathcal{D}$ dépendent de 10 paramètres. Or on peut restreindre le choix de ces repères en supposant nulles les 7 formes

$$\omega_1^1 - \omega_0^0, \quad \omega_2^2 - \omega_0^0, \quad \omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_1^0, \quad \omega_2^0, \quad \omega_3^0. \tag{19}$$

En effet les 7 équations qu'on obtient en les annulant forment un système complètement intégrable, comme le montrent les équations

$$\begin{aligned}
d(\omega_1^1 - \omega_0^0) &= -2[\omega^1 \omega_1^0] - [\omega^3 \omega_3^0] + [\omega_1^2 \omega_2^1], \\
d(\omega_2^2 - \omega_0^0) &= -2[\omega^2 \omega_2^0] - [\omega^3 \omega_3^0] - [\omega_1^2 \omega_2^1], \\
d\omega_1^2 &= -2[\omega^2 \omega_1^0] + [\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^1)], \\
d\omega_2^1 &= -2[\omega^1 \omega_2^0] + [\omega_2^1(\omega_1^1 - \omega_2^2)], \\
d\omega_1^0 &= [\omega_1^0(\omega_0^0 - \omega_1^1)] + [\omega_1^2 \omega_2^0] + [\omega^2 \omega_3^0], \\
d\omega_2^0 &= [\omega_2^0(\omega_0^0 - \omega_2^2)] + [\omega_2^1 \omega_1^0] - [\omega^1 \omega_3^0], \\
d\omega_3^0 &= -2[\omega_1^0 \omega_2^0] + [\omega_3^0(2\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2)]
\end{aligned}$$

déduites des équations de structure et des relations (11) et (18). Les seconds membres s'annulant avec les 7 formes (19), il en résulte que les équations

(1) Cela résulte du théorème d'après lequel deux familles de repères projectifs satisfaisant à un même système de relations linéaires à coefficients constants entre les formes ω^j sont projectivement égales, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation projective. Voir E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle* (Gauthier-Villars, 1937).

obtenues en annulant ces 7 formes constituent un système complètement intégrable. En donnant aux intégrales premières de ce système des valeurs numériques constantes, on restreint à 3 le nombre des paramètres arbitraires dont dépendent les repères attachés aux différents points du domaine. Les seules formes ω_i^j restantes sont alors ω^1, ω^2, ω^3. D'autre part les équations de structure donnent

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = 0, \qquad d\omega^3 = 2\,\omega^1\,\omega^2.$$

On peut alors poser

$$\omega^1 = du^1, \qquad \omega^2 = du^2, \qquad \omega^3 = du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1. \tag{20}$$

Les équations (6) deviennent simplement

$$\begin{aligned} d\mathrm{A}_0 &= du^1\,\mathrm{A}_1 + du^2\,\mathrm{A}_2 + (du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1)\,\mathrm{A}_3, \\ d\mathrm{A}_1 &= du^2\ \mathrm{A}_3, \\ d\mathrm{A}_2 &= -\ du^1\ \mathrm{A}_3, \\ d\mathrm{A}_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où, en désignant par C_0, C_1, C_2, C_3 des points analytiques *fixes*,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_3 &= \mathrm{C}_3, \\ \mathrm{A}_1 &= \mathrm{C}_1 + u^2\mathrm{C}_3, \\ \mathrm{A}_2 &= \mathrm{C}_2 - u^1\mathrm{C}_3, \\ \mathrm{A}_0 &= \mathrm{C}_0 + u^1\mathrm{C}_1 + u^2\mathrm{C}_2 + u^3\mathrm{C}_3. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Les paramètres u^1, u^2, u^3 sont donc tout simplement les coordonnées non homogènes, par rapport au repère fixe $(\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3)$, du point A_0, et le plan $\mathrm{A}_0\,\mathrm{A}_1\,\mathrm{A}_2$, étant donnée l'expression de la forme ω^3, a pour équation

$$\mathrm{U}^3 - u^3 + u^1(\mathrm{U}^2 - u^2) - u^2(\mathrm{U}^1 - u^1) = 0,$$

ou plus simplement

$$\mathrm{U}^3 - u^3 + u^1\mathrm{U}^2 - u^2\mathrm{U}^1 = 0. \tag{22}$$

b. On peut procéder autrement. Désignons par x^0, x^1, x^2, x^3 les coordonnées homogènes relatives d'un point M, conformément à la formule (6), et par y^0, y^1, y^2, y^3 celles d'un autre point N. Considérons le complexe linéaire attaché au repère d'origine A_0 et dont l'équation est

$$x^0y^3 - x^3y^0 + x^1y^2 - x^2y^1 = 0. \tag{23}$$

Nous allons montrer, en tenant compte des équations (11) et (18), que ce complexe linéaire est *stable*, autrement dit reste géométriquement le même quand on passe d'un point quelconque de l'espace à tout point infiniment voisin.

Pour cela partons des équations qui expriment que les points M et N des coordonnées relatives x^i, y^i sont fixes. On les obtient en différentiant extérieurement l'équation (5), ce qui donne

$$(24)\qquad \begin{cases} dx^i + x^k \omega_k^i = 0 \\ dy^i + y^k \omega_k^i = 0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

ou, en tenant compte de (11) et (18),

$$(25)\qquad \begin{cases} dx^0 + x^0\omega_0^0 + x^1\omega_1^0 + x^2\omega_2^0 + x^3\omega_3^0 = 0, \\ dx^1 + x^0\omega^1 + x^1\omega_1^1 + x^2\omega_2^1 + x^3\omega_2^0 = 0, \\ dx^2 + x^0\omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^2\omega_2^2 - x^3\omega_1^0 = 0, \\ dx^3 + x^0\omega^3 + x^1\omega^2 - x^2\omega^1 + x^3(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0) = 0, \end{cases}$$

ainsi que des formules analogues pour les coordonnées y^i. On en déduit

$$d(x^0y^3 - x^3y^0) + (x^0y^3 - x^3y^0)(\omega_1^1 + \omega_2^2) + (x^0y^1 - x^1y^0)\omega^2 - (x^0y^2 - x^2y^0)\omega^1 + (x^1y^3 - x^3y^1)\omega_1^0 + (x^2y^3 + x^3y^1)\omega_2^0 = 0,$$

$$d(x^1y^2 - x^2y^1) + (x^1y^2 - x^2y^1)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - (x^0y^1 - x^1y^0)\omega^2 + (x^0y^2 - x^2y^0)\omega^1 - (x^1y^3 - x^3y^1)\omega_1^0 - (x^2y^3 - x^3y^2)\omega_2^0 = 0,$$

d'où

$$d(x^0y^3 - x^3y^0 + x^1y^2 - x^2y^1) = -(x^0y^3 - x^3y^0 + x^1y^2 - x^2y^1)(\omega_1^1 + \omega_2^2) \quad (1).$$

L'équation (23) se conserve donc dans tout le domaine, de sorte que c'est l'équation qui exprime que la droite MN appartient à un complexe linéaire fixe. Or le plan focal de A_0 a pour équation $X^3 = 0$: c'est donc le plan associé au point A_0. *Le champ d'éléments obtenu est donc le champ attaché à un complexe linéaire fixe non dégénéré.*

12. Le problème posé au n° 7 est complètement résolu. *Abstraction faite du cas où l'équation différentielle qui définit les courbes d'un champ dans un domaine $\mathfrak{D}$ est complètement intégrable, nous avons montré que tout champ* (C) *défini dans ce domaine est prolongeable dans tout l'espace et n'est autre que le champ des éléments formés par un point et le plan focal de ce point par rapport à un complexe linéaire non dégénéré.*

La démonstration suppose que les données satisfont à des conditions de dérivabilité telles que les différentiations extérieures opérées au n° 10 soient possibles, ce que n'exige naturellement pas l'analyticité. *Du reste il n'est pas certain que ces conditions de dérivabilité soient nécessaires pour la validité du théorème.*

---

(1) On aurait beaucoup simplifié le calcul en remplaçant l'équation (23) par l'équation quadratique *extérieure* $[x^0x^3] + [x^1x^2] = 0$. Les équations (24) seraient alors à remplacer par les équations

$$d[x^ix^j] + [x^ix^k]\omega_k^j + (x^kx^j]\omega_k^i = 0.$$

IV. — Les champs (C) dans l'espace projectif à r dimensions.

13. Examinons maintenant le problème des champs (C) d'éléments de contact dans l'espace projectif à r dimensions. Les courbes du champ sont définies par une équation de Pfaff. Deux cas sont possibles.

Si cette équation est complètement intégrable, elle définit une famille $\mathcal{F}$ à un paramètre d'hypersurfaces. Si le champ est (C), ces hypersurfaces sont des hyperplans. Plaçons-nous dans un domaine $\mathcal{D}$ tel que par tout point M de ce domaine passe un hyperplan de la famille et un seul. On aura un champ (C) en associant à chaque point M l'hyperplan qui passe par ce point.

Laissons ce cas de côté. Nous allons appliquer la méthode de repère mobile. Nous affectons à chaque point A_0 du domaine $\mathcal{D}$ un repère formé de $r+1$ points analytiques $A_0, A_1, \ldots, A_r$, permettant de donner à tout point analytique M des coordonnées relatives $x^0, x^1, \ldots, x^r$ définies par la relation

$$M = x^0 A_0 + x^1 A_1 + \ldots + x^r A_r. \tag{26}$$

Si l'on considère une famille de repères dépendant de plusieurs paramètres, nous aurons par variation de ces paramètres, des relations

$$dA_i = \omega_i^k A_k \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r), \tag{27}$$

avec les conditions de compatibilité (équations de structure)

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]. \tag{28}$$

A tout point A_0 du domaine $\mathcal{D}$ on associe un hyperplan que nous pourrons toujours supposer être l'hyperplan $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{r-1}$, de sorte que l'équation de Pfaff qui définit les courbes du champ sera

$$\omega^r = 0. \tag{29}$$

Le champ sera (C) si en se déplaçant sur toute courbe du champ le point $d^2 A_0$ est situé dans l'hyperplan associé au point A_0. Or on a, le long d'une telle courbe

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \ldots + \omega^{r-1} A_{r-1},$$

d'où, en différentiant et ne conservant dans le second membre que les termes en A_r,

$$d^2 A_0 = \ldots + (\omega^1 \omega_1^r + \ldots + \omega^{r-1} \omega_{r-1}^r) A_r.$$

La condition cherchée est donc que la forme différentielle quadratique $\omega^1 \omega_1^r + \ldots + \omega_{r-1} \omega_{r-1}^r$, s'annule avec ω^r, autrement dit qu'on ait des relations de la forme

$$\omega_i^r = c_{ik} \omega^k + a_i \omega^r \qquad (c_{ik} = -c_{ki}).$$

On peut choisir le repère d'origine A_0 de manière à donner aux coefficients $c_{ij} = -c_{ji}$ et a_i des valeurs numériques fixes. Partons d'abord de l'expression de la différentielle extérieure de ω^r, à savoir

$$d\omega^r = \frac{1}{2} c_{ij} [\omega^i \omega^j] + [\omega^r (\omega_r^r - \omega_0^0 - a_i \omega^i)];$$

en changeant les points de base de l'hyperplan $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{r-1}$, ce qui revient à effectuer une substitution linéaire sur les $r-1$ formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r-1}$, on peut s'arranger pour avoir

$$c_{12} = -c_{21} = c_{34} = -c_{43} = \ldots = c_{2p-1,2p} = -c_{2p,2p-1} = 1,$$

tous les autres coefficients c_{ij} étant nuls. Une fois ce résultat atteint, en prenant $A_i - a_i A_0$ comme nouveaux points A_i, on aura $a_i = 0$. Les équations différentielles du problème s'écrivent alors

$$(3o)\quad \omega_1^r = \omega^2, \quad \omega_2^r = -\omega^1, \quad \omega_3^r = \omega^4, \quad \omega_4^r = -\omega^3, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-1}^r = \omega^{2p}, \quad \omega_{2p}^r = -\omega^{2p-1},$$
$$\omega_{2p+1}^r = \omega_{2p+2}^r = \ldots = \omega_{r-1}^r = 0.$$

Nous désignerons dans la suite les $2p$ premiers indices $1, 2, \ldots, 2p$ par les notations $2i-1, 2i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, les indices $2p+1, \ldots, r-1$ par $\alpha, \beta, \ldots$, de sorte que les équations (3o) prennent la forme

$$(3o')\quad \omega_{2i-1}^r = \omega^{2i}, \quad \omega_{2i}^r = -\omega^{2i-1}; \quad \omega_\alpha^r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = 2p+1, \ldots, r-1).$$

Nous allons distinguer deux cas suivant que p est égal à 1 ou supérieur à 1.

14. *Premier cas; l'entier p est égal à* 1. — Le système différentiel (3o') s'écrit ici

$$(31)\qquad \omega_1^r = \omega^2, \quad \omega_2^r = -\omega^1, \quad \omega_\alpha^r = 0 \qquad (\alpha = 3, \ldots, r-1).$$

La différentiation extérieure donne

$$(32)\qquad \begin{cases} \omega^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_r^r)] + [\omega^\alpha \omega_\alpha^2] + [\omega^r(\omega_r^2 + \omega_1^0)] = 0, \\ \omega^1(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_r^r)] + [\omega^\alpha \omega_\alpha^1] + [\omega^r(\omega_r^1 - \omega_2^0)] = 0, \\ [\omega^1 \omega_\alpha^2] - [\omega^2 \omega_\alpha^1] - [\omega^r \omega_\alpha^0] = 0. \end{cases}$$

La dernière équation (32) montre que les formes $\omega_\alpha^1, \omega_\alpha^2, \omega_\alpha^0$ ne dépendent que de $\omega^1, \omega^2, \omega^r$. Posons

$$(33)\qquad \begin{cases} \omega_\alpha^1 = a_{\alpha 1}^1 \omega^1 + a_{\alpha 2}^1 \omega^2 + a_{\alpha r}^1 \omega^r, \\ \omega_\alpha^2 = a_{\alpha 1}^2 \omega^1 + a_{\alpha 2}^2 \omega^2 + a_{\alpha r}^2 \omega^r, \\ \omega_\alpha^0 = a_{\alpha 1}^0 \omega^1 + a_{\alpha 2}^0 \omega^2 + a_{\alpha r}^0 \omega^r, \end{cases}$$

avec les relations suivantes, conséquences des dernières équations (32),

$$(34)\qquad a_{\alpha 1}^1 + a_{\alpha 2}^2 = 0, \qquad a_{\alpha r}^2 + a_{\alpha 1}^0 = 0, \qquad a_{\alpha r}^1 - a_{\alpha 2}^0 = 0.$$

En portant dans les deux premières équations (32), on obtient

$$a^1_{\alpha 2} = a^2_{\alpha 1} = 0, \qquad a^1_{\alpha 1} - a^2_{\alpha 2} = 0; \tag{35}$$

$$\begin{cases} \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^0_0 - \omega^r_r = a^1_{\alpha 1}\omega^\alpha + A\,\omega^r, \\ \omega^2_r + \omega^0_1 \qquad\quad = a^2_{\alpha r}\omega^\alpha + A\,\omega^2 + H\,\omega^r, \\ \omega^1_r - \omega^0_2 \qquad\quad = a^1_{\alpha r}\omega^\alpha + A\,\omega^1 + K\,\omega^r, \end{cases} \tag{36}$$

d'où

$$a^1_{\alpha 1} = a^1_{\alpha 2} = a^2_{\alpha 1} = a^2_{\alpha 2} = 0. \tag{37}$$

La différentiation extérieure de la première équation (36), où les formes ω^α ne figurent plus, montre, en se bornant aux termes qui ne contiennent pas ω^r en facteur, que le coefficient A est nul; en achevant le calcul, on obtient les relations

$$a^0_{\alpha 1} - 2a^2_{\alpha r} = a^0_{\alpha 2} + 2a^1_{\alpha r} = 0,$$

d'où, d'après (34),

$$a^1_{\alpha r} = a^2_{\alpha r} = a^0_{\alpha 1} = a^0_{\alpha 2} = 0,$$

et enfin $H = K = 0$. Finalement les équations (33) se réduisent à

$$\omega^1_\alpha = \omega^2_\alpha = 0, \qquad \omega^0_\alpha = a^0_{\alpha r}\omega^r. \tag{38}$$

Enfin la différentiation extérieure des deux premières équations (38) donne

$$[\omega^0_\alpha \omega^1] = [\omega^0_\alpha \omega^2] = 0, \qquad \text{d'où} \quad \omega^0_\alpha = 0.$$

On arrive donc, pour définir les solutions du problème, *au système complètement intégrable* (1)

$$\begin{cases} \omega^r_1 = \omega^2, \qquad \omega^r_2 = -\omega^1, \qquad \omega^0_\alpha = \omega^1_\alpha = \omega^2_\alpha = \omega^r_\alpha = 0, \\ \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^0_0 - \omega^r_r = 0, \qquad \omega^2_r + \omega^0_1 = 0, \qquad \omega^1_r - \omega^0_2 = 0. \end{cases} \tag{39}$$

15. Le système (39) comprend $4(r-3)+5 = 4r-7$ équations indépendantes. Sa solution générale dépend donc de $4r-7$ constantes arbitraires. Chaque solution admet par suite un groupe projectif de

$$r(r+2) - (4r-7) = r^2 - 2r + 7 \text{ paramètres.}$$

Les équations de structure de ce groupe se déduisent des équations de structure (28) en tenant compte des relations (39).

Toutes les solutions du système (39) sont projectivement égales. Pour les déterminer on peut restreindre la famille des repères attachés aux différents points de l'espace en remarquant que les équations

$$\omega^1_1 - \omega^0_0 = 0, \qquad \omega^2_2 - \omega^0_0 = 0, \qquad \omega^\alpha_\alpha - \omega^0_0 = 0, \qquad \omega^\alpha_r = 0,$$

$$\omega^0_1 = 0, \qquad \omega^0_2 = 0, \qquad \omega^2_1 = 0, \qquad \omega^1_2 = 0, \qquad \omega^\alpha_1 = 0, \qquad \omega^\alpha_2 = 0, \qquad \omega^\alpha_\beta = 0, \qquad \omega^0_r = 0,$$

(1) La différentiation extérieure du système (39) ne conduit à aucune relation nouvelle.

forment un système complètement intégrable et en égalant à des valeurs numériques fixes les intégrales premières de ce système; il restera ainsi attaché à chaque point un seul repère. On aura alors

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = 0, \qquad d\omega^\alpha = 0, \qquad d\omega^r = 2[\omega^1\omega^2],$$

d'où

$$\omega^1 = du^1, \qquad \omega^2 = du^2, \qquad \omega^\alpha = du^\alpha, \qquad \omega^r = du^r + u^1 du^2 - u^2 du^1.$$

Des équations

$$dA_i = \omega_i^k A_k$$

on tire alors, en désignant par $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_r$ $r+1$ points analytiques fixes,

$$A_0 = C_0 + u^1 C_1 + u^2 C_2 + u^\alpha C_\alpha + u^r C_r;$$

les variables $u^1, u^2, \ldots, u^r$ sont donc les coordonnées projectives de A_0 rapportées à un repère fixe. L'équation

$$\omega^r \equiv du^r + u^1 du^2 - u^2 du^1 = 0$$

définit le champ cherché. L'hyperplan associé au point (u^i) a pour équation

$$U^r - u^r + u^1 U^2 - u^2 U^1 = 0,$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$x^0 X^r - x^r X^0 + x^1 X^2 - x^2 X^1 = 0;$$

c'est l'hyperplan focal de A_0 par rapport au complexe linéaire $p^{0r} + p^{12} = 0$.

On peut retrouver ce résultat en démontrant que l'équation quadratique extérieure

$$[x^0 x^r] + [x^1 x^2] = 0,$$

où les x^i sont les coordonnées *relatives* d'un point fixe, est *stable*.

On voit que *toute solution locale du problème se prolonge dans tout l'espace, l'hyperplan associé à un point arbitraire* M *étant l'hyperplan focal de* M *par rapport à un complexe linéaire fixe dont l'équation est réductible à la forme* $p^{0r} + p^{12} = 0$.

16. *Cas général; l'entier p est supérieur à* 1. — Revenons aux équations générales du système différentiel du problème, à savoir

$$(3o') \qquad \omega^r_{2i-1} = \omega^{2i}, \quad \omega^r_{2i} = -\omega^{2i-1}, \quad \omega^r_\alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = 2p+1, \ldots, r-1).$$

La différentiation extérieure des équations (3o') donne

$$(4o) \qquad \begin{cases} [\omega^{2i}(\omega^{2i}_{2i-1} + \omega^{2i}_{2i} - \omega^0_0 - \omega^r_r)] + [\omega^{2j-1}(\omega^{2i}_{2j-1} - \omega^{2j}_{2i-1})] \\ \quad + [\omega^{2j}(\omega^{2j-1}_{2i-1} + \omega^{2i}_{2j})] + [\omega^\alpha \omega^{2i}_\alpha] + [\omega^r(\omega^{2i}_r + \omega^0_{2i-1})] = 0, \\ [\omega^{2i-1}(\omega^{2i-1}_{2i-1} + \omega^{2i}_{2i} - \omega^0_0 - \omega^r_r)] + [\omega^{2j-1}(\omega^{2i-1}_{2j-1} + \omega^{2j}_{2i})] \\ \quad + [\omega^{2j}(\omega^{2i-1}_{2j} - \omega^{2j-1}_{2i})] + [\omega^\alpha \omega^{2i-1}_\alpha] + [\omega^r(\omega^{2i-1}_r - \omega^0_{2i})] = 0, \\ [\omega^{2i-1}\omega^{2i}_\alpha] - [\omega^{2i}\omega^{2i-1}_\alpha] - [\omega^r \omega^0_\alpha] = 0. \end{cases}$$

Dans les deux premières équations (40) l'indice i est fixe, l'indice de sommation j s'étend à toutes les valeurs 1, 2, ..., p *autres que* i, et l'indice de sommation α à toutes les valeurs $2p+1$, ..., $r-1$. Dans la troisième équation (40), l'indice de sommation i s'étend à toutes les valeurs 1, 2, ..., p.

La troisième équation (40) montre que les formes ω_α^{2i-1}, ω_α^{2i}, ω_α^0 sont des combinaisons linéaires de $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{2p}, \omega^r$. Nous poserons

$$(41)\qquad \begin{cases} \omega_\alpha^{2i-1} = a_{\alpha,2j-1}^{2i-1}\omega^{2j-1} + a_{\alpha,2j}^{2i-1}\omega^{2j} + a_{\alpha,r}^{2i-1}\omega^r, \\ \omega_\alpha^{2i} = a_{\alpha,2j-1}^{2i}\omega^{2j-1} + a_{\alpha,2j}^{2i}\omega^{2j} + a_{\alpha,r}^{2i}\omega^r, \\ \omega_\alpha^{0} = a_{\alpha,2j-1}^{0}\omega^{2j-1} + a_{\alpha,2j}^{0}\omega^{2j} + a_{\alpha,r}^{0}\omega^r, \end{cases}$$

l'indice de sommation j prenant toutes les valeurs 1, 2, ..., p. La dernière équation (40) donne entre les coefficients les relations

$$(42)\qquad \begin{cases} a_{\alpha,2j-1}^{2i-1} + a_{\alpha,2i}^{2j} = 0, \quad a_{\alpha,2j}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{2j-1} = 0, \quad a_{\alpha,2j-1}^{2i} - a_{\alpha,2i-1}^{2j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ a_{\alpha,r}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{0} = 0, \quad a_{\alpha,r}^{2i} + a_{\alpha,2i-1}^{0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

En portant les valeurs (41) de ω_α^{2i-1}, ω_α^{2i}, ω_α^0 dans les deux premières équations (40), on obtient d'abord les deux relations

$$(43)\qquad a_{\alpha,2i-1}^{2i} = 0, \qquad a_{\alpha,2i}^{2i-1} = 0,$$

puis les équations suivantes, dans les seconds membres desquelles on a supprimé les termes en $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{2p}, \omega^r$,

$$(44)\qquad \begin{cases} \omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2i} - \omega_0^0 - \omega_r^r = a_{\alpha,2i}^{2i}\ \omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2i} - \omega_0^0 - \omega_r^r = a_{\alpha,2i-1}^{2i-1}\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2j-1}^{2i} - \omega_{2i-1}^{2j} = a_{\alpha,2j-1}^{2i}\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2i-1}^{2j-1} + \omega_{2j}^{2i} = a_{\alpha,2j}^{2i}\ \omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2j-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2j} = a_{\alpha,2j-1}^{2i-1}\omega^\alpha + \ldots; \\ \omega_{2j}^{2i-1} - \omega_{2i}^{2j-1} = a_{\alpha,2j}^{2i-1}\ \omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_r^{2i} + \omega_{2i-1}^0 = a_{\alpha,r}^{2i}\ \omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_r^{2i-1} - \omega_{2i}^0 = a_{\alpha,r}^{2i-1}\ \omega^\alpha + \ldots. \end{cases}$$

On en déduit les nouvelles relations

$$(45)\qquad a_{\alpha,2i-1}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{2i} = 0, \quad a_{\alpha,2j-1}^{2i} + a_{\alpha,2i-1}^{2j} = 0, \quad a_{\alpha,2j-1}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{2j} = 0, \quad a_{\alpha,2j}^{2i-1} + a_{\alpha,2i}^{2j-1} = 0,$$

qui, confrontées avec (42) et (43), donnent

$$(46)\qquad a_{\alpha,2j-1}^{2i-1} = a_{\alpha,2j}^{2i-1} = a_{\alpha,2j-1}^{2i} = a_{\alpha,2j}^{2i} = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

Les formes ω_α^k ($k = 1, 2, \ldots, 2p$) ne dépendent donc que de ω^r :

$$\omega_\alpha^k = a_{\alpha r}^k \omega^r,$$

d'où, par différentiation extérieure, en laissant de côté les termes qui contiennent ω^r en facteur,

$$[\omega_\alpha^0 \omega^k] = 2 a_{\alpha r}^k [\omega^1\omega^2 + \ldots + \omega^{2p-1}\omega^{2p}] + \ldots;$$

cela n'est possible que si $a^k_{\alpha r}=0$, d'où

$$\omega^k_\alpha = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2p); \tag{47}$$

ces équations conduisent elles-mêmes par différentiation extérieure à la nouvelle équation

$$\omega^0_\alpha = 0. \tag{48}$$

17. Reprenons maintenant les équations (40) et particulièrement les quatre équations de rang 1, 2, 3, 4 en ne conservant que les termes qui contiennent ω^1, ω^2, ω^3, ω^4. Posons

$$\begin{cases} \omega^1_1+\omega^2_2-\omega^0_0-\omega^r_r = A\,\omega^3+A'\omega^4, \\ \omega^3_3+\omega^4_4-\omega^0_0-\omega^r_r = B\,\omega^1+B'\omega^2. \end{cases} \tag{49}$$

On aura

$$\begin{cases} A[\omega^2\omega^3]+A'[\omega^2\omega^4]+[\omega^3(\omega^2_3-\omega^4_1)]+[\omega^4(\omega^2_1+\omega^2_4)]=0, \\ A[\omega^1\omega^3]+A'[\omega^1\omega^4]+[\omega^3(\omega^1_3+\omega^4_2)]+[\omega^4(\omega^1_4-\omega^3_2)]=0, \\ -B[\omega^1\omega^4]-B'[\omega^2\omega^4]+[\omega^4(\omega^1_1-\omega^2_3)]+[\omega^2(\omega^1_3+\omega^4_2)]=0, \\ -B[\omega^1\omega^2]-B'[\omega^2\omega^3]+[\omega^4(\omega^3_1+\omega^2_4)]+[\omega^2(\omega^3_2-\omega^4_4)]=0, \end{cases} \tag{50}$$

d'où l'on tire $A=B=A'=B'=0$, puis

$$\begin{cases} \omega^2_3-\omega^4_1=0, \\ \omega^3_1+\omega^2_4=0, \\ \omega^1_3+\omega^4_2=0, \\ \omega^1_4-\omega^3_2=0. \end{cases} \tag{51}$$

En conséquence, les formes analogues à celles qui figurent dans les premiers membres des équations (49) et (51) sont toutes des multiples de ω^r :

$$\begin{cases} \omega^{2i-1}_{2i-1}+\omega^{2i}_{2i}-\omega^0_0-\omega^r_r = c_i\omega^r, \\ \omega^{2i}_{2i-1}-\omega^{2i}_{2j-1} = a_{ij}\omega^r \qquad (a_{ij}=-a_{ji}), \\ \omega^{2j-1}_{2i-1}+\omega^{2i}_{2j} = b_{ij}\omega^r, \\ \omega^{2i-1}_{2i}-\omega^{2i-1}_{2j} = c_{ij}\omega^r \qquad (c_{ij}=-c_{ji}); \end{cases} \tag{52}$$

il faudra leur ajouter

$$\begin{cases} \omega^{2i}_r+\omega^0_{2i-1} = c_i\omega^{2i}+a_{ji}\omega^{2j-1}+b_{ij}\omega^{2j}+h_i\omega^r, \\ \omega^{2i-1}_r-\omega^0_{2i} = c_i\omega^{2i-1}+b_{ji}\omega^{2j-1}+c_{ji}\omega^{2j}+k_i\omega^r. \end{cases} \tag{53}$$

La différentiation extérieure des équations (52) donne, en ne portant son attention que sur les termes en $[\omega^1\omega^2]$, $[\omega^3\omega^4]$, $\ldots$, $[\omega^{2p-1}\omega^{2p}]$,

$$c_i=a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}=0,$$

puis l'opération analogue sur les équations (53) donne $h_i=k_i=0$.

Finalement *on est conduit au système suivant, qu'on vérifie facilement être complètement intégrable,*

$$(54)\quad \begin{cases} \omega^r_{2i-1} = \omega^{2i}, \qquad \omega^r_{2i} = -\omega^{2i-1} & (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega^0_0 + \omega^r_r = \omega^1_1 + \omega^2_2 = \ldots = \omega^{2p-1}_{2p-1} + \omega^{2p}_{2p}, & \\ \omega^{2i}_{2i-1} = \omega^{2i}_{2j-1}, \quad \omega^{2j-1}_{2i-1} = -\omega^{2i}_{2j}, \quad \omega^{2j-1}_{2i} = \omega^{2i-1}_{2j} & (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega^{2i}_r = -\omega^0_{2i-1}, \quad \omega^{2i-1}_r = \omega^0_{2i} & (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega^0_\alpha = \omega^1_\alpha = \omega^2_\alpha = \ldots = \omega^{2p}_\alpha = \omega^r_\alpha = 0 & (\alpha = 2p+1, \ldots, r-1). \end{cases}$$

18. La solution générale du problème dépend de $2(p+1)r - (2p^2+3p+2)$ constantes arbitraires. Toutes les solutions se déduisent de l'une d'entre elles par une transformation projective et chaque solution admet un groupe projectif dont l'ordre est la différence entre $r(r+2)$ et le nombre de constantes arbitraires de la solution générale, c'est-à-dire

$$r^2 - 2pr + 2p^2 + 3p + 2.$$

On vérifie facilement que l'équation quadratique extérieure

$$[x^0 x^r] + [x^1 x^2] + \ldots + [x^{2p-1} x^{2p}] = 0,$$

où les x^i sont les coordonnées *relatives* d'un point fixe de l'espace, est stable. Par suite il existe un complexe linéaire *stable* pour lequel l'hyperplan focal d'un point (x) a pour équation

$$x^0 X^r - x^r X^0 + x^1 X^2 - x^2 X^1 + \ldots + x^{2p-1} X^{2p} - x^{2p} X^{2p-1} = 0.$$

Au point A_0, origine du repère défini par les points de base $A_0, \ldots, A_r$, l'équation de l'hyperplan focal est, en coordonnées relatives, $X^r = 0$: *c'est l'hyperplan associé au point* A_0.

19. *Conclusion générale.* — Si l'équation de Pfaff, qui définit dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace le champ d'éléments de contact cherché, est complètement intégrable, le champ s'obtient en considérant une famille à un paramètre d'hyperplans telle qu'il en passe un et un seul par tout point du domaine; l'hyperplan associé à un point M est alors l'hyperplan de la famille passant par ce point. *Les solutions de cette nature ne sont pas en général susceptibles de s'étendre à tout l'espace.*

Si l'équation de Pfaff n'est pas intégrable, l'hyperplan à associer à un point M du domaine est l'hyperplan focal du point M par rapport à un complexe linéaire fixe; *les solutions de cette nature se prolongent dans tout l'espace.*

V. — Les champs (C) d'éléments plans dans l'espace projectif à quatre dimensions.

20. Considérons un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace projectif à quatre dimensions et attachons à chaque point M de $\mathcal{D}$ un plan P (à deux dimensions). Nous voulons chercher à quelles conditions doit satisfaire le champ ainsi déterminé pour que

les courbes du champ en soient des lignes asymptotiques, c'est-à-dire pour que toute courbe du champ ait en chacun de ses points M un contact du second ordre avec le plan P associé au point M.

Les courbes du champ sont celles qui satisfont à deux équations de Pfaff indépendantes, à savoir celles qui déterminent l'élément plan tangent à P au point M.

Il y a deux catégories de solutions qui sont évidentes.

1° *Le système différentiel obtenu en annulant les deux équations de Pfaff est complètement intégrable*, autrement dit détermine une famille à deux paramètres $\mathcal{F}$ de surfaces (à deux dimensions) S. Il est nécessaire et suffisant alors que ces surfaces soient des plans. Si par chaque point M de $\mathcal{D}$ il passe une surface S et une seule, on associera à ce point le plan S lui-même. En général *cette solution locale du problème ne pourra pas être prolongée dans tout l'espace.*

2° *Le système considéré n'est pas complètement intégrable, mais une des combinaisons linéaires des deux équations de Pfaff est complètement intégrable.* Elle définit alors une famille à un paramètre $\mathcal{F}$ d'hypersurfaces. Toutes les courbes du champ devront en chacun de leurs points M être tangentes à l'hypersurface qui passe par M et en même temps avoir un contact du second ordre avec elle; les hypersurfaces de la famille sont donc des hyperplans. Le champ de plans considéré devra donc, dans chaque hyperplan, être un champ (**C**). Par suite le plan P associé à un point M devra dans chaque hyperplan de la famille $\mathcal{F}$ être le plan focal d'un complexe linéaire de l'hyperplan.

Finalement on aura une solution du problème de la seconde catégorie en se donnant une famille à un paramètre d'hyperplans et dans chacun de ces hyperplans un complexe linéaire non dégénéré. *Là encore une solution locale de cette espèce ne pourra pas en général être prolongée dans tout l'espace.*

3° *Aucune combinaison linéaire des deux équations de Pfaff n'est complètement intégrable;* c'est maintenant de ce cas-là que nous allons nous occuper.

21. Nous allons encore employer la méthode du repère mobile. A chaque point A_0 du domaine $\mathcal{D}$ attachons un repère projectif d'origine A_0 et arrangeons-nous, ce qui est toujours possible, pour que le plan P associé à ce point contienne les sommets A_1, A_2 du repère. En conservant les notations précédemment utilisées, les deux équations de Pfaff qui définissent le champ sont

$$\omega^3 = 0, \qquad \omega^4 = 0;$$

les conditions à réaliser pour que ce champ soit (**C**) sont

$$\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 \equiv 0, \qquad \omega^1\omega_1^4 + \omega^2\omega_2^4 \equiv 0 \pmod{\omega^3, \omega^4}, \tag{55}$$

ou

$$\begin{cases} \omega_1^3 = c\,\omega^2 + a\,\omega^3 + b\,\omega^4, & \omega_2^3 = -c\,\omega^1 + \alpha\,\omega^3 + \beta\,\omega^4, \\ \omega_1^4 = c'\omega^2 + a'\omega^3 + b'\omega^4, & \omega_2^4 = -c'\omega^1 + \alpha'\omega^3 + \beta'\omega^4. \end{cases} \tag{56}$$

On a du reste

$$d\omega^3 \equiv 2c[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^4 \equiv 2c'[\omega^1\omega^2] \qquad (\mathrm{mod}\,\omega^3, \omega^4).$$

Par hypothèse les coefficients c et c' ne peuvent être nuls tous deux; mais, si $c \neq 0$, on peut supposer $c' = 0$ en prenant $\omega^4 - \frac{c'}{c}\omega^3$ comme nouvelle forme ω^4, car cela revient à remplacer A_3 par $A_3 + \frac{c'}{c}A_4$, le sommet A_4 étant conservé. On pourra enfin s'arranger pour avoir $c = 1$.

22. Nous allons maintenant chercher à simplifier le plus possible les valeurs numériques des coefficients a, b, α, β, a', b', α', β' par un choix convenable des points de base A_1, A_2, A_3, A_4 du repère attaché à un point quelconque A_0 de l'espace. Nous prendrons, pour les nouveaux points de base, et sans changer A_0,

$$(57)\qquad \begin{cases} \overline{A}_1 = \lambda A_1 + \mu A_2 + u A_0, \\ \overline{A}_2 = \rho A_1 + \sigma A_2 + v A_0, \\ \overline{A}_3 = A_3 + x A_1 + y A_2 + \xi A_0, \\ \overline{A}_4 = A_4 + z A_1 + t A_2 + \eta A_0. \end{cases}$$

La relation

$$\omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3 + \omega^4 A_4 = \overline{\omega}_0^0 \overline{A}_0 + \overline{\omega}^1 \overline{A}_1 + \overline{\omega}^2 \overline{A}_2 + \overline{\omega}^3 \overline{A}_3 + \overline{\omega}^4 \overline{A}_4$$

nous permet de calculer les nouvelles formes $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$, $\overline{\omega}^3$, $\overline{\omega}^4$, $\overline{\omega}_1^3$, $\overline{\omega}_2^3$, $\overline{\omega}_1^4$, $\overline{\omega}_2^4$ au moyen des anciennes. On trouve, en supposant $\lambda\sigma - \mu\rho = 1$,

$$(58)\qquad \begin{cases} \overline{\omega}^1 = \sigma\omega^1 - \rho\omega^2 + (\rho y - \sigma x)\omega^3 + (\rho t - \sigma z)\omega^4, \\ \overline{\omega}^2 = -\mu\omega^1 + \lambda\omega^2 + (\mu x - \lambda y)\omega^3 + (\mu z - \lambda t)\omega^4, \\ \overline{\omega}^3 = \omega^3, \\ \overline{\omega}^4 = \omega^4; \\ \overline{\omega}_1^3 = \lambda\omega_1^3 + \mu\omega_2^3 + u\omega^3, \\ \overline{\omega}_2^3 = \rho\omega_1^3 + \sigma\omega_2^3 + v\omega^3, \\ \overline{\omega}_1^4 = \lambda\omega_1^4 + \mu\omega_2^4 + u\omega^4, \\ \overline{\omega}_2^4 = \rho\omega_1^4 + \sigma\omega_2^4 + v\omega^4. \end{cases}$$

On en déduit facilement qu'on peut obtenir les nouvelles relations

$$\overline{\omega}_1^3 = \overline{\omega}^2, \qquad \overline{\omega}_2^3 = -\overline{\omega}^1,$$
$$\overline{\omega}_1^4 = A\overline{\omega}^3, \qquad \overline{\omega}_2^4 = B\overline{\omega}^3,$$

en choisissant pour u, v, x, y, z les valeurs

$$x = \alpha - \beta', \qquad y = b' - a, \qquad z = \beta, \qquad t = -b,$$
$$u = -\lambda b' - \mu\beta', \qquad v = -\rho b' - \sigma\beta',$$

λ, μ, ρ, σ étant assujetties à satisfaire aux conditions

$$(59)\qquad \begin{cases} \lambda a' + \mu \alpha' = A, \\ \rho a' + \sigma \alpha' = B. \end{cases}$$

Cela posé, deux cas sont possibles suivant que $a' = \alpha' = 0$ ou que les coefficients a', α' ne sont pas tous les deux nuls. Or le premier cas est impossible, car de la nullité des formes ω_1^4 et ω_2^4 on déduirait par différentiation extérieure

$$(60)\qquad \begin{cases} [\omega_1^0 \omega^4] + [\omega^2 \omega_3^4] = 0, \\ [\omega_2^0 \omega^4] - [\omega^1 \omega_3^4] = 0; \end{cases}$$

de ces relations résulterait que la forme ω_3^4 est proportionnelle à ω^4 et par suite on aurait

$$d\omega^4 = [\omega^3 \omega_3^4] + [\omega^4 (\omega_4^4 - \omega_0^0)],$$

autrement dit l'équation $\omega^4 = 0$ serait complètement intégrable, contrairement à une hypothèse antérieure. Or les coefficients A et B résultant d'une substitution linéaire et homogène unimodulaire arbitraire effectuée sur a' et α', on peut toujours s'arranger pour que A et B aient des valeurs arbitrairement choisies non toutes nulles. Nous prendrons $A = 1$, $B = 0$, d'où les relations

$$\omega_1^4 = \omega^3, \qquad \omega_2^4 = 0.$$

On peut donc finalement mettre les équations différentielles du problème sous la forme réduite

$$(61)\qquad \omega_1^3 = \omega^2, \qquad \omega_2^3 = -\omega^1, \qquad \omega_1^4 = \omega^3, \qquad \omega_2^4 = 0.$$

23. Nous allons différentier extérieurement les équations (61). On obtient les équations quadratiques extérieures

$$(62)\qquad \begin{cases} [\omega^2(\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2)] + [\omega^3(\omega_4^3 - \omega_3^2 - \omega_1^0)] - [\omega^4 \omega_4^2] = 0, \\ [\omega^1(\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2)] + [\omega^3(\omega_2^0 - \omega_3^1)] - [\omega^4 \omega_4^1] = 0, \\ [\omega^2(\omega_3^4 + 2\omega^1)] + [\omega^3(\omega_0^0 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_3^3)] - [\omega^4(\omega_4^3 + \omega_1^0)] = 0, \\ [\omega^1(\omega_3^4 + 2\omega^1)] + [\omega^3 \omega_2^4] + [\omega^4 \omega_2^0] = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations montrent que la forme $\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2$ ne dépend que de ω^3 et ω^4; il en est de même pour la forme $\omega_3^4 + 2\omega^4$, d'après les deux dernières équations (62). Mais on peut, par un changement de base n'altérant pas les équations (61), s'arranger pour que ces deux formes $\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2$ et $\omega_3^4 + 2\omega^4$ ne dépendent plus de ω^4. En prenant en effet $A_3 + \lambda A_0$ et $A_4 + \mu A_0$ pour nouveaux sommets A_3 et A_4, la forme ω_3^4 est augmentée de $\lambda\omega^4$ et la forme $\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2$ est diminuée de $\lambda\omega^3 + \mu\omega^4$, de sorte qu'on peut d'abord disposer de λ de manière que ω_3^4 ne dépende plus de ω^4, et ensuite disposer de μ de manière que la seconde forme ne dépende également plus de ω^4.

Cela posé les relations (62) donneront

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned}
\omega_0^0+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2&=A\omega^3,\\
\omega_3^4+2\omega^1&=B\omega^3,\\
\omega_2^1&=B\omega^1+E\omega^3+C\omega^4,\\
\omega_2^0&=C\omega^3+D\omega^4,\\
\omega_3^1&=-A\omega^1+F\omega^3+G\omega^4,\\
\omega_4^1&=(G-D)\omega^3+L\omega^4,\\
\omega_4^2&=M\omega^3+N\omega^4,\\
\omega_4^3+\omega_1^0&=P\omega^3+Q\omega^4,\\
\omega_3^2+2\omega_1^0&=-A\omega^2+C\omega^3+(M+Q)\omega^4,\\
\omega^0+\omega_4^4-\omega_1^1-\omega_2^2&=B\omega^2+R\omega^3-P\omega^4.
\end{aligned}\right.$$

La différentiation extérieure de $\omega_3^4+2\omega^1$, en ne conservant dans le résultat que les termes en $[\omega^1\omega^2]$, donne $B=0$; en négligeant ensuite les termes qui contiennent ω^4 en facteur, on obtient $A=2R$, $E=0$. Enfin on arrive à la relation

$$[\omega^4(\omega_3^0+2P\omega^1+2C\omega^2+\overline{2D-G}\,\omega^3)]=0,$$

qui permet de poser

$$(64)\qquad \omega_3^0=-2P\omega^1-2C\omega^2+(G-2D)\omega^3+S\omega^4,$$

avec

$$(65)\qquad A=2R,\qquad B=0,\qquad E=0.$$

Différentions maintenant $\omega_0^0+\omega_3^3-\omega_4^4-\omega_2^2$; l'ensemble des termes en $[\omega^1\omega^2]$ donne $A=0$. En négligeant les termes qui contiennent ω^4 en facteur, on trouve $C=F=P$, puis la relation

$$[\omega^4(2M\omega^1+2\overline{D-G}\,\omega^2-L\omega^3-\omega_4^0)]=0,$$

qui permet de poser

$$(66)\qquad \omega_4^0=+2M\omega^1+2\overline{D-G}\,\omega^2-L\omega^3+T\omega^4,$$

avec

$$(67)\qquad A=B=R=E=0,\qquad C=F=P.$$

La différentiation de $\omega_2^1=C\omega^4$ donne, en laissant de côté les termes qui contiennent ω^4 en facteur, $C=0$, puis $D+G=0$. La différentiation extérieure de $\omega_3^1=G\omega^4$ donne, en négligeant les termes qui contiennent ω^4 en facteur, $4D-7G=0$, d'où $D=G=0$, et par suite

$$(68)\qquad A=B=C=D=E=F=G=P=R=0,$$

avec

$$(69)\qquad \omega_3^0=S\omega^4,\qquad \omega_4^0=2M\omega^1-L\omega^3+T\omega^4.$$

La différentiation extérieure de $\omega_4^1 = L\omega^4$ donne, par des procédés analogues,

$$L = T = 0;$$

celle de ω_2^0 donne

$$S = 0;$$

celle de $\omega_4^3 + \omega_1^0$ donne

$$M - 3Q = 0$$

et celle de $\omega_3^2 + 2\omega_1^0$ donne

$$M + 2Q = 0, \qquad \text{d'où } M = Q = 0.$$

Enfin la différentiation extérieure de $\omega_4^2 = N\omega^4$ donne $N = 0$.

Finalement on est arrivé à montrer que *tous les coefficients qui figurent dans les équations* (63) *sont nuls*. On montre ensuite facilement que *les équations* (63) *ainsi réduites, y compris les équations* (61), (64) *et* (66), *forment un système complètement intégrable.*

24. Théorème. — *Le système différentiel qui donne les champs* (**C**) *cherchés, dans le cas où aucune combinaison linéaire des équations* $\omega^3 = 0$, $\omega^4 = 0$ *n'est complètement intégrable, est le système complètement intégrable*

$$(70)\quad \begin{cases} \omega_1^3 = \omega^2, \quad \omega_2^3 = -\omega^1, \quad \omega_1^4 = \omega^3, \quad \omega_2^4 = 0; \\ \omega_2^0 = 0, \quad \omega_2^1 = 0; \\ \omega_3^0 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = -2\omega_1^0, \quad \omega_3^3 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0, \quad \omega_3^4 = -2\omega^1; \\ \omega_4^0 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0, \quad \omega_4^3 = -\omega_1^0, \quad \omega_4^4 = 2\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0. \end{cases}$$

La solution générale de ce système dépend de 16 *constantes arbitraires. Elle résulte d'une solution particulière par une transformation projective. Toute solution admet un groupe projectif à* 8 *paramètres.*

Les équations de structure de ce groupe sont données par les formules qui fournissent les différentielles des huit formes

$$\omega^1, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \quad \omega^4, \quad \omega_1^1 - \omega_0^0, \quad \omega_2^1, \quad \omega_0^0, \quad \omega_1^0, \quad \omega_2^2,$$

à savoir :

$$(71)\quad \begin{cases} d\omega^1 = [\omega^1(\omega_1^1 - \omega_0^0)], \\ d\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^2(\omega_2^2 - \omega_0^0)] - 2[\omega^3\omega_1^4], \\ d\omega^3 = 2[\omega^1\omega^2] + [\omega^3(\omega_1^1 - \omega_2^2 - 2\omega_0^0)] - [\omega^4\omega_1^2], \\ d\omega^4 = 3[\omega^1\omega^3] + [\omega^4(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - 3\omega_0^0)], \\ d(\omega_1^1 - \omega_0^0) = -2[\omega^1\omega_1^0], \\ d(\omega_2^2 - \omega_0^0) = [\omega^1\omega_1^0], \\ d\omega_1^0 = [\omega_1^0(\omega_0^0 - \omega_1^1)], \\ d\omega_1^2 = -3[\omega^2\omega_1^0] + [\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^1)]. \end{cases}$$

Pour définir géométriquement les solutions, remarquons que, d'après (71), les équations

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = \omega_2^2 - \omega_0^0 = \omega_1^0 = \omega_1^2 = 0,$$

forment un système complètement intégrable. En égalant à des constantes numériques fixes les intégrales premières de ce système, on restreindra la famille des repères attachés aux points de l'espace : ils ne dépendront plus que des coordonnées absolues de ces points. Avec cette restriction on aura, d'après (71),

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = 0, \qquad d\omega^3 = 2[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^4 = 3[\omega^1\omega^3],$$

d'où, par un choix convenable des variables u^1, u^2, u^3, u^4,

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= du^1,\\
\omega^2 &= du^2,\\
\omega^3 &= du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1,\\
\omega^4 &= du^4 + 3u^1\,du^3 + \frac{3}{2}(u^1)^2\,du^2.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
dA_0 &= du^1 A_1 + du^2 A_2 + (du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1)\,A_3 + \left[du^4 + 3u^1\,du^3 + \frac{3}{2}(u^1)^2\,du^2\right]A_4,\\
dA_1 &= du^2 A_3 + (du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1)\,A_4,\\
dA_2 &= -du^1 A_3,\\
dA_3 &= -2\,du^1 A_4,\\
dA_4 &= 0.
\end{aligned}$$

On en tire, C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 étant quatre points analytiques fixes,

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned}
A_4 &= C_4,\\
A_3 &= C_3 - 2u^1 C_4,\\
A_2 &= C_2 - u^1 C_3 + (u^1)^2 C_4,\\
A_1 &= C_1 + u^2 C_3 + (u^3 - u^1 u^2) C_4,\\
A_0 &= C_0 + u^1 C_1 + u^2 C_2 + u^3 C_3 + \left[u^4 + u^1 u^3 + \frac{1}{2}(u^1)^2 u^2\right] C_4.
\end{aligned}\right.$$

Les coordonnées projectives non homogènes du point A_0 par rapport au repère dont les points de base sont les C_i, sont

$$x^1 = u^1, \qquad x^2 = u^2, \qquad x^3 = u^3, \qquad x^4 = u^4 + u^1 u^3 + \frac{1}{2}(u^1)^2 u^2,$$

d'où

$$u^1 = x^1, \qquad u^2 = x^2, \qquad u^3 = x^3, \qquad u^4 = x^4 - x^1 x^3 - \frac{1}{2}(x^1)^2 x^2.$$

Par suite les formes ω^3 et ω^4 deviennent, en coordonnées projectives fixes,

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega^3 &= dx^3 + x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1,\\
\omega^4 &= dx^4 + x^1\,dx^3 - x^3\,dx^1 + x^1[dx^3 + x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1].
\end{aligned}\right.$$

Il en résulte que le plan associé au point (x) est l'intersection des deux hyperplans

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned}
&X^3 - x^3 + x^1 X^2 - x^2 X^1 = 0,\\
&X^4 - x^4 + x^1 X^3 - x^3 X^1 = 0;
\end{aligned}\right.$$

ce sont les hyperplans focaux du point (x) *par rapport à deux complexes linéaires fixes.* Au point (0, 0, 0, 0) ces hyperplans sont $X^3 = 0$, $X^4 = 0$, dont l'intersection est le plan $A_0A_1A_2$.

En coordonnées homogènes fixes, les équations du plan associé au point (x) sont

$$(75)\qquad \begin{cases} x^0X^3 - x^3X^0 + x^1X^2 - x^2X^1 = 0, \\ x^0X^4 - x^4X^0 + x^1X^3 - x^3X^1 = 0. \end{cases}$$

On remarquera que ces plans forment une famille telle qu'à un plan de la famille corresponde en général un point et un seul de l'espace.

25. On peut démontrer d'une autre manière que le plan associé à un point de l'espace est l'intersection des hyperplans focaux de M par rapport à deux complexes linéaires fixes. Il suffit pour cela de montrer l'existence d'une infinité à un paramètre de champs (C) d'éléments de contact, l'hyperplan associé à M étant déterminé par les quatre points A_0, A_1, A_2, $A_3 + mA_4$, et l'équation de Pfaff qui définit le champ étant alors $\omega^4 - m\omega^3 = 0$. Le point A_0 d'une courbe du champ satisfait à

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 (A_3 + mA_4);$$

il faut que le point d^2A_0 soit dans l'hyperplan formé par A_0, A_1, A_2, $A_3 + mA_4$ et par suite que le coefficient de A_4 dans d^2A_0 soit égal au produit par m du coefficient de A_3. Or, en négligeant les termes en A_0, A_1, A_2,

$$\begin{aligned} d^2A_0 &= [\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 + \omega^3(\omega_3^3 + m\omega_4^3)]A_3 + [\omega^1\omega_1^4 + \omega^2\omega_2^4 + \omega^3(\omega_3^4 + m\omega_4^4 + dm)]A_4 \\ &= \omega^3(\omega_3^3 + m\omega_4^3)A_3 + \omega^3(\omega^1 + \omega_3^4 + m\omega_4^4 + dm)A_4. \end{aligned}$$

La condition pour que le champ soit (C) est donc

$$\omega^1 + \omega_3^4 + m(\omega_4^4 - \omega_3^3) - m^2\omega_4^3 + dm = 0,$$

ce qui, en tenant compte des formules (70), donne

$$(76)\qquad dm - \omega^1 + m(\omega_1^1 - \omega_0^0) + m^2\omega_1^0 = 0.$$

Cette équation est complètement intégrable, comme il est facile de le vérifier.

Pour avoir du reste la famille des complexes linéaires considérés, nous n'avons qu'à restreindre, comme nous l'avons déjà fait, les repères attachés aux différents points de l'espace de manière à annuler les formes $\omega_1^1 - \omega_0^0$ et ω_1^0; la forme ω^4 sera alors égale à dx^1, et l'équation (76) donnera $dm = dx^1$, ou $m = x^1 + C$. On aura donc les deux complexes linéaires définis respectivement par $\omega^4 - x^1\omega^3 = 0$ et $\omega^3 = 0$, ce qui, d'après les équations (73), donne

$$dx^4 + x^1\,dx^3 - x^3\,dx^1 = 0 \qquad \text{et} \qquad dx^3 + x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 = 0.$$

26. Le champ d'éléments plans déterminé dans cette Section jouit de propriétés géométriques intéressantes. Les équations (75) qui donnent les

équations du plan associé au point (x) de l'espace déterminent ce plan sans ambiguïté, sauf dans le cas où les deux équations ne sont pas indépendantes, ce qui exigerait

$$\frac{-x^3}{-x^4}=\frac{-x^2}{-x^3}=\frac{x_1}{0}=\frac{x^0}{x^1}=\frac{0}{x^0},$$

c'est-à-dire

$$x^0=0, \qquad x^1=0, \qquad (x^3)^2-x^2x^4=0.$$

Ces dernières équations définissent une conique Γ située dans le plan Π d'équation $x^0=x^1=0$. Si le point M appartient à cette conique, les équations (75) donnent un *hyperplan* contenant le plan Π et il y a une relation homographique entre l'hyperplan associé à un point M de la conique, et ce point lui-même. Quant au plan associé à un point M du plan Π, c'est le plan Π lui-même. Le groupe des homographies qui laissent invariant le champ considéré est donné par les équations

$$(77)\qquad \begin{cases} (x^0)'= & \alpha x^0+\beta x^1,\\ (x^1)'= & \gamma x^0+\delta x^1,\\ (x^2)'= & \alpha^2x^2-2\alpha\beta x^3+\beta^2x^4+A_2x^0+B_2x^1,\\ (x^3)'= & -\alpha\gamma x^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)x^3-\beta\delta x^4+A_3x^0+B_3x^1,\\ (x^4)'= & \gamma^2x^2-2\gamma\delta x^3+\delta^2x^4+A_4x^0+B_4x^1, \end{cases}$$

avec les relations

$$(78)\qquad \begin{cases} \alpha B_3-\beta A_3+\gamma B_2-\delta A_2=0,\\ \alpha B_4-\beta A_4+\gamma B_3-\delta A_3=0, \end{cases}$$

où interviennent 8 paramètres arbitraires α, β, γ, δ, A_2, B_2, A_4, B_4.

Ajoutons enfin que le domaine $\mathcal{D}$, devant être choisi de manière qu'à tout point de $\mathcal{D}$ soit associé un plan bien déterminé, ne doit pas contenir à son intérieur la conique Γ. Mais quel qu'il soit, *les solutions qui existent à l'intérieur de ce domaine se prolongent dans tout l'espace privé de la conique* Γ.

27. Les droites issues des différents points M de l'espace dans le plan associé à M forment une famille $\mathcal{F}$ à quatre paramètres. Le lieu des droites de cette famille est un plan (exception faite pour les points de Γ, auxquels correspond un hyperplan).

On peut aussi se demander quelle est la figure formée par les droites de la famille qui sont situées dans un hyperplan donné. Il convient ici de distinguer plusieurs cas, les hyperplans de l'espace ne jouant pas tous le même rôle. Sont à ranger dans le même cas les hyperplans qui peuvent se déduire les uns des autres par les transformations du groupe (78). On trouve ainsi quatre cas distincts.

Premier cas. — *L'hyperplan coupe la conique* Γ *en deux points réels.* — On peut prendre l'hyperplan $x^3=0$ comme représentatif de ce premier cas. Les droites

de $\mathcal{F}$ qui sont situées dans cet hyperplan sont celles qui satisfont aux relations

$$x^1X^2 - x^2X^1 = 0, \qquad x^0X^4 - x^4X^0 = 0;$$

elles constituent dans l'hyperplan $X^3 = 0$ *une congruence linéaire hyperbolique* dont les directrices sont les droites $x^4 = x^2 = 0$ et $x^0 = x^4 = 0$.

Deuxième cas. — *L'hyperplan coupe la conique* Γ *en deux points imaginaires conjugués.* — On peut prendre comme représentatif de ce cas l'hyperplan $x^2 + x^4 = 0$. Les droites de $\mathcal{F}$ situées dans cet hyperplan sont données par les relations

$$x^0X^3 - x^3X^0 + x^1X^2 - x^2X^1 = 0,$$
$$-x^0X^2 + x^2X^0 + x^1X^3 - x^3X^1 = 0,$$

elles constituent une congruence linéaire elliptique dont les directrices sont les droites

$$x^0 + ix^1 = x^2 + ix^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^0 - ix^1 = x^2 - ix^3 = 0.$$

Troisième cas. — *L'hyperplan est tangent à la conique* Γ. — On peut prendre $x^4 = 0$ comme hyperplan représentatif. Les droites de $\mathcal{F}$ situées dans cet hyperplan sont données par les équations

$$x^0X^3 - x^3X^0 + x^1X^2 - x^2X^1 = 0,$$
$$x^1X^2 - x^3X^1 = 0.$$

Elles constituent une congruence linéaire à directrice double $x^2 = x^3 = 0$.

Quatrième cas. — *L'hyperplan contient le plan* Π. — On peut prendre l'hyperplan $x^0 = 0$ comme hyperplan représentatif. Les droites de $\mathcal{F}$ situées dans cet hyperplan sont données par les équations

$$x^1X^2 - x^2X^1 = 0,$$
$$x^1X^3 - x^3X^1 = 0.$$

Ce sont les droites situées dans le plan $x^1 = 0$ *et les droites issues du point* $x^1 = x^2 = x^3 = 0$.

28. Le problème posé et résolu dans cette Section peut naturellement se généraliser (n° 3); il est bien facile d'apercevoir des solutions à ce problème général dont les plus intéressantes sont celles qui consistent à associer à tout point M de l'espace projectif à r dimensions l'intersection des hyperplans focaux de M par rapport à h complexes linéaires fixes. Mais il serait bien hasardeux d'affirmer que c'est la solution la plus générale, dans le cas du moins où l'on ne pourrait extraire du système de Pfaff qui définit le champ aucun système partiel complètement intégrable. Il est à souhaiter qu'un jeune mathématicien trouve une méthode simple pour trancher la question.

SUR L'EXISTENCE

DES

SOLUTIONS DU PROBLÈME DE HELMHOLTZ

DANS

LE CAS DES OBSTACLES POSSÉDANT DES POINTS ANGULEUX

PAR M. JULIEN KRAVTCHENKO.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

1. Un Chapitre entier de ma Thèse (1) est consacré aux théorèmes d'existence dans la théorie des sillages; je me suis alors borné au cas des obstacles à tangente continue (et même à courbure continue). Dans le présent Mémoire (2), je me propose d'étendre mes conclusions au cas d'un obstacle possédant un nombre fini de points anguleux.

L'étude du problème ainsi généralisé offre un double intérêt. Il ne paraît pas inutile, d'une part, d'étendre la portée des raisonnements, exposés dans ma Thèse, à une catégorie nouvelle de profils; celle-ci comprend comme cas très particulier, les contours polygonaux dont on s'est tant occupé depuis Helmholtz et Kirchhoff et pour lesquels on ne possédait de théorème d'existence que dans

(1) *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz : théorie des sillages et des proues* (*Journal des Mathématiques*, 9e série, 20, 1941, pp. 35-303). On consultera spécialement le Chapitre III de ce travail (pp. 135-225). Dans la suite, les renvois à ce Mémoire seront désignés par les initiales J. K. suivies de la mention du paragraphe et de la page.

(2) Les principaux résultats du présent travail ont été résumés dans la Note : *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz* (*C. R. Acad. Sc.*, 213, 1942, pp. 464-466).

le cas des obstacles symétriques ([3]) et concaves vers le courant. Ensuite, ces nouveaux théorèmes d'existence une fois acquis, nous pourrons, en adaptant convenablement les raisonnements dont M. P. Montel ([4]) s'était servi dans ses travaux consacrés au problème de la représentation conforme de Riemann, étudier le cas des arcs dépourvus de tangente. Cette dernière catégorie de profils n'est plus tributaire des équations intégro-différentielles du problème de Helmholtz, formées par M. H. Villat; mais on arrive au théorème d'existence par voie de passage à la limite, en approchant indéfiniment des contours considérés au moyen de contours réguliers, auxquels s'applique la théorie de M. Villat. Un Mémoire, actuellement en préparation, traitera de cet aspect de la théorie des sillages ([5]).

2. Malheureusement, les solutions du problème de Helmholtz, dont on établit ainsi l'existence (tant dans le cas des contours anguleux que dans celui des obstacles sans tangente), sont loin d'être satisfaisantes du point de vue physique; il suffit de rappeler à ce sujet les paradoxes que M. Brillouin a été le premier à mettre en évidence. Aussi, pour écarter tout danger de recoupement des lignes libres entre elles et avec l'obstacle, nous nous bornerons, comme dans ma Thèse, au cas des obstacles dont l'intersection avec toute parallèle à la direction du courant à l'infini se réduit à un point unique; le domaine du fluide en mouvement est alors nécessairement d'un seul tenant, et cela assure la validité de la solution vis-à-vis de la deuxième condition de M. Brillouin ([6]). Il n'en sera pas toujours de même de la première condition de validité; on sait, par exemple, que la vitesse du fluide devient infinie en chaque point anguleux du profil à pointe tournée vers le fluide vif ([7]); il faut alors modifier le schéma primitif de Helmholtz [par exemple comme l'a fait M. Villat, ([8])] pour construire, relativement aux configurations correspondantes des parois rigides, des mouvements avec sillages physiquement acceptables. Pour de tels profils, le problème classique de Helmholtz est dépourvu de solutions satisfaisant à la première condition de M. Brillouin. Mais si l'on fait abstraction de l'origine hydrodynamique de la question, on obtient un problème de représentation

([3]) On trouvera dans ma Thèse une bibliographie étendue des travaux consacrés aux obstacles polygonaux (J. K., 3, p. 37, pour le problème dit indéterminé; (pour les travaux de MM. J. Leray et A. Weinstein, *voir* plus loin).

([4]) *Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques*, Paris, 1927, p. 98 et suiv.

([5]) On trouvera un résumé de la démonstration dans ma Note *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz : cas d'un contour sans tangente continue* (*C. R. Acad. Sc.*, 213, 1942, pp. 870-872).

([6]) Pour ces questions de la validité physique, *cf.* J. K., Chap. II, pp. 107-135.

([7]) Pour ce point, absolument classique et élémentaire, d'ailleurs, *cf.* par exemple, M. H. Villat, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, Paris, 1929, pp. 75-76.

([8]) *Ibid.*, pp. 83-87. *Cf.* aussi la Thèse de M. R. Thiry, consacrée à l'étude des solutions multiples des problèmes analogues à celui du sillage (*Annales de l'École Normale Sup.*, 3, 38e série, 1922).

conforme qui garde un sens et qui présente un intérêt mathématique de nature à justifier, semble-t-il, l'étude que nous allons entreprendre ([9]).

3. Les méthodes de démonstration que nous allons utiliser sont dues à MM. J. Leray et J. Schauder ([10]). On en trouvera une rapide analyse au paragraphe 28 de J. K. (pp. 201-224). Pour raccorder plus complètement le présent exposé au Chapitre III du travail précité, j'ai supposé, dans tout ce qui suit, que chaque arc « régulier » de l'obstacle (c'est-à-dire, l'arc compris entre deux points singuliers consécutifs) possède une courbure bornée. Mais il serait facile [à la suite de M. A. Oudart ([11])] de se débarrasser de cette restriction; en fait, il suffisait de supposer que sur chaque arc régulier l'angle de la tangente avec une direction fixe est une fonction hölderienne de l'abscisse curviligne.

4. Avant de clore cette Introduction, faisons un rapide historique du sujet. M. A. Weinstein ([12]) est le premier à avoir établi des théorèmes d'existence pour des obstacles anguleux. Il s'est borné au cas des profils symétriques et concaves, formés d'un nombre fini de segments de droites (obstacles polygonaux); la méthode de cet auteur (méthode dite de continuité) est sans rapport avec la nôtre.

Depuis cette date, l'effort des analystes s'est surtout exercé sur le problème de Helmholtz posé pour des obstacles courbes à tangente continue; on trouvera dans ma Thèse une bibliographie étendue des travaux consacrés à ce très difficile problème. Signalons, toutefois, qu'en 1936, M. Leray ([13]) a annoncé des résultats d'unicité intéressant le cas des contours polygonaux symétriques. Pour autant qu'on puisse se faire une opinion d'après un texte aussi bref, ces conclusions doivent reposer sur des théorèmes d'existence pour les profits correspondants; à ma connaissance, ces recherches de M. Leray n'ont donné lieu à aucune publication. Selon toute probabilité, cet auteur ne s'est limité à l'examen du cas symétrique que pour aboutir à des conclusions d'unicité, but

---

([9]) Signalons à l'appui de cette assertion, que si l'obstacle est concave vers le courant, le problème de Helmholtz correspondant possède au moins une solution physiquement acceptable, et cela quel que soit le nombre de points anguleux que possède cet obstacle. *Cf.* mon article des *Mémoires de l'Académie*, 63, 1936-1939, pp. 1-10 : *Sur un théorème de validité dans la théorie des sillages.*

([10]) *Topologie et équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale Sup.*, 61. 1934, pp. 45-90).

([11]) *Cf.* la Thèse de cet auteur *Sur le schéma de Kirchhof-Helmholtz* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 22, 1943, pp. 245-301 et t. 23, 1944, pp. 1-37; on se reportera également à ma Note, *loc. cit.* ([2])].

([12]) *Cf.* les Notes *Sur les jets liquides à parois données* (*Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei*, 4, 1926, p. 119) et *Sur le théorème d'existence pour les jets liquides* (*id.*, 5, 1927. p. 157). Les résultats les plus complets obtenus par les procédés de M. Weinstein sont ceux de MM. J. Leray et A. Weinstein. *Sur un problème de représentation conforme posé par la théorie de Helmholtz* (*C. R. Acad. Sc.*, 198, 1934, p. 430).

([13]) *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz* (*Commentarii mathematici Helvetici*, 8, pp. 145-160; *cf.* spécialement p. 153).

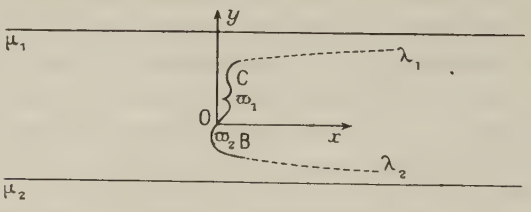
essentiel du Mémoire qu'il projetait d'écrire; il ajoute, d'ailleurs, que sa méthode est susceptible d'extension au cas des profils formés d'arcs de courbes. Dès lors, il est à présumer que les démonstrations des théorèmes d'existence trouvés par M. Leray doivent être semblables à celles qu'on aura à exposer au cours de ce travail; c'est donc à cet auteur que revient la priorité de la découverte, sinon de la publication. Du reste, je dois beaucoup à la lecture de l'œuvre de M. Leray comme à ses indications personnelles; il n'est que trop juste de le dire.

CHAPITRE II.

POSITION DU PROBLÈME. MISE EN ÉQUATION. RAPPEL DES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

5. Nous reprendrons la définition de la configuration des éléments rigides donnée au paragraphe 23 de ma Thèse, ainsi que la plupart des hypothèses et des conventions adoptées au cours de ce travail. Nous nous limiterons donc encore au cas d'arcs de courbes pourvues de tangente en chacun de leurs points; on sait que dans ce cas la configuration des élements rigides (ou, encore, le squelette du schéma, pour se servir d'une expression heureuse, introduite par M. Oudart dans sa Thèse) est définie à une translation près, par la donnée dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, des cinq éléments $\Psi(l)$, α, β, d_1 et d_2 dont nous allons rappeler la signification géométrique.

Fig. 1.



La courbe (l'obstacle) $\widehat{BC}$ est définie dans le plan z par son équation intrinsèque

$$\Psi = \Psi(l), \qquad \alpha \leq l \leq \beta, \tag{1}$$

qui relie l'abscisse curviligne l de $\widehat{BC}$ à l'angle Ψ qui fait avec Ox la demi-tangente à $\widehat{BC}$ (orientée dans le sens des l croissants) au point d'abscisse curviligne l. D'après ce qui précède, $l = \alpha$ ($l = \beta$) correspond au point B(C) (*cf. fig.* 1).

Nous supposerons encore, comme nous l'avons fait dans notre Thèse, que ([14])

$$0 \leqq \Psi(l) \leqq \pi, \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha) \neq \pi, \qquad \Psi(\beta) \neq 0. \tag{2'}$$

De plus, la fonction $\Psi(l)$ ne pourra se réduire identiquement à 0 ou à π dans l'intervalle $\alpha \leqq l \leqq \beta$; toutefois, $\Psi(l)$ pourra être égal à 0 (ou à π) sur un intervalle intérieur à l'intervalle $\alpha \leqq l \leqq \beta$. Géométriquement, cela veut dire que l'intersection de $\overset{\frown}{BC}$ avec toute droite $y = \text{const.}$ se réduit à un point unique à moins que $\overset{\frown}{BC}$ ne contienne des segments rectilignes, parallèles à Ox dont les extrémités sont étrangères aux points B et C. D'après cela, l'ordonnée $y(l)$ de $\overset{\frown}{BC}$ atteint ses valeurs maxima et minima en C et B; nous supposerons $\overset{\frown}{BC}$ placé par rapport aux axes de manière que son point d'ordonnée minima soit B.

L'arc $\overset{\frown}{BC}$ est supposé placé à l'intérieur d'une bande indéfinie à bords μ_1 et μ_2 rectilignes et parallèles à Ox; la distance, finie ou infinie, du point C(B) à $\mu_1(\mu_2)$ sera notée $d_1(d_2)$; d'après cela, les paramètres d_1 et d_2 sont essentiellement positifs.

L'équation (1) détermine l'arc $\overset{\frown}{BC}$ à une translation près; il s'ensuit que les cinq éléments $\Psi(l)$, α, β, d_1 et d_2 définissent le squelette du schéma à une translation près. C'est le résultat que nous voulions rappeler. Pour abréger les écritures nous désignerons désormais par $\mathcal{C}[\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2]$, ou simplement par $\mathcal{C}$, le squelette caractérisé par les éléments $\Psi(l)$, α, β, d_1 et d_2.

6. Posons-nous alors, relativement au squelette $\mathcal{C}$, le problème du *sillage* de Helmholtz dont je rappelle rapidement l'énoncé ([15]) :

Déterminer dans le plan de la variable complexe auxiliaire

$$f = \varphi + i\psi,$$

([14]) On observera que ces hypothèses diffèrent de celles, plus restrictives que nous avons utilisées dans notre Note des *C. R. Acad. Sc.* [*cf. loc. cit.* ([2]), inégalités (1)] : par contre, nous serons obligés d'admettre l'existence de la dérivée $\Psi'(l)$. On se rendra compte, un peu plus loin, de l'utilité de chacune de ces hypothèses. Bornons-nous, pour l'instant, à rappeler que les inégalités (2) assurent le non-recoupement des lignes libres λ_1 et λ_2 entre elles et avec l'obstacle; elles jouent donc un rôle essentiel dans la théorie actuelle. Au contraire, les inégalités (2') ne sont introduites que pour simplifier la démonstration (*cf.* J. K., pp. 167-168). On trouvera, enfin, de nouvelles restrictions à imposer à $\Psi(l)$ au paragraphe 17.

Les paragraphes 6, 7 et 8, extrêmement condensés, s'adressent aux lecteurs familiarisés avec la théorie; ils ont pour but de fixer les repères essentiels et d'éviter ainsi à un lecteur averti de continuels renvois à ma Thèse. Un lecteur profane encore est prié de se reporter aux paragraphes 7, 8, 9, 10 et 23 de J. K.; il y trouvera une justification détaillée des résultats évoqués au cours du présent paragraphe.

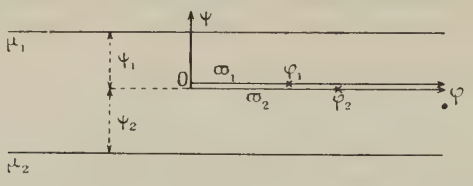
([15]) *Cf.* J. K., §§ 7, 8, 9, 10 (pp. 47-65), 12 (pp. 69-77), 23 (pp. 169-176).

un domaine F (*cf. fig.* 2) en forme de bande indéfinie ([16]) : $-\psi_2 \leq \psi \leq \psi_1$, $-\infty \leq \varphi \leq +\infty$, entaillée le long de la portion positive de l'axe $O\varphi$ et définir dans F la fonction analytique univalente $z = z(f)$ de façon que :

1° *Au domaine* F, $z(f)$ *fasse correspondre un domaine* $\mathfrak{A}$ *du plan* z, *compris entre* μ_1 *et* μ_2 ;

2° *La portion de la frontière* F' *de* F, *étrangère aux segments* $\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty$ ($\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$) *de l'axe* $O\varphi$ *ait pour image dans le plan* z *le squelette* $\mathfrak{C}$; *ce squelette n'étant défini qu'à une translation près, on prendra pour* $z = 0$ *le point* $z(O)$; *on désignera par* ϖ_1 (*ou* ϖ_2) *la portion* $\widehat{OC}$ (ou $\widehat{BO}$) *de* $\widehat{BC}$; *les éléments homologues des frontières sont mis en évidence sur les figures* 1 *et* 2 ;

Fig. 2.



3° *Au segment* $\psi = 0$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty$ (ou $\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty$) *de* F', $z(f)$ *fasse correspondre une ligne* λ_1 (*ou* λ_2), *inconnue* a priori, *située entre* μ_1 *et* μ_2 *et joignant le point* C(B) *au point* $x = +\infty$, *et cela de manière à conserver les longueurs ; en d'autres termes, on doit avoir :*

$$\left|\frac{dz}{df}\right| = 1 \qquad \text{pour } \psi = 0 \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \infty. \\ \varphi_2 \leq \varphi \leq \infty. \end{cases} \tag{3}$$

4° *Aux points à l'infini de* F *ou* $\varphi > 0$ *on doit avoir*

$$z = f + \text{série entière en } \frac{1}{f}$$

et

$$z = kf + \text{série entière en } \frac{1}{f}$$

aux points à l'infini de F *ou* $\varphi < 0$; k *est une constante réelle* a priori *inconnue.*

Cet énoncé met en évidence les difficultés spécifiques du problème de Helmholtz. Le domaine d'existence F de $z(f)$ n'est pas donné *a priori* ; il est caractérisé par quatre constantes positives φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 *a priori* inconnues.

([16]) On a $\psi_1 > 0$; $\psi_2 > 0$.

D'autre part, seule la portion $\mathcal{C}$ de la frontière $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{A}$ est une donnée du problème; la détermination de la portion restante $\lambda_1 + \lambda_2$ de $\mathcal{C}'$ doit résulter justement de la condition isopérimétrique (3).

7. Le lecteur trouvera dans ma Thèse [*cf. loc cit.* (15)] le détail des artifices qui ont servi à M. Villat pour ramener à une équation intégro-différentielle le problème de Helmholtz que nous venons d'énoncer. Nous nous bornerons à rappeler les points essentiels de cette réduction, en insistant sur le fait qu'elle ne s'applique qu'aux contours pourvus de tangente en chacun de leurs points. Bien entendu, nous supposerons d'abord que toutes les formules écrites [et notamment (7) et (8)] ont un sens et nous vérifierons ce point essentiel *a fortiori*, après avoir introduit des hypothèses complémentaires de régularité relativement à $\widehat{BC}$.

M. Villat pose d'abord

$$f = -\frac{\psi_2}{\pi}\log\frac{t-a}{t_0-a} - \frac{\psi_1}{\pi}\log\frac{t-b}{b-t_0} + i\psi_1. \tag{4}$$

où a et b désignent deux nombres réels tels que $a < -1$, $b > 1$ et où

$$t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \quad \text{avec} \quad -1 < t_0 < 1, \tag{4'}$$

et où les logarithmes se réduisent à leur détermination arithmétique pour t réel et supérieur à b.

M. Villat prend ensuite

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{p'\left(\omega_1+\omega_3-\frac{\gamma}{2}-\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right) - p'(\gamma)}{p\left(\omega_1+\omega_3-\frac{\gamma}{2}-\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right) - p(\gamma)}, \tag{5}$$

où la fonction elliptique $p(u, \omega_1, \omega_3)$ de Weierstrass est construite à partir des périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$ telles que

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)(t-a)}}, \qquad \frac{\omega_3}{i} = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(b-t)(t-a)}}, \\ \gamma &= 2\int_b^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t-b)(t-a)}}, \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

les intégrales (5') étant prises le long de l'axe réel du plan t.

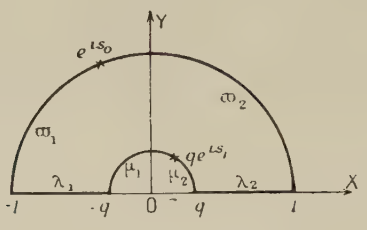
La relation (4) permet de substituer au groupe des quatre inconnues ψ_1, ψ_2, φ_1 et φ_2 le groupe entièrement équivalent des inconnues ψ_1, ψ_2, a et b. D'un autre côté, le produit des transformations (4) et (5) fait correspondre au

domaine F (*cf*, *fig.* 2) la demi-couronne circulaire supérieure d du plan auxiliaire $Z = X + iY$ [*cf.* (5)].

$$(6) \qquad \begin{cases} q \leq |Z| \leq 1 \\ Y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{avec } q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}.$$

Les éléments homologues sont mis en évidence sur la figure 3.

Fig. 3.



Les points $Z = e^{is_0}$ et $Z = qe^{is_1}$ sont respectivement les images des points $f = 0$ et $\varphi = -\infty$ du plan f; une discussion un peu longue (pour laquelle nous renvoyons à J. K., pp. 54-56) montre que les deux groupes de paramètres a, b, ψ_1 et ψ_2 d'une part, q, s_0, s_1 et $\dot{\psi}_1$ d'autre part, sont entièrement équivalents.

8. Cela fait, introduisons une fonction $l(s)$ définie pour $0 \leq s \leq \pi$, croissant de $l(0) = \alpha$ à $l(\pi) = \beta$ lorsque s croît de 0 à π et associons à cette fonction la fonction analytique de M. Villat

$$(7) \quad \Omega(Z) = \Omega(X, Y) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y) = \Psi[l(s)] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\Psi[l(s)]\log Z + \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \{\Psi[l(s')] - \Psi[l(s)]\} \times \left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s'\right)\right] ds' - i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)},$$

définie dans toute la couronne (6); les fonctions elliptiques ζ et σ sont encore construites à partir des périodes ω_1 et ω_3, données, à leur tour, par (5′) en fonction des seuls paramètres a et b. Il s'ensuit que le second membre de (7) est une fonctionnelle de $\Psi(l)$, $l(s)$ de a et de b et de ces éléments seulement, puisque le paramètre s_0 est donné alors par [J. K., p. 70, formule (1.24)]

$$(7') \qquad \pi s_0 = \int_0^\pi \Psi[l(s)]\, ds.$$

D'après les résultats classiques de M. Villat [*cf.* J. K., 12, p. 70, formules (1.23)) et (1.27)], la fonction $\Theta(X, Y)$, harmonique dans le domaine d défini par (6), se réduit à $\Psi[l(s)]$ pour $Z = e^{is}$, $s_0 \leq s \leq \pi$, à $\Psi[l(s) - \pi$ si $0 \leq s \leq s_0$ et à zéro pour $Z = qe^{is}$; enfin on a $T(X, o) = o$ pour $q \leq |X| \leq 1$. On montre alors (*cf.* J. K., 9, p. 57) que la transformation

$$z(Z) = \int_{e^{is_0}}^{Z} e^{i\Omega(Z)} \frac{df(Z)}{dZ} dZ \tag{8}$$

[où $f(Z)$ est définie au moyen de (4) et de (5)] fait correspondre au domaine d [*cf.* (6)] une configuration $\mathfrak{A}_1$ analogue au domaine $\mathfrak{A}$ que nous avons attaché au squelette donné $\mathcal{C}$; $\mathfrak{A}_1$ sera donc limité par deux droites μ'_1 et μ'_2, parallèles à Ox (images des arcs $Z = qe^{is}$, $s_1 \leq s \leq \pi$ et $o \leq s \leq s_1$ respectivement); le restant de la frontière $\mathfrak{A}'_1$ de $\mathfrak{A}_1$ sera formé de l'image de $Z = e^{is}$, $o \leq s \leq \pi$ qui sera un arc de courbe $\widehat{B_1C_1}$ intérieur à la bande limitée par μ'_1 et μ'_2 et des images des segments $-1 \leq X \leq -q$, $q \leq X \leq 1$, $Y = o$ du plan Z le long desquelles la condition isopérimétrique (3) sera vérifiée d'elle-même (17); d'après (7) et (8) l'angle de la tangente à $\widehat{B_1C_1}$ avec Ox prendra le long de $\widehat{B_1C_1}$ la même succession des valeurs que le long de l'arc donné $\widehat{BC}$. Enfin, les éléments $l(s)$, a, b restant toujours arbitraires, on peut choisir ψ_1 et ψ_2 de manière que les arcs $\widehat{BC}$ et $\widehat{B_1C_1}$ aient des longueurs égales. Dès lors la configuration $\mathcal{C}_1$ formée de $\widehat{B_1C_1}$ et de deux droites μ'_1 et μ'_2 coïncidera avec le squelette $\mathcal{C}$, donné *a priori* au moyen des éléments $\Psi(l)$, α, β, d_1, d_2, si les trois éléments $l(s)$, a, b, demeurés seuls inconnus, vérifient le système des trois relations [*cf.* J. K. 12, p. 76 et 23, pp. 174-176; les relations (9) ci-dessous découlent aussi de (8)]

$$\begin{cases} \dfrac{dl}{ds} = j\, e^{-T(e^{is})} \dfrac{df(e^{is})}{ds} \qquad (j = \pm 1 \text{ pour } s \gtrless s_0), \\ d_1 = \displaystyle\int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, o)\, df(X, o) + \psi_1, \\ d_2 = \displaystyle\int_{q}^{1} \sin \Omega(X, o)\, df(X, o) + \psi_2, \end{cases} \tag{9}$$

dont les seconds membres sont des fonctionnelles compliquées de $\Psi(l)$, α, β et de $l(s)$, a, b (18) [*cf.* les formules (4), (5) et (7) ci-dessus]. Rappelons que (9_1) traduit l'identité des arcs $\widehat{B_1C_1}$ et $\widehat{BC}$, alors que (9_2) et (9_3) expriment la condition de coïncidence de μ'_1 avec μ_1 et de μ'_2 et μ_2 respectivement : le

(17) Ceci en vertu de (8) et de la condition $T(X, o) = o$ pour $q \leq |X| \leq 1$.

(18) Rappelons, en effet, que ψ_1 et ψ_2 ont été déterminés en fonction de $\Psi(l)$, α, β, $l(s)$, a et b.

système (9), dû à M. Villat, constitue donc bien le système d'équations fonctionnelles du problème du sillage posé relativement à $\mathcal{C}$ dont $l(s)$, a et b sont les trois inconnues.

9. Il est commode de réduire l'ensemble des relations (9) à une équation fonctionnelle unique. Écrivons d'abord (9) sous la forme équivalente

$$(10)\qquad \begin{cases} l(s) = \displaystyle\int_0^s e^{-\tau(e^{is})}\, df + \alpha, \\ b = b + \dfrac{1}{\lambda}\left[d_1 - \displaystyle\int_{-1}^{-\eta} \sin\Omega(X, o)\, df(X, o) - \psi_1\right], \\ a = a + \dfrac{1}{\lambda}\left[d_2 - \displaystyle\int_{\eta}^{1} \sin\Omega(X, o)\, df(X, o) - \psi_2\right], \end{cases}$$

où λ est une constante ayant la dimension d'une longueur et dont le rôle est de rendre homogènes les seconds membres des deux dernières relations du système (10) ([19]). Introduisons alors l'ensemble abstrait $E[l(s), a, b]$ dont un élément x sera constitué par l'ensemble de la fonction $l(s)$ et de deux paramètres a et b; moyennant cette convention de langage, l'ensemble des seconds membres de (10) peut être envisagé comme une transformation fonctionnelle $F(x)$ opérant sur $E[l(s), a, b]$ et qui fournit encore un élément du même ensemble. Il en résulte que l'ensemble des équations (10) de M. Villat est équivalent à l'équation fonctionnelle unique

$$(10')\qquad x = F(x),$$

en sorte que l'étude des conditions d'existence des solutions du problème du sillage, posé relativement à notre configuration $\mathcal{C}$, revient, en dernière analyse, à l'étude des conditions d'existence des solutions de (10'). Or, cette dernière équation appartient au type même envisagé par MM. J. Schauder et J. Leray ([20]). Dès lors, pour appliquer les critères d'existence, dus à ces auteurs, il est nécessaire d'imposer aux données des conditions supplémentaires de régularité, afin que l'inconnue appartienne à un espace fonctionnel suffisamment régulier ([21]). Dans ma Thèse, j'ai étudié le cas où la fonction caractéristique $\Psi(l)$ de l'obstacle $\widehat{BC}$ était continue pour $\alpha \leq l \leq \beta$ [*cf.* (2)] et possédait même

([19]) On se rappellera que les paramètres a et b sont dépourvus de dimensions [*cf.* (4)].

([20]) *Topologie et équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale. Sup.*, 51, 1935, pp. 45 et 59).

([21]) Nous préciserons ce point en temps utile. Pour l'instant, notons que l'équation (7) ne peut avoir de sens que si la donnée $\Psi(l)$ et l'inconnue $l(s)$ qui y figurent sont assez régulières pour assurer un sens à l'intégrale du second membre, dont le noyau est de la forme

$$\int_0^{\pi} \frac{\Psi[l(s)] - \Psi[l(s')]}{(s - s')}\, \mathfrak{I}(s, s')\, ds',$$

et où $\mathfrak{I}(s, s')$ est une fonction de ses arguments régulière pour $o \leq s \leq \pi$, $o \leq s' \leq \pi$.

une dérivée suffisamment régulière. Nous allons reprendre la question en supposant l'arc $\widehat{BC}$ doué d'un nombre fini de points anguleux.

10. Soient donc $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les abscisses curvilignes des points anguleux $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de $\widehat{BC}$. Nous admettrons que la fonction $\Psi(l)$ correspondante, toujours assujettie à vérifier (2) et (2'), est continue dans chacun des intervalles $\alpha \leq l \leq l_1$; $l_j \leq l \leq l_{j+1} (j = 1, 2, \ldots, n-1)$, $l_n \leq l \leq \beta$, mais subit pour $l = l_j (j = 1, 3, \ldots, n)$ une discontinuité. Pour des raisons que l'on précisera par la suite [*cf.* J. K., l'équation (1.25), p. 70 et le raisonnement de la page 73], il sera essentiellement supposé que les nombres α_j définis par

$$\Psi(l_j + 0) - \Psi(l_j - 0) = (2\alpha_j - 1)\pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

et, par suite, compris entre 0 et 1, sont différents de 0 et de 1

$$\begin{cases} \alpha_j \neq 1 \\ \alpha_j \neq 0 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{11'}$$

Géométriquement, cela veut dire que l'arc $\widehat{BC}$ est dépourvu de points de rebroussement et ne possède que des points anguleux.

Ceci étant, supposons encore le problème résolu et soient $s_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ les arguments des points $Z_j = e^{is_j}$, images des points P_j dans le plan Z. D'après (7) et (8), $\Omega(Z)$ et, par suite $z(Z)$ présente en chaque point Z_j une singularité, en sorte que l'équation (10_1) n'est pas suffisamment régulière pour $s = s_j$. Il apparaît, dès lors, avantageux, quitte à augmenter le nombre des inconnues, de modifier le système (10) de manière à se débarrasser de l'inconnue qui rend discontinue la fonction $\Psi[l(s)]$.

A cet effet, observons que les valeurs des paramètres s_j, *a priori* inconnues, sont assujetties à vérifier le système

$$l(s_j) = l_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

où $l(s)$ est toujours donné par (10_1). Nous verrons, d'autre part, que la fonction $\Psi[l(s)]$ est suffisamment régulière dans chacun des intervalles $0 \leq s \leq s_1$, $s_j \leq s \leq s_{j+1} [j = 1, 2, \ldots, (n-1)]$, $s_n \leq s \leq \pi$ (cela moyennant quelques hypothèses complémentaires de régularité concernant l'arc $\widehat{BC}$); il y a donc intérêt à prendre pour nouvelles inconnues les $(n+2)$ paramètres a, b, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ et les $(n+1)$ fonctions $l_j(s)$, $[j = 1, 2, \ldots, (n+1)]$ définies par

$$\begin{cases} l_1(s) = l(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq s_1, \\ l_2(s) = l(s) & \text{pour } s_1 \leq s \leq s_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ l_{n+1}(s) = l(s) & \text{pour } s_n \leq s \leq \pi; \end{cases} \tag{13}$$

où $l(s)$ est encore donnée par (10). Dès lors, eu égard à (12) et à (13), (10) sera remplacé par

$$
(14)\quad
\begin{cases}
l_1(s) = \displaystyle\int_0^s e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\,|df| + \alpha \qquad (0 \leq s \leq s_1),\\
l_j(s) = \displaystyle\int_{s_{j-1}}^s e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\,|df| + l_{j-1} \qquad (s_{j-1} \leq s \leq s_j;\ j = 2, 3, \ldots, n);\\
l_{n+1}(s) = \displaystyle\int_{s_n}^s e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\,|df| + l_n \qquad (s_{n+1} \leq s \leq \pi),\\
\dfrac{1}{b-1} = \dfrac{1}{b-1} + \lambda\left[\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{-\eta} \sin\Omega(\mathrm{X}, o)\,df(\mathrm{X}, o) + \psi_1}\right],\\
\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{1}{a+1} + \lambda\left[\dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{\displaystyle\int_{\eta}^{1} \sin\Omega(\mathrm{X}, o)\,df(\mathrm{X}, o) + \psi_2}\right];\\
s_1 = s_1 + \dfrac{1}{\lambda}\left[l_1 - \alpha - \displaystyle\int_0^{s_1} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\,|df|\right]\\
s_j = s_j + \dfrac{1}{\lambda}\left[l_j - l_{j-1} - \displaystyle\int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\,|df|\right] \qquad (j = 2, 3, \ldots, n).
\end{cases}
$$

On remarquera la forme donnée aux équations (10_2) et (10_3) et dont on verra plus loin l'avantage (*). On observera aussi qu'en vertu des n dernières équations (14) toute solution éventuelle de (14) vérifie les conditions

$$
(14a)\qquad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq \pi.
$$

D'après ce qui précède, les seconds membres des équations (14) sont des fonctionnelles des données $\Psi(l), d_1, d_2, l_1, l_2, \ldots, l_n, \alpha, \beta$ et aussi des $(2n+3)$ inconnues du système (14). Introduisons alors l'ensemble fonctionnel $\mathcal{E}[l_1(s), l_2(s), \ldots, l_{n+1}(s), a, b, s_1, s_2, \ldots, s_n]$ [ou plus simplement $\mathcal{E}$ (22) lorsqu'aucune ambiguïté ne sera à craindre] dont un élément x sera constitué par l'ensemble des $(2n+3)$ éléments inconnus, les $(n+1)$ fonctions, $l_j(s)$, les $(n+2)$ paramètres s_j et a et b; on peut encore considérer l'ensemble des rela-

(*) Il y a lieu d'observer que les inconnues et les données sont assujetties à vérifier la condition de compatibilité suivante :

$$
\pi = \pi + \frac{1}{\lambda}\left[\beta - l_n - \int_{s_n}^{\pi} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\,|df|\right]
$$

qui exprime que la longueur totale de l'arc $\widehat{\mathrm{BC}}$ est égale à $(\beta - \alpha)$. Mais cette condition est satisfaite d'elle-même (*cf.* J. K., 23, pp. 173-174).

(22) Bien entendu, il y aura lieu de préciser avec soin les propriétés de cet ensemble; c'est ce qui sera fait dans les paragraphes qui suivent.

tions (14) comme une transformation fonctionnelle unique, opérant sur l'ensemble $\mathcal{E}$ et qui fournit un élément du même ensemble. Il suit de là que le système (14) est équivalent à une équation fonctionnelle unique

$$x = \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}[x, \Psi(l); l_1, l_2, \ldots, l_n; \alpha, \beta, d_1, d_2] \tag{14'}$$

que nous allons maintenant étudier plus en détail, de même que nous allons préciser les propriétés topologiques de l'ensemble $\mathcal{E}$.

11. En premier lieu, rappelons qu'en vertu des inégalités (2) toute solution éventuelle du problème du sillage posé relativement à la configuration $\mathcal{C}$ correspondante, possède la propriété suivante : l'intersection des lignes libres λ_1 et λ_2 avec toute parallèle à Ox se réduit à un point unique.

Reprenons la démonstration de ce fait, en insistant sur un point, trop brièvement traité dans ma Thèse. Supposons qu'il existe une solution du problème de Helmholtz, posé pour le contour $\mathcal{C}$ dont la portion $\widehat{BC}$ soit caractérisée par une fonction $\Psi(l)$ satisfaisant à (2), continue pour $\alpha \leq l \leq \beta$, sauf pour $l = l_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Alors, d'après (14), l'inconnue correspondante $l(s)$ est nécessairement croissante pour $0 \leq s \leq \pi$. Il en résulte que la fonction $\Phi(s)$, associée à $\Psi[l(s)]$ comme il suit,

$$\Phi(s) = \Psi[l(s)] - \pi \qquad \text{pour } 0 \leq s \leq s_0,$$
$$\Phi(s) = \Psi[l(s)] \qquad \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi$$

[où s_0 est le paramètre défini par (7')], vérifie les trois conditions (*) [*cf.* (2) et (7')]

$$0 \leq \Phi(s) \leq \pi \qquad \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi,$$
$$-\pi \leq \Phi(s) \leq 0 \qquad \text{pour } 0 \leq s \leq s_0,$$
$$\int_0^{\pi} \Phi(s)\, ds = 0.$$

On remarquera que $l(s)$ n'est pas supposée continue; mais comme $l(s)$ est, par hypothèse, une solution de (14), la fonction $\Omega(Z)$ sera toujours donnée par (7), où l'on aura substitué à $\Psi[l(s)]$ la fonction $\Phi(s)$ que nous venons d'introduire.

Dans ces conditions, les raisonnements du paragraphe 16 de J. K s'appliquent intégralement et montrent que la fonction $\Theta(X, 0)$, définie par (7), est positive pour $-1 \leq X \leq -q$, c'est-à-dire sur λ_1 et négative pour $q \leq X \leq 1$, c'est-à-dire sur λ_2; les formules (3) et (8) prouvent alors que sur λ_1 et λ_2

$$\frac{dz}{df} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds} = \cos\Theta(X, 0) + i \sin\Theta(X, 0),$$

(*) Le paramètre s_0 peut éventuellement se confondre avec l'un des n paramètres s_j.

donc

$$\frac{dy}{ds} = \sin\Theta(X, o),$$

où $ds = df$ désigne l'élément d'arc de λ_1 et λ_2, orienté dans le sens des f croissants; cette relation justifie le lemme sus-énoncé.

12. Nous supposerons maintenant que les distances d_1 et d_2 sont toutes deux bornées inférieurement par une longueur fixe d. Les raisonnements du paragraphe 24 de J. K. s'appliquent encore à la configuration $\mathcal{C}$ correspondante, assujettie à vérifier (2) et justifient l'inégalité [*cf.* (5′) et (6) pour la signification de q] [23]

$$q \leq e^{-\frac{1}{10\pi}\frac{d^2}{D^2}}. \tag{15}$$

On déduit de là (*cf. loc. cit.*, p. 182) l'existence d'une constante $K(d)$ ne dépendant que de d, positive, non nulle, telle que

$$\begin{cases} |a+1| \geq \dfrac{1}{K(d)}, \\ |b-1| \geq \dfrac{1}{K(d)}, \\ \dfrac{1}{|a+1|} < K(d); \quad \dfrac{1}{|b-1|} < K(d). \end{cases} \tag{15′}$$

Ainsi les valeurs des inconnues a, b, solutions éventuelles du système (14) correspondant à une configuration $\mathcal{C}$ (dont les bords μ_1 et μ_2 sont à des distances d_1 et d_2 inférieurement bornées de l'arc $\widehat{BC}$) sont différentes de -1 et 1 respectivement. Il suit de là [*Cf.* les paragraphes 14, 14 *bis*, 28 de J. K.] que la correspondance $z(Z)$ — à supposer qu'elle existe — ne dégénère pas et reste holomorphe pour $q \leq |Z| < 1$, même si l'une des distances d_1 ou d_2 (ou les deux à la fois) devient infinie. On sait que si $d_1 = \infty$ (ou $d_2 = \infty$ ou $d_1 = d_2 = \infty$), le paramètre b (ou a) correspondant (ou les deux à la fois) devient infini et que, réciproquement, la relation $b = \infty$, par exemple, entraîne $d_1 = \infty$. Toutefois, la démonstration complète de ce dernier résultat repose non seulement sur les minorations des distances d_1 et d_2, mais aussi sur quelques hypothèses de régularité concernant $\widehat{BC}$ (*Cf.* J. K. paragraphe 27) que les configurations $\mathcal{C}$, considérées au cours de ce travail, vérifient.

13. Pour continuer, il faut préciser le mode de continuité de $\Psi(l)$ dans chacun des intervalles $\alpha \leq l \leq l_1$, $l_j \leq l \leq l_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots (n-1))$, $l_n \leq l \leq \beta$.

---

(23) Soient D_1 le diamètre apparent de $\widehat{BC}$ dans le sens Ox, égal, d'ailleurs, à la différence des ordonnées des points C et B; $2D_2$ le diamètre apparent de $\widehat{BC}$ dans le sens Oy, on posera dans (15), si $d_1 \leq d_2$:

$$D^2 = D_2^2 + (d_1 + D_1)^2.$$

Nous admettrons désormais qu'en chaque point d'un tel intervalle, la dérivée $\Psi'(l)$ existe (extrémités comprises) et qu'elle vérifie l'inégalité

$$\Psi'(l) \leq \text{const.}, \qquad \alpha \leq l \leq \beta. \tag{16}$$

Il est clair, qu'en général,

$$\Psi'(l_j + 0) \neq \Psi'(l_j - 0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

14. Voici, en définitive, l'ensemble des hypothèses de régularité que nous imposons à la configuration $\mathcal{C}$, caractérisée par les éléments $\Psi(l)$, α, β, d_1, d_2.

1° *Les paramètres* α, β *sont bornés en valeur absolue; il en sera de même des* n *paramètres* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *puisque* $\alpha \leq l_j \leq \beta$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

2° *Les distances* d_1, d_2 *vérifient les inégalités* $d_j \geq d$ $(j = 1, 2)$, *où* d *est une longueur fixe.*

3° $\Psi(l)$ *vérifie les inégalités* (2) *et* (2′) *pour* $\alpha \leq l \leq \beta$.

4° *Pour* $l = l_j (j = 1, 2, \ldots, n)$, $\Psi(l)$ *possède les discontinuités* (11), *assujetties à satisfaire* (11′).

5° $\Psi(l)$ *est continue et dérivable pour*

$$\alpha \leq l \leq l_1, \qquad l_j \leq l \leq l_{j-1} \quad [j = 1, 2, \ldots, (n-1)], \qquad l_n \leq l \leq \beta;$$

la dérivée $\Psi'(l)$ *vérifie* (16); *les expressions* $\Psi'(l_j + 0)$ *et* $\Psi'(l_j - 0)$ *existent mais sont, en général, distinctes.*

Nous supposerons désormais que la configuration $\mathcal{C}$ satisfait à l'ensemble des hypothèses qui précèdent, ensemble que, pour abréger, nous désignerons par (H). De plus, nous admettrons au cours du paragraphe 23 que $\Psi'(l)$ est continue au sens de Hölder; mais cette hypothèse, qui permet de simplifier l'exposition, n'est pas indispensable.

15. Dans ces conditions nous savons que (H_3) et (H_4) entraînent ce corollaire ([24]) :

Toute solution éventuelle des équations fonctionnelles (14), *relatives à une configuration* $\mathcal{C}$ *satisfaisant aux hypothèses* (H) *possède la propriété suivante : l'inconnue* $l(s)$ *vérifie une condition* $\mathcal{L}_p(s)$ ([25]) *sur tout l'intervalle* $0 \leq s \leq \pi$:

([24]) L'hypothèse de la continuité (H_5) de $\Psi(l)$ sans être indispensable, permet de simplifier la démonstration [*Cf.* J. K., 22, pp. 159-160; voyez le renvoi ([22]), p. 159].

([25]) On trouvera une étude détaillée du mode de continuité $\mathcal{L}_p(s)$ au paragraphe 11 de J. K. Rappelons que l'extension de (17) aux voisinages des points $s = 0$, $s = s_j (j = 1, 2, \ldots, n)$, $s = \pi$ repose sur les inégalités (2′) et (11′) (*Cf.* J. K., pp. 164-167).

en d'autres termes, s et s' étant deux points quelconques de l'intervalle en cause, on a

$$|l(s)-l(s')| \leq \frac{K}{\left|\log\frac{1}{|s-s'|}\right|^{p}}, \tag{17}$$

où p désigne un nombre positif aussi grand qu'on le veut et K *une constante bien déterminée, dépendant de α, β, p et du maximum de $\Psi'(l)$ sur* $\widehat{BC}$.

Il en résulte, en particulier, que chacune des inconnues $l_j(s)$ du système (14) satisfait à (17) sur l'intervalle $s_{j-1} \leq s \leq s_j$ où elle est définie.

16. Les raisonnements exposés dans ma Thèse permettent d'améliorer les résultats qui précèdent sur chacun des intervalles où $\Psi(l)$ est continue. On tire, en effet, de (16)

$$|\Psi(l)-\Psi(l')| \leq \text{const.}|l-l'|,$$

où l et l' désignent les abscisses curvilignes de deux points appartenant à l'un des arcs $\widehat{BP_1}$, $\widehat{P_1P_2}$, ..., $\widehat{P_nC}$; il s'ensuit, eu égard à (17) ([26]),

$$|\Psi[l_j(s)]-\Psi[l_j(s')]| \leq \frac{\text{const.}\,K}{\left|\log\frac{1}{|s-s'|}\right|^{p}}, \tag{18}$$

valable même en leurs extrémités $l=l_j$. On en déduit [*Cf.* les paragraphes 22 et 26 de J. K.) que la dérivée $\frac{dl_j(s)}{ds}$ existe et vérifie une condition $\mathfrak{L}_{p-1}(s)$ à l'*intérieur* de son intervalle de définition ([27]). Il nous reste à préciser l'allure de $\frac{dl_j(s)}{ds}$ en les extrémités de l'intervalle en cause.

17. Employons à cet effet un artifice depuis longtemps classique et envisageons la fonction auxiliaire

$$H(Z) = \Omega_0(Z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{(2\alpha_j-1)}{i} \log\frac{Z-Z_j}{Z-\overline{Z}_j}, \tag{19}$$

([26]) Le nombre p étant arbitrairement grand, il suffirait, pour justifier l'inégalité du texte, de supposer que $\Psi(l)$ vérifie une condition de Hölder. M. Oudart (*loc. cit.*) se borne, justement, à cette hypothèse.

([27]) (*Cf.* J. K.; pp. 161-166 et pp. 193-196). On remarquera que la constante de l'inégalité

$$\left|\left[\frac{dl_j(s)}{ds}\right]_{s=s} - \left[\frac{dl_j(s)}{ds}\right]_{s=s'}\right| \leq \frac{\text{Const.}}{|\log(s-s')|^{p-1}}$$

dépend cette fois, non seulement de α, β, p et $\text{Max}|\Psi''(l)|$ mais aussi de la minorante d de d_1 et d_2.

où les α_j sont donnés par (11), où l'on a posé $\bar{Z}_j = e^{-is_j}$, $Z_j = e^{is_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, où $\log(Z - Z_j) - \log(Z - \bar{Z}_j) = i(s_j - \pi)$ pour $Z = 1$ et où l'on a pris [*Cf.* (7)]

$$(19') \qquad \Omega_0(Z) = \Omega(Z) + i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} = \Theta_0(X, Y) + i\, T_0(X, Y).$$

Alors la partie réelle $\mathcal{R}H(e^{is})$ de $H(e^{is})$ s'écrit

$$(19_1) \qquad \mathcal{R}\, H(e^{is}) = \Psi[l(s)] + \mathcal{R} \sum_1^n \frac{(2\alpha_j - 1)}{i} \log \frac{e^{is} - e^{is_j}}{e^{is} - e^{-is_j}}.$$

Comme $\mathcal{R} \frac{(2\alpha_j - 1)}{i} \log \frac{e^{is} - e^{is_j}}{e^{is} - e^{-is_j}}$ est égale à $(s_j - \pi)(2\alpha_j - 1)$ pour $0 \leq s \leq s_j$ et à $(s_j - 2\pi)(2\alpha_j - 1)$ pour $s_j \leq s \leq \pi$ [c'est-à-dire qu'elle diminue en traversant la singularité $s = s_j$ de

$$\pi(2\alpha_j - 1) = \Psi[l(s_j) + 0] - \Psi[l(s_j - 0)],$$

d'après (11)] la fonction $\mathcal{R}H(e^{is})$ sera continue pour $0 \leq s \leq \pi$ et vérifiera même sur tout cet intervalle une condition $\mathcal{L}_p(s)$ analogue à (18) et dont le coefficient dépendra des mêmes paramètres, à savoir α, β, p, la cte, de l'inégalité (16). Comme, de plus, $|H(X, 0)|$ est bornée (1), il s'ensuit [*Cf.* J. K., 11] que la fonction $H(Z)$, holomorphe pour $q \leq |Z| < 1$, vérifie pour $Z = e^{is}$, $0 \leq s \leq \pi$ une condition $\mathcal{L}_{p-1}(s)$. Or, de (7) et de (19), on tire

$$(19'') \qquad e^{i\,\Omega(e^{is})} = \frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)\right]} \prod_{j=1}^{j=n} \left(\frac{e^{is} - e^{-is_j}}{e^{is} - e^{is_j}}\right)^{2\alpha_j - 1} e^{i\,H(e^{is})},$$

en sorte que le premier membre est continu au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ dans le voisinage de chaque point de l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$ sauf pour $s = s_0$, où l'expression (19'') possède un pôle simple et, éventuellement [suivant le signe de $(2\alpha_j - 1)$] pour $s = s_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Mais la fonction analytique $\frac{df}{dZ}$ est holomorphe pour $Z = e^{is}$ et possède pour $Z = Z_0$ un zéro simple [*Cf.* (4) et (5) : *Cf.* aussi la formule (2.11) de J. K.]; il en résulte que le produit réel

$$\frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)\right]} \frac{df(e^{is})}{ds}$$

---

(1) En effet, $|\Omega(X, 0)| < \pi$, $\left|\sum_1^n \log \frac{Z - Z_j}{Z - Z_j}\right| \leq 2\pi n$ pour $Z = X$, $X > 0$; le logarithme du second membre de (19') est borné pour $Z = X$, $X > 0$.

est holomorphe pour $s = s_0$. Or [*Cf.* (8)]

$$\frac{dl}{ds} = \left| e^{i\Omega(e^{is})} \right| \left| \frac{df(e^{is})}{ds} \right|.$$

Les trois dernières égalités prouvent donc bien que $\frac{dl}{ds}$ est continue $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ (comme on l'a annoncé) pour $s = s_0$ tant que $s_0 \neq s_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. Les relations précédentes montrent aussi que dans le voisinage de $s = s_j$, $\frac{dl(s)}{ds}$ se comporte comme $F(s) \, | s - s_j |^{1-2\alpha_j}$, où $F(s)$ désigne une fonction continue au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$. Comme, d'après (11'), on a $| 1 - 2\alpha_j | < 1$, l'intégrale

$$l(s) = \int_{s_0}^{s} | e^{i\Omega(e^{is})} \, df(e^{is}) | + \alpha$$

existe quel que soit s, $0 \leq s \leq \pi$; de plus, elle vérifie sur tout cet intervalle une condition de Hölder. En effet, si $(1 - 2\alpha_j) > 0$, $\frac{dl(s)}{ds}$ s'annule pour $s = s_j$ et vérifie une condition $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ dans le voisinage de cette valeur ([28]). Sinon appelons ν un nombre positif, inférieur au plus petit des nombres $2(1 - \alpha_j)$; d'après (11) et (11'), ce nombre existe nécessairement; nous avons, en reprenant la notation $\frac{dl}{ds} = F(s) \, | s - s_j |^{1-2\alpha_j}$, introduite ci-dessus et valable dans le voisinage de $s = s_j$ et en supposant, pour fixer les idées, $s \leq s_j$

$$| l(s_j) - l(s) | = \int_{s}^{s_j} | F(s) | (s_j - s)^{1-2\alpha_j} \, ds$$

$$\leq 4\pi^2 \operatorname{Max} | F(s) | \int_{s}^{s_j} (s_j - s)^{\nu - 1} \, ds = \frac{4\pi^2 \operatorname{Max} | F(s) |}{\nu} | s_j - s |^{\nu}.$$

Or, à l'alinéa suivant on vérifiera que les nombres $s_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ correspondant au squelette $\mathcal{C}$, assujetti à vérifier les hypothèses (H), sont tels que chacune des expressions $s_1, s_{j+1} - s_j \, [j = 1, 2, \ldots, (n-1)]$ est inférieurement bornée par un nombre positif γ dépendant de α, β, d et $\operatorname{Max} | \Psi''(l) |$. Il en résulte que l'inégalité précédente est valable sur chacun des intervalles

$$s_j - \frac{\gamma}{2} \leq s \leq s_j + \frac{\gamma}{2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

puisque $F(s)$ y vérifiera une condition $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ et y sera bornée par une constante, dépendant de $\operatorname{Max} | \Psi''(l) |$, α, β, d. Comme, par ailleurs, $\frac{dl(s)}{ds}$ est continue $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ à l'intérieur des intervalles où $\Psi[l(s)]$ est continue, $l(s)$ vérifiera la condition

$$| l(s') - l(s) | \leq C | s - s' |^{\nu} \tag{20}$$

([28]) On se reportera au paragraphe 19 pour l'interprétation géométrique de cette condition. Il est clair que dans ce cas $l(s)$ vérifie une condition de Lipschitz.

sur tout son intervalle de définition $0 \leq s \leq \pi$. Rappelons que C est une fonctionnelle compliquée de α, β, $\mathrm{Max}|\Psi''(l)|$ et de $\frac{1}{d}$, bornée supérieurement au moyen des majorantes de ces quatre paramètres ([29]).

Pour achever de justifier les développements qui précèdent, il suffit de justifier l'existence de la constante γ. Or, on tire de (8) et (19″)

$$l_j - l_{j-1} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-\mathrm{Imag.}\, H(e^{is})} \left\{ \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{\sin \frac{s - s_j}{2}}{\sin \frac{s - s_j}{2}} \right|^{2\alpha_j - 1} \right\} \left\{ \left| \frac{\Im\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) \right]}{\Im\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} \right| ds \right|.$$

Mais $|H(e^{is})|$ est bornée, ainsi que nous l'avons vu. Donc, l'expression $e^{-\mathrm{Imag.}\, H(e^{is})}$ admet une minorante positive fixe, dépendant de $\mathrm{Max}\,|\Psi''(l)|$, α, β, $\frac{1}{d}$ et p. Il en est de même de

$$\left| \frac{\Im\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) \right]}{\Im\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} \right| \qquad \text{pour } 0 \leq s \leq \pi,$$

la minorante correspondante dépendant de $\frac{1}{d}$ seulement. Il s'ensuit que si la longueur $l_j - l_{j-1}$ de l'arc $\overset{\frown}{P_{j-1}P_j}$ de $\overset{\frown}{BC}$ est inférieurement bornée, la différence $s_j - s_{j-1}$ sera minorée par un nombre positif fixe γ, fonctionnelle de α, β, p, $\frac{1}{d}$, $\mathrm{Max}|\Psi''(l)|$. C. Q. F. D.

18. Voici d'autres conséquences utiles de la discussion qui précède. L'argument x de la transformation fonctionnelle $\mathfrak{F}(x)$ [*Cf.* (14′)] était constitué, rappelons-le, par l'ensemble des $(n+1)$ fonctions $l_j(s)$ et les $(n+2)$ paramètres s_j, a et b. Les conclusions du précédent paragraphe permettent de définir $\mathfrak{F}(x)$ seulement pour un x dont les $(n+1)$ arguments $l_j(s)$ sont définis dans les intervalles respectifs $0 \leq s \leq s_1$, $s_{j-1} \leq s \leq s_j$ $(j = 2, \ldots, n)$, $s_n \leq s \leq \pi$, sur lesquels elles vérifient une condition (20), qui sont croissantes dans leurs intervalles de définition respectifs et qui, en outre, vérifient les conditions aux limites $l_j(s_j) = l_{j+1}(s_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; de plus, les arguments s_j de x vérifiaient les inégalités : $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \pi$. Nous allons, à présent, élargir l'ensemble des arguments x sur lesquels est définie (14′).

Considérons, à cet effet, l'ensemble $L_j(s)$ de $(n+1)$ fonctions définies pour $0 \leq s \leq \pi$ sur lequel elles vérifient toutes une condition de la forme (20)

([29]) Les raisonnements du paragraphe 16 pourraient être appliqués à (20). On montrerait successivement que $\Psi'[l_j(s)]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ vérifie une telle condition, extrémités de l'intervalle de définition comprises, puis (Théorème de Fatou-Priwaloff) qu'il en est ainsi de $H(e^{is})$ et, par suite, de $\frac{dl_j(s)}{ds}$, sauf, éventuellement, en les extrémités de son intervalle de définition.

et un groupe de n paramètres s_j, $0 < s_j < \pi$. En général, les $L_j(s)$ ne seront pas monotones et croissantes pour $0 \leq s \leq \pi$; de même, les paramètres s_j ne vérifieront pas les inégalités $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \pi$, en sorte que les intervalles $(0, s_1), (s_1, s_2), \ldots, (s_n, \pi)$ pourront empiéter les uns sur les autres (*). Enfin, les fonctions $L_j(s)$ ne vérifieront pas les conditions aux limites $L_j(s_j) = L_{j-1}(s_j)$, en sorte que la fonction $L(s)$, égale à $L_j(s)$ pour $s_{j-1} \leq s \leq s_j$, etc., n'est pas continue pour $0 \leq s \leq \pi$.

Ceci posé, considérons le squelette $\mathcal{C}$ défini par les éléments

$$\alpha < l_1 < l_2 < \ldots < l_n < \beta, \quad \Psi(l), \quad d_1, \quad d_2.$$

Associons à $L_j(s)$ la fonction $L_j^*(s)$ en posant

$$L_j^*(s) = l_{j-1} \quad \text{et} \quad \Psi[L_j^*(s)] = \Psi(l_{j-1} + 0), \quad \text{si} \quad L_j(s) \leq l_{j-1}$$
$$\text{pour } s \text{ tel que } s_{j-1} \leq s \leq s_j;$$

$$L_j^*(s) = L_j(s) \quad \text{et} \quad \Psi[L_j^*(s)] = \Psi[L_j(s)], \quad \text{si} \quad l_{j-1} \leq L_j(s) \leq l_j$$
$$\text{pour } s \text{ tel que } s_{j-1} \leq s \leq s_j;$$

$$L_j^*(s) = l_j \quad \text{et} \quad \Psi[L_j^*(s)] = \Psi(l_j - 0), \quad \text{si} \quad L_j(s) \geq l_j$$
$$\text{pour } s \text{ tel que } s_{j-1} \leq s \leq s_j.$$

Dans ces conditions, $\Psi[L_j^*(s)]$ est définie dans tout l'intervalle $s_{j-1} \leq s \leq s_j$; on définirait d'une manière analogue $\Psi[L_1^*(s)]$ sur $0 \leq s \leq s_1$ et $\Psi[L_{n+1}^*(s)]$ sur $s_n \leq s \leq \pi$. On peut alors déterminer le paramètre s_0 en écrivant [*Cf.* (7')]

$$\pi s_0 = \int_0^{s_1} \Psi[L_1^*(s)]\, ds + \sum_{j=2}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \Psi[L_j^*(s)]\, ds + \int_{s_n}^{\pi} \Psi[L_{n+1}^*(s)]\, ds.$$

De même, la formule (7) fera correspondre à l'élément x considéré une fonction $\Omega(Z)$, pourvu que l'on écrive l'intégrale du second membre

$$\int_0^{s_1} + \int_{s_1}^{s_2} + \ldots + \int_{s_n}^{\pi}.$$

Observons, toutefois, que les discontinuités subies aux points $s = s_j$ par $\Psi(s)$ peuvent n'être pas données par (11); il en sera ainsi, par exemple, lorsque $l_{j-1} < L_j^*(s_{j-1}) < l_j$, car dans ce cas, en général, $\Psi[L_j(s_{j-1})] \neq \Psi(l_{j-1} - 0)$.

Comme les $L_j(s)$ satisfont à (20), les $\Psi[L_j^*(s)]$, eu égard à (16), vérifieront également une condition de Hölder sur chacun des intervalles où $\Psi[L_j^*(s)]$ considérée est définie : il en sera par suite, de même, en vertu du théorème de Fatou et Priwaloff de $\Omega(e^{is})$. A partir de là, le raisonnement se développe comme

(*) Si $s_{j-1} > s_j$, l'intervalle de définition des fonctions $L_j^*(s)$, introduites ci-dessous, sera $s_j \leq s \leq s_{j-1}$ au lieu de $s_{j-1} \leq s \leq s_j$. Pour simplifier les écritures, nous adopterons dans la suite la notation $s_{j-1} \leq s \leq s_j$ pour l'intervalle en cause.

au paragraphe 17. On montre ainsi que si, dans les seconds membres des $(n+1)$ premières équations de (14), on remplace par les

$$L_j(s), \quad s_j, \quad a, \quad b, \quad [(a+1)<0, (b-1)>0]$$

une solution éventuelle $l_j(s)$, s_j, a, b du problème du sillage, posé relativement au squelette $\mathcal{C}$, on obtient $(n+1)$ fonctions $L'_j(s)$ différentes, en général, des $L_j(s)$ mais qui vérifieront sur leurs intervalles respectifs de définition (lesquels seront étendus à tout l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$; *Cf.* le paragraphe 21) une condition de Hölder telle que (20). Étant données les transformations effectuées sur les $L_j(s)$ pour construire les $L'_j(s)$, les constantes des deux inégalités de Hölder, vérifiées par les $L_j(s)$ et $L'_j(s)$ respectivement, peuvent n'être pas les mêmes; mais si a et b vérifient (15) et (15'), ces deux constantes seront majorées en fonction de d, α, β, $\mathrm{Max}[\Psi'(l)]$ et p. Ajoutons qu'en général, les $L'_j(s)$ ne seront pas croissantes et ne vérifieront pas les conditions aux limites $L'_j(s_j)=L'_{j+1}(s_j)$ [30]. Enfin, on peut étendre ces conclusions à tout intervalle borné de l'axe réel s.

19. Faisons ici une remarque à titre de parenthèse. Au cours du paragraphe 17, nous avons constaté que toute solution éventuelle $l(s)$ de (14) possédait une dérivée qui, dans le voisinage de $s=s_j$, se comporte comme $F(s)|s-s_j|^{1-2\alpha_j}$, où $F(s)$ désigne une fonction continue au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ dans le voisinage considéré de $s=s_j$. Il suit de là que si $1-2\alpha_j>0$ [d'après (11), cela veut dire qu'au point P_j correspondant, image de $Z_j=e^{is_j}$, $\widehat{BC}$ tourne sa pointe du côté des x négatifs, ou encore, en langage hydrodynamique, que $\widehat{BC}$ y présente un angle saillant au liquide en mouvement], $\frac{dl}{ds}$ existe et est continue $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ au point $s=s_j$. S'il en est de même de tous les points anguleux P_j, c'est-à-dire si $\widehat{BC}$ tourne sa convexité du côté des x négatifs, toutes les inconnues $l_j(s)[j=1, 2, \ldots, (n+1)]$ du système (14) posséderont des dérivées $\frac{dl_j(s)}{ds}$ continues au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ sur leurs intervalles de définition, extrémités comprises. Dans ce cas, la démonstration du théorème d'existence se simplifie et ne diffère pas essentiellement de celle que j'ai donnée dans ma Thèse dans le cas des arcs $\widehat{BC}$ à tangente continue. Mais nous avons déjà fait remarquer que toute solution éventuelle du problème du sillage, posé pour un squelette semblable, serait inacceptable physiquement.

20. Il nous reste à étudier les $(n+2)$ dernières équations (14). Ici encore, les seconds membres se présentent sous forme de fonctionnelles compliquées

---

[30] C'est ici qu'apparaît nettement l'avantage qu'il y a à substituer à l'inconnue $l(s)$ les $(n+1)$ inconnues $l_j(s)$. Moyennant cette substitution, il devient possible (*Cf.* les paragraphes 21 et 22) de munir l'ensemble $\mathcal{E}$, introduit au paragraphe 20, de toutes les propriétés topologiques utiles pour définir la transformation $\mathcal{F}(x)$ sur des hypersphères convenables de $\mathcal{E}$.

des données $\Psi(l)$, l_1, l_2, ..., l_n, d_1, d_2, α, β et des inconnues $l_j(s)$, s_j, a et b. Reprenons l'élément $x = x[L_j(s), s_j, a, b]$, envisagé déjà au paragraphe 18; rappelons qu'à présent les paramètres s_j ne sont pas les fonctions croissantes de leurs indices. Portons les $L_j(s)$ et les s_j ainsi définis dans les fonctionnelles qui figurent dans les seconds membres des n dernières équations (14). D'après ce qu'on a vu aux paragraphes 17 et 18, les expressions telles que

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-\Psi(e^{is})} \, df(e^{is})$$

sont supérieurement bornées en fonction des majorantes de α, β, $\operatorname{Max}\Psi'(l)$ et de la minorante d de d_1 et d_2; il s'ensuit que les premiers membres des équations considérées, différents, en général des s_j et dont les valeurs peuvent être étrangères à l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$, sont nécessairement bornés, en valeur absolue, par des fonctionnelles convenables des mêmes éléments que ci-dessus.

D'un autre côté, les raisonnements de J. K., § 27, pp. 163 et les suivantes, s'appliquent intégralement. Il s'ensuit que les quantités positives

$$\int_{-1}^{-\eta} \sin \Omega(X, o) \, df(X, o) \quad \text{et} \quad \int_{\eta}^{1} \sin \Omega(X, o) \, df(X, o)$$

sont minorées par un nombre positif, non nul, dépendant des minorantes de d_1 et d_2 d'une part et de la minorante de la mesure de l'ensemble sur lequel $\Psi'(s) = \Psi[L(s)]$ est supérieure à $\varepsilon > 0$. Donc les seconds membres des équations $n+2$ et $n+3$ de (14) sont bornés supérieurement.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE L'ENSEMBLE $\mathcal{E}$. THÉORÈME D'EXISTENCE.

21. Nous sommes maintenant en mesure de préciser les propriétés topologiques de l'ensemble abstrait $\mathcal{E}[l_1(s), l_2(s), \ldots, l_{n+1}(s), a, b, s_1, \ldots, s_n]$ que nous avons introduit au paragraphe 10. Il sera commode, en premier lieu, d'assigner aux inconnues $l_j(s)$ un intervalle commun de définition. Nous écrirons donc désormais

$$l_1(s) = l(s) \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq s_1; \qquad l_1(s) = l_1(s_1) \quad \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi;$$
$$l_j(s) = l(s) \quad \text{pour } s_{j-1} \leq s \leq s_j; \qquad l_j(s) = l_j(s_{j-1}) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_{j-1};$$
$$l_j(s) = l_j(s_j) \quad \text{pour } s_j \leq s \leq \pi \qquad (j = 2, 3, \ldots, n);$$
$$l_{n+1}(s) = l(s) \quad \text{pour } s_n \leq s \leq \pi; \qquad l_{n+1}(s) = l_{n+1}(s_n) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_n.$$

D'après ce qui précède, toutes les fonctions $l_j(s)[j = 1, 2, \ldots, (n+1)]$ vérifient une condition (20) dans l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$; elles possèdent donc

sur leur intervalle commun de définition une égale continuité. Considérons alors l'ensemble $E[L(s), o, \pi]$ de toutes les fonctions assujetties à satisfaire aux conditions suivantes :

1° elles sont définies pour $o \leq s \leq \pi$;

2° chacune d'elles vérifie sur son intervalle de définition la condition de Hölder telle que (20) ([31]).

Nous appellerons *norme* d'un élément de $E[L(s), o, \pi]$ la grandeur $\| L(s) \|$ définie par

$$\| L(s) \| = \text{maximum de } | L(s) | + C, \tag{21}$$

où C désigne la constante de la condition de Hölder vérifiée par $L(s)$. Soient, d'autre part, m et m_1 deux nombres réels quelconques. Il est clair que la combinaison linéaire $mL(s) + m_1 L_1(s)$ des deux éléments $L(s)$ et $L_1(s)$ de $E[L(s), o, \pi]$ est encore un élément de l'ensemble. Il résulte de ce qui précède que $E[L(s), o, \pi]$ peut être considéré comme un espace fonctionnel linéaire, normé et complet ([32]).

Cela étant, observons que les $(n+1)$ inconnues $l_j(s)$ sont des éléments particuliers de $E[L(s), o, \pi]$; on peut, dès lors, regarder l'ensemble $\mathcal{E}$ comme le produit de $\{E[L(s), o, \pi]\}^{n+1}$ par l'espace euclidien dont un point aurait pour coordonnées les nombres $\frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, s_1, s_2, \ldots, s_n$. Soient alors

$$\begin{aligned} x &= x\left[L_1(s), L_2(s), \ldots, L_{n+1}(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}, s_1, \ldots, s_n\right] \\ &= x_j\left[L_j(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}, s_j\right], \\ x^* &= x^*\left[L_1^*(s), L_2^*(s), \ldots, L_{n+1}^*(s), \frac{1}{a^*+1}, \frac{1}{b^*-1}, s_1^*, \ldots, s_n^*\right] \\ &= x^*\left[L_j^*(s), \frac{1}{a^*+1}, \frac{1}{b^*-1}, s_j^*\right] \end{aligned}$$

([31]) Il est essentiel de noter que les fonctions $L(s)$ ne sont pas nécessairement croissantes, à l'encontre des solutions $l_j(s)$ du système (14). D'ailleurs, nous serons obligés de regarder l'ensemble $\mathcal{E}$, introduit au paragraphe 10 et sur lequel opère la transformation (14') comme un espace abstrait linéaire. Cela veut dire que toute combinaison linéaire à coefficients constants des éléments de cet espace doit être encore un élément de cet espace. Or, une combinaison linéaire de fonctions croissantes n'est pas toujours une fonction croissante.

([32]) Pour ces notions on pourra se reporter à J. K., paragraphe 28; spécialement les pp. 201-207. On y trouvera un rapide résumé de la théorie de MM. Leray et Schauder [*Cf.*, *Loc. cit.* ([10])] dont nous aurons à faire usage ainsi que de brèves indications sur certaines notions de Topologie, utilisées au cours des paragraphes qui suivent. Pour plus de détail, *cf.* N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I.

Aucune confusion n'est à craindre entre la lettre x désignant l'abscisse du plan $z = x + iy$ et l'élément x de l'espace fonctionnel défini dans le texte.

deux éléments quelconques de $\mathcal{E}$, m et m^* deux nombres réels quelconques; il est clair que l'élément

$$mx + m^* x^* = \left[\begin{array}{c} m\,\mathrm{L}_1(s) + m^*\,\mathrm{L}_1^*(s), \ \ldots, \ m\,\mathrm{L}_{n+1}(s) + m^*\,\mathrm{L}_{n+1}^*(s), \\ \dfrac{m}{a+1} + \dfrac{m^*}{a^*+1}, \ \dfrac{m}{b-1} + \dfrac{m^*}{b^*-1}, \ ms_1 + m^* s_1^*, \ \ldots, \ ms_n + m^* s_n^* \end{array} \right]$$

appartient encore à $\mathcal{E}$, ce qui prouve que $\mathcal{E}$ est un ensemble linéaire. Nous appellerons, pareillement, norme $\|x\|$ d'un élément x de $\mathcal{E}$, le nombre positif défini par

$$|\!|\, x \,|\!| = \|\mathrm{L}_1(s)\| + \ldots + \|\mathrm{L}_{n+1}(s)\| + \left|\frac{1}{a+1}\right| + \left|\frac{1}{b-1}\right| + |s_1| + |s_2| + \ldots + |s_n|,$$

où les symboles $\|\mathrm{L}_j(s)\|$ désignent les normes des $\mathrm{L}_j(s)$ sur l'ensemble $\mathrm{E}[\mathrm{L}(s),\ 0,\ \pi]$. Moyennant ces conventions, l'ensemble $\mathcal{E}$ peut être encore considéré comme un espace fonctionnel, linéaire, normé, complet.

22. Or, au paragraphe 18, nous avons défini la transformation $\mathcal{F}(x)$ en chaque point

$$x = x[\mathrm{L}_j(s),\ s_j,\ a,\ b]$$

de l'espace $\mathcal{E}$. La correspondance fonctionnelle $x' = \mathcal{F}(x)$ opère donc sur un espace linéaire, normé, complet. Il reste à étudier le produit x' de cette transformation de $\mathcal{E}$.

En premier lieu, observons que toute solution éventuelle x de l'équation (14), relative à une configuration $\mathcal{C}$ satisfaisant aux hypothèses (H) (*cf.* § 14) appartient à l'hypersphère de $\mathcal{E}$ définie par

$$(22)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left|\dfrac{1}{a+1}\right| \leq \mathrm{K}(d), \qquad \left|\dfrac{1}{b-1}\right| \leq \mathrm{K}(d), \\ |\,\mathrm{L}_j(s)\,| \leq \text{const.} \quad [j = 1,\ 2,\ \ldots,\ (n+1)]; \qquad |s_j| \leq \pi \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit encore

$$(22')\qquad \|x\| \leq n\pi + (n+1)\,\text{const.} + 2\,\mathrm{K}(d).$$

Les deux premières inégalités (22) résultent, en effet, de (15'). Ensuite, chaque inconnue $l_j(s)$ est telle que $\alpha \leq |l_j(s)| \leq \beta$, $0 \leq s \leq \pi$; elle satisfait, d'autre part à l'inégalité (20); (21) montre alors que $\|l_j(s)\|$ est majorée par une constante qui demeure bornée tant que le sont les quantités α, β, $\mathrm{Max}\,|\Psi'(l)|$ et tant que $d > 0$, $d \neq 0$. Enfin, les n dernières inégalités (22) résultent de (14a). Les résultats des paragraphes 18 et 20 prouvent alors qu'à tout élément x de l'hypersphère (22) de $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}(x)$ fait correspondre un élément x' du même espace $\mathcal{E}$, intérieur à l'hypersphère

$$\|x\| \leq \text{const.},$$

dont le rayon est encore une fonctionnelle de α, β, $\mathrm{Max}|\Psi'(l)|$ et $\frac{1}{d}$, bornée supérieurement en fonction des majorantes de ces quantités. Cela montre aussi que tout ensemble borné de l'espace $\mathfrak{E}$ est transformé par $\mathfrak{F}(x)$ en un ensemble borné du même espace; ce dernier ensemble, d'ailleurs, est compact en vertu du théorème d'Arzela, puisque ses éléments sont constitués par des paramètres numériques et par des fonctions également continues. Il en résulte que la correspondance $x' = \mathfrak{F}(x)$ sera complètement continue, au sens de Riesz, si nous prouvons, de plus, que $\mathfrak{F}(x)$ est continue en norme, par rapport à son argument x à l'intérieur de l'hypersphère (22). Cela veut dire que x et x' étant deux éléments de (22) et ε un nombre positif aussi petit qu'on le veut, l'inégalité

$$\| x - x' \| \leq \varepsilon$$

entraîne

$$\| \mathfrak{F}(x) - \mathfrak{F}(x') \| \leq \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon)$ est un nombre positif, décroissant avec ε, tendant vers zéro avec ε.

23. Voici une vérification rapide de cette propriété (33). Posons

$$(23)\quad \begin{cases} x = x\left[\mathrm{L}_j(s),\ \frac{1}{a+1},\ \frac{1}{b-1},\ s_j\right], \\ x' = x'\left[\mathrm{L}_j(s) + \delta\,\mathrm{L}_j(s),\ \frac{1}{a+1} + \delta\left(\frac{1}{a+1}\right),\ \frac{1}{b-1} + \delta\left(\frac{1}{b-1}\right),\ s_j + \delta s_j\right] \end{cases}$$

et supposons que

$$(23')\qquad \| x - x' \| = \sum_{j=1}^{n+1} \| \delta\,\mathrm{L}_j(s) \| + \sum_{j=1}^{n} |\delta s_j| + \frac{|\delta a|}{|a+1|^2} + \frac{|\delta b|}{|b-1|^2} < \varepsilon.$$

La fonction $\frac{df(e^{is})}{ds}$ est une fonction de a et de b holomorphe dans l'hypersphère (22) (*cf.* J. K., pp. 247-253); il en est de même de $\Omega(Z)$, envisagée comme fonction des mêmes paramètres. Par suite, les variations des seconds membres de (14), provenant des variations subies par a et b, peuvent, d'après (23'), être majorés par une expression de la forme const. ε, où la constante est bornée en fonction de α, β, $\frac{1}{d}$, $\mathrm{Max}|\Psi'(l)|$.

D'un autre côté, $\Psi(l)$ vérifie sur chacun des arcs $\widehat{\mathrm{BP}}$, $\widehat{\mathrm{P_1P_2}}$, ..., $\widehat{\mathrm{P_nC}}$ de $\widehat{\mathrm{BC}}$ une condition de Lipschitz [*cf.* (16)]; on a donc, si $\mathrm{L}_j(s)$ et $\mathrm{L}_j(s) + \delta\mathrm{L}_j(s)$ sont deux fonctions voisines en norme

$$(24)\qquad \begin{aligned} |\delta\,\Psi[\mathrm{L}_j(s)]| &= |\Psi[\mathrm{L}_j(s) + \delta\,\mathrm{L}_j(s)] - \Psi[\mathrm{L}_j(s)]| \\ &\leq \max|\Psi'(l)| \cdot |\delta\,\mathrm{L}_j(s)| \leq \max|\Psi'(l)|\,\varepsilon. \end{aligned}$$

(33) Le lecteur trouvera de plus amples détails dans un travail de M. R. Huron au cours duquel sera effectuée la différentiation, au sens de M. Fréchet, de la fonctionnelle $\mathfrak{F}(x)$ de (14'). Toutefois, cette différentiation n'est légitime que si $\Psi'(l)$ est continue pour $\alpha \leq l \leq l_1$, $l_1 \leq l \leq l_2$, ..., $l_n \leq l \leq \beta$ et si, de plus, tous les nombres $2\alpha_j - 1$ sont positifs.

où les expressions $\Psi[L_j(s)]$ ont été définies au paragraphe 18; l'inégalité précédente fournit donc une majorante pour $|\delta\Psi[L_j(s)]|$ en un point s fixe. Pour préciser, utilisons l'hypothèse (H_5) (*cf.* § 14) et supposons même que $\Psi'(l)$ soit continue au sens de Hölder sur chacun des intervalles où $\Psi(l)$ est continue. Dans ce cas, la partie principale de $\delta\Psi[L_j(s)]$ s'écrit $\Psi'[L_j(s)]\delta L_j(s)$ et nous avons, en désignant par μ l'exposant de l'inégalité de Hölder qui vérifie $\Psi'(l)$ [34]

$$
\begin{aligned}
(25)\quad & |\delta\Psi[L_j(s)]-\delta\Psi[L_j(s')]| \\
&= \left|\left\{\Psi'[L_j(s)]-\Psi'[L_j(s')]\right\}\delta L_j(s)+\Psi'[L_j(s')][\delta L_j(s)-\delta L_j(s')]\right| \\
&\leq |\delta L_j(s)|\,\text{const.}\,|L_j(s)-L_j(s')|^{\mu}+\max|\Psi'(l)|.|\delta L_j(s)-\delta L_j(s')| \\
&\leq \text{const.}\,\varepsilon.|s-s'|^{\mu\nu} \qquad [j=1,2,\ldots,(n+1)],
\end{aligned}
$$

inégalité valable pour $s_{j-1}\leq s\leq s_j$, $s_{j-1}\leq s'\leq s_j$.

En réunissant (24) et (25) on voit que [*cf.* (20)]

$$\|\delta\Psi[L_j(s)]\|\leq \text{const.}\,\varepsilon^{\nu}.$$

Étudions maintenant $|\delta\Psi[L_j(s_j)]|$; $|\delta\Psi[L_j(s_{j-1})]$ se majore par un procédé identique à celui que nous allons indiquer]. Cette fois $L_j(s)$ varie en même temps que s_j et il vient [*cf.* (1.), (20) et (23')

$$
\begin{aligned}
(26)\quad |\delta\Psi[L_j(s_j)]| &= |\Psi[L_j(s_j+\delta s_j)+\delta L_j(s_j+\delta s_j)]-\Psi[L_j(s_j)]| \\
&= |\quad \Psi[L_j(s_j+\delta s_j)+\delta L_j(s_j+\delta s_j)] \\
&\quad -\Psi[L_j(s_j+\delta s_j)]+\Psi[L_j(s_j+\delta s_j)]-\Psi[L_j(s_j)]| \\
&\leq \max|\Psi'(l)|\,[|\delta L_j(s_j+\delta s_j)|+\text{const.}|\delta s_j|^{\nu}]\leq \text{const.}\,\varepsilon^{\nu}.
\end{aligned}
$$

Comme de (11), on tire

$$2\,\delta\alpha_j=\frac{1}{\pi}\left\{\delta\Psi[L_{j+1}(s_j)]-\delta[L_j(s_j)]\right\}$$

l'inégalité précédente donne [35]

$$(27)\qquad |\delta\alpha_j|\leq \text{const.}\,\varepsilon^{\nu}.$$

Cela étant, on tire de (7') (*cf.* § 18)

$$
\begin{aligned}
\pi\,\delta s_0 &= \int_0^{s_1}\delta\Psi[L_1(s)]\,ds+\sum_{j=2}^{n}\int_{s_{j-1}}^{s_j}\delta\Psi[L_j(s)]\,ds+\int_{s_n}^{\pi}\delta\Psi[L_{n+1}(s)]\,ds \\
&\quad +\sum_{1}^{n}\left\{\Psi[L_{j+1}(s_j)]-\Psi[L_j(s_j)]\right\}\delta s_j.
\end{aligned}
$$

---

[34] Dans tout le cours de ce paragraphe, le symbole const. désignera une fonction bornée des quantités : $\text{Max}\,|\Psi'(l)|$, α, β, $\frac{1}{l}$.

[35] Signalons, toutefois, que les quantités $\delta\alpha_j$ sont assujetties à être compatibles avec (2) et (11').

On déduit de là, eu égard à (25) et à (26),

$$|\,\delta s_0\,| \leq \text{const. } \varepsilon^{\nu}$$

et, par suite,

$$\left|\frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\vartheta\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0)\right]}{\vartheta\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)\right]}\frac{df(e^{is})}{ds}\right\}\delta s_0\right| \leq \text{const. } \varepsilon^{\nu}. \tag{28}$$

24. Introduisons alors la fonction $L(s)$ définie par les relations (*)

$$\begin{aligned} &L(s) = L_1(s) && \text{pour } 0 \leq s \leq s_1,\\ &L(s) = L_j(s) && \text{pour } s_j \leq s \leq s_{j+1} \quad [j = 1, 2, \ldots, (n-1)],\\ &L(s) = L_{n+1}(s) && \text{pour } s_n \leq s \leq \pi. \end{aligned}$$

D'après cela, $L(s)$ ne sera pas, en général continue pour $s = s_j$, $j = 1, 2, \ldots (n-1)$; de plus, les paramètres s_j, n'étant pas, en général, des fonctions croissantes de leurs indices, $L(s)$ peut, en général, prendre plus d'une valeur en un point s, $0 \leq s \leq \pi$. Moyennant cette convention d'écriture, nous pouvons définir $\delta\Psi[L(s)]$ pour $0 \leq s \leq \pi$; (19_1) donne alors

$$\delta\mathcal{R}\,H(e^{is}) = \delta\,\Psi[L(s)] + \sum_{1}^{n}[(2\alpha_j - 1)\,\delta s_j + 2(s_j - \pi)\,\delta\alpha_j - 2\,\Delta(s)\,\pi\,\delta\alpha_j],$$

où le symbole $\Delta(s)$ désigne un nombre égal à zéro pour $s_j \geq s$, à l'unité pour $s < s_j$. Eu égard à (24), (25), (26) et (27), il en résulte

$$|\,\delta\mathcal{R}\,H(e^{is})\,| \leq \text{const. } \varepsilon^{\nu}$$

et

$$|\,\delta\mathcal{R}\,H(e^{is'})\,| - \delta\mathcal{R}\,H(e^{is})\,| \leq \text{const. } \varepsilon^{\nu}\,|\,s - s'\,|^{\mu\nu},$$

donc

$$|\,|\,\delta\mathcal{R}\,H(e^{is})\,|\,| \leq \text{const. } \varepsilon^{\nu}.$$

Mais $\delta\mathcal{R}\,H(q\,e^{is})$ est analytique et borné; $\delta\mathcal{I}\,H(X, 0)$ est analytique et borné par const. ε pour $q \leq X < 1$; enfin les termes additifs de $\delta H(Z)$ (en un point Z fixe) qui proviennent des variations subies par $\frac{1}{a+1}$ et $\frac{1}{b-1}$ sont majorés, comme on l'a vu en valeur absolue, par const. ε. Le théorème de Fatou-Priwaloff permet alors de déduire des inégalités précédentes

$$|\,\delta\,H(e^{is})\,| \leq \text{const. } \varepsilon^{\nu}, \qquad |\,\delta\,H(e^{is}) - \delta\,H(e^{is'})\,| \leq \text{const. } \varepsilon^{\nu}\,|\,s - s'\,|^{\mu\nu}. \tag{29}$$

(*) On écrira $s_{j+1} \leq s \leq s_j$ dans les équations de définition du texte si $s_j > s_{j+1}$.

Or, en comparant (7), (14) et (19″), on voit que

$$(30)\qquad \left|\delta\int_0^s e^{-\mathrm{T}_1(e^{is})}\,df\right|$$

$$=\left|\delta\int_0^s e^{i\mathrm{H}(e^{is})}\cdot\left|\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{e^{is}-e^{-is_j}}{e^{is}-e^{is_j}}\right|^{2\alpha_j-1}\frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)\right]}\frac{df(e^{is})}{ds}\,ds\right|\right.$$

$$\leq\int_0^s\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{e^{is}-e^{-is_j}}{e^{is}-e^{is_j}}\right|^{2\alpha_j-1}\left\{\left|\delta e^{i\mathrm{H}(e^{is})}\frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)\right]}\frac{df(e^{is})}{ds}\right|ds\right.$$

$$\left.-\int_0^s\left|e^{i\mathrm{H}(e^{is})}\frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)\right]}\frac{df(e^{is})}{ds}\right|\left|\delta\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{e^{is}-e^{-is_j}}{e^{is}-e^{is_j}}\right|^{2\alpha_j-1}\right|ds.\right.$$

Dès lors, les raisonnements du paragraphe 17 s'appliquent à l'intégrale du premier terme du troisième membre que nous appellerons $\mathrm{I}(s)$; on conclut de là, eu égard à (28) et à (29), que

$$\mathrm{I}(s)\leq\text{const.}\,\varepsilon^{\nu},\qquad|\mathrm{I}(s)-\mathrm{I}(s')\leq\text{const.}\,\varepsilon^{\nu}|s-s'|^{\nu},$$

avec $0\leq s\leq s_1$, $0\leq s'\leq s_1$; l'extension aux autres intervalles est immédiate. Il reste à étudier la seconde intégrale de (30) que nous appellerons $\mathrm{I}_1(s)$.

Le facteur

$$\mathrm{F}_1(s)=\left|e^{i\mathrm{H}(e^{is})}\frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)\right]}\frac{df(e^{is})}{ds}\right|$$

de son élément différentiel est, d'après ce que nous avons vu au paragraphe 17, une fonction de s bornée, assujettie à vérifier une condition (20), tant que $x|\mathrm{L}_j(s), s_j, a, b|$ demeure intérieur à l'hypersphère (22), c'est-à-dire tant que les quantités $\mathrm{Max}|\Psi'(l)|$, α, β, $\frac{1}{d}$ sont bornées. $\mathrm{I}_1(s)$ se présentera donc sous forme de somme d'expressions dont les unes proviendront des variations des α_j et les autres des variations des s_j dans le produit

$$\prod_1^n|e^{is}-e^{-is_j}|^{2\alpha_j-1}|e^{is}-e^{is_j}|^{1-2\alpha_j}.$$

La contribution à $|\mathrm{I}_1(s)$ de la première série de termes est, par suite, inférieure à

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^{s}\mathrm{F}_1(s)\left\{\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{e^{is}-e^{-is_j}}{e^{is}-e^{is_j}}\right|^{2\alpha_j-1}\right\}\left|\log\frac{e^{is}-e^{-is_k}}{e^{is}-e^{is_k}}\right|2|\delta\alpha_k|\qquad(0\leq s\leq s_1).$$

Cela montre que pour $s = s_k$ le noyau des intégrales précédentes se comporte comme

$$F_2(s)\,|s - s_k|^{1-2\alpha_k}\,|\log(s - s_k)|,$$

où $F_2(s)$ désigne encore une fonction bornée, assujettie à vérifier une condition (20) dans le voisinage de s_k : il s'ensuit, eu égard aux inégalités $2(1-\alpha_j) > \nu$, $j = 1, 2, \ldots n$ [36]

$$|F_2(s)|\,|s - s_k|^{1-2\alpha_k}\log|s - s_k| \leq \frac{\text{const.}}{|s - s_k|^{1-\nu}}.$$

On conclut de là, comme au paragraphe 17, que la portion considérée de $I_1(s)$ a un sens, que sa valeur absolue est majorée par une expression telle que const. ε^ν [*cf.* (27)] et qu'enfin, elle vérifie une condition de Hölder d'exposant ν dont la constante est de la forme const. ε^ν, et cela dans tout l'intervalle $0 \leq s \leq s_1$. Il est clair que les considérations qui précèdent s'appliquent non seulement aux intégrales (30) prises entre les limites 0, s ($0 \leq s \leq s_1$), mais aussi aux intégrales analogues, prises entre les limites s_j, s, l'argument s étant intérieur à l'intervalle (s_j, s_{j-1}) (mais on n'a pas nécessairement $s_j < s_{j-1}$ ou $s_n \leq \pi$). Mais pour étendre à ces nouvelles expressions les conclusions que nous pouvions tirer de l'étude des termes de $I_1(s)$ provenant des variations δs_j, il faut tenir compte des variations que peut subir l'intervalle (s_j, s_{j-1}) : nous sommes ainsi conduits à étudier l'effet des variations des s_j, les autres éléments de x restant fixes, sur les intégrales de la forme :

$$J(s) = \int_s^s e^{-\tau_1 e^{i\sigma}}\,df(e^{i\sigma}) = \int_{s_j}^{s} F(\sigma)\,|\sigma - s_j|^{1-2\alpha_j}\,d\sigma,$$

où $F(\sigma)$ désigne une fonction positive, bornée et hölderienne pour

$$s_j - \frac{\gamma}{2} \leq s \leq s_j + \frac{\gamma}{2},$$

déjà introduite au paragraphe 17. Cette fois, on ne peut pas appliquer, pour former $\delta J(s)$, la formule de différentiation sous le signe $\int$, puisque les expressions qu'on obtiendrait ainsi n'auraient aucun sens pour $\frac{1}{2} < \alpha_j < 1$. Mais nous avons, en négligeant les termes additifs provenant de $\delta F(\sigma)$ dont nous avons fait déjà l'étude, et en supposant toujours $2\alpha_j - 1 > 0$

$$|\delta J(s)| \leq \left| \int_{s_j}^{s} F(\sigma) \left[\frac{1}{|\sigma - s_j - \delta s_j|^{2\alpha_j - 1}} - \frac{1}{|\sigma - s_j|^{2\alpha_j - 1}} \right] d\sigma \right|$$
$$+ \max|F(\sigma)| \left| \int_{s_j}^{s_j - \delta s_j} \frac{d\sigma}{|\sigma - s_j|^{2\alpha_j - 1}} \right|,$$
$$\left(|s - s_j| \leq \frac{\gamma}{2} \right).$$

[36] C'est ici qu'apparaît l'intérêt de choisir pour ν non pas le plus petit des nombres $2(1-\alpha_j)$ mais un nombre positif inférieur au plus petit de ces paramètres. Il va de soi également que les raisonnements du texte n'intéressent que le cas des $1 - 2\alpha_j$ négatifs.

Au paragraphe 17 nous avons déjà construit une majorante de $\mathrm{Max}\,|F(\sigma)|$ pour $|\sigma - s_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; d'un autre côté, la deuxième intégrale du second membre vaut

$$\frac{1}{2(1-\alpha_j)}\,|\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)} \leq \text{const.}\,|\delta s_j|^{\nu};$$

pour des valeurs de δs_j suffisamment petites, on a d'ailleurs

$$|\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)} < |\delta s_j|^{\nu} \leq |\varepsilon|^{\nu}.$$

Pour étudier la première intégrale, supposons d'abord que $s > s_j$, $\delta s_j < 0$; dans ce cas, l'expression en cause est majorée, en valeur absolue par

$$\max|F(\sigma)|\int_{s_j}^{s}\left[\frac{1}{(\sigma-s_j)^{2\alpha_j-1}}-\frac{1}{(\sigma-s_j-\delta s_j)^{2\alpha_j-1}}\right]d\sigma$$

$$\leq \max|F(\sigma)|\left[\frac{|(s-s_j)^{2(1-\alpha_j)}-(s-s_j-\delta s_j)^{2(1-\alpha_j)}|}{2(1-\alpha_j)}+\frac{|\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)}}{2(1-\alpha_j)}\right].$$

Une discussion élémentaire montre, d'ailleurs, que le premier terme du second membre est majoré par une expression de la forme const. $|\delta s_j|^{\nu}$; de l'ensemble des résultats qui précèdent on déduit

$$|\delta J(s)| \leq \text{const.}\,\varepsilon^{\nu}.$$

L'extension au cas où $\delta s_j > 0$ est immédiate; on écrira

$$\int_{s_j} = \int_{s_j}^{s_j+\delta s_j} + \int_{s_j+\delta s_j}^{s}.$$

Or, la première intégrale est visiblement de l'ordre de $|\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)}$, alors que la deuxième relève du calcul ci-dessus. Des raisonnements tout semblables montreraient que

$$|\delta J(s) - \delta J(s')| \leq \text{const.}\,\varepsilon^{\nu}|s-s'|^{\nu}.$$

Les deux dernières égalités prouvent donc bien que $\delta J(s)$ est un élément de l'ensemble $E[L(s), s_j, s_{j-1}]$ considéré au paragraphe 21, tel que

$$\|\delta J(s)\| \leq \text{const.}\,\varepsilon^{\nu},$$

cette inégalité étant valable pour $s = s_j$ ou $s = s_{j-1}$. En langage de l'analyse fonctionnelle, on peut résumer comme il suit les résultats de la discussion des deux derniers paragraphes (*cf.* le paragraphe 22) :

La transformation fonctionnelle $\mathfrak{F}(x)$ est complètement continue dans l'hypersphère (22) de l'espace & sur lequel elle opère.

25. Introduisons alors une configuration auxiliaire $\mathcal{C}(k)$ dépendant du paramètre réel k ($0 \leq k \leq 1$) et définie au moyen des éléments $\Psi^*(l)$ d_1^*, d_2^*, α^*, β^*, l_j^* ($j = 1, 2, \ldots, n$) tels que

$$(31) \qquad \begin{cases} \Psi^*(l) = k\Psi(l) + (1-k)\dfrac{\pi}{2}, & l_j^* = l_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \\ d_1^* = \dfrac{d_1}{k}, \qquad d_2^* = \dfrac{d_2}{k}; & \alpha^* = \alpha, \qquad \beta^* = \beta. \end{cases}$$

Il est clair que $\mathcal{C}(1) = \mathcal{C}$; si k tend vers zéro, les bords rectilignes μ_1 et μ_2 s'éloignent à l'infini alors que l'arc $\overset{\frown}{BC}$ se déforme de manière à se réduire, à la limite, au segment de droite du plan z dont l'équation serait :

$$x = 0, \qquad -\frac{\beta - \alpha}{2} \leq y \leq \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Enfin, on voit que $\mathcal{C}(k)$ vérifie toutes les hypothèses (H) du paragraphe 14 et cela quel que soit k, $0 \leq k \leq 1$. Il en résulte que toute solution éventuelle x^* du problème du sillage, posé pour $\mathcal{C}(k)$, $0 \leq k \leq 1$ vérifie les conclusions du paragraphe 22 et satisfait, en particulier, aux inégalités (22); toutes les quantités α^*, β^*, $\operatorname{Max}|\Psi^*(l)|$, $\frac{1}{d_\star}$, $\frac{1}{d_\star^2}$ sont, en effet, bornées supérieurement en vertu de (31) ([37]).

26. Cela étant, l'élément x^* de l'espace $\mathfrak{E}$ sera solution du problème du sillage posé relativement à $\mathcal{C}(k)$ si [*cf.* les écritures développées (14′) ainsi que la définition (31) de $\mathcal{C}(k)$]

$$(32) \qquad x = \mathcal{F}[x, \Psi^*(l), \alpha^*, \beta^*, d_1^*, d_2^*, l_1^*, l_2^*, \ldots, l_n^*] = \mathcal{F}(x, k),$$

en notant $\mathcal{F}(x, k)$, pour abréger, le second membre de cette équation. On a alors le théorème suivant :

La transformation $\mathcal{F}(x, k)$ opérant sur l'hypersphère (22) *de l'espace* $\mathfrak{E}$ *est complètement continue quel que soit* k, $0 \leq k \leq 1$.

Cela résulte de ce que (*cf.* le paragraphe 25) toutes les conclusions du paragraphe 22 (donc des paragraphes 23 et 24) s'appliquent à (32). De plus

La transformation $\mathcal{F}(x, k)$ est uniformément continue par rapport à k sur l'intervalle $0 \leq k \leq 1$ lorsque x appartient au domaine (22).

D'une manière précise, cela veut dire qu'à tout nombre positif ε aussi petit qu'on le veut, on peut faire correspondre un nombre positif $\eta_1(\varepsilon)$ assez petit pour que l'inégalité

$$\delta k = k - k' \leq \eta_1(\varepsilon),$$

([37]) Plus généralement, nous affecterons d'un astérisque les éléments relatifs à $\mathcal{C}(k)$.

où k et k' désignent deux valeurs de l'intervalle $0 \leq k \leq 1$, entraine

$$\| \delta \mathcal{F}(x, k) \| = \| \mathcal{F}(x, k) - \mathcal{F}(x, k') \| \leq \varepsilon.$$

Appelons $\delta\Psi^*$, δd_1^*, etc., les variations correspondantes des éléments (31), etc. Comme l'élément x reste fixe, les paramètres $(2\alpha_j^* - 1)$ définis par (11) relativement à $\Psi^*(l)$ subissent des variations $(2\alpha_j - 1)\delta k$, $j = 1, 2, \ldots, n$; les calculs du paragraphe 24 montrent alors que la contribution à $\delta\mathcal{F}(x, k)$, provenant des variations des $(2\alpha_j^* - 1)$, est majorée en norme par une expression de la forme const. $|\delta k|^\nu$. D'un autre côté, les relations (19_1) et (31) montrent que $\delta\mathcal{R}\mathrm{H}^*(e^{is}) \leq$ const. $|\delta k|$; de plus, $\delta\mathcal{R}\mathrm{H}^*(e^{is})$ vérifie pour $0 \leq s \leq \pi$ une condition de Hölder d'exposant ν, au moins, dont la constante contient en facteur $|\delta k|$; en reprenant les raisonnements du paragraphe 24, on en déduira, eu égard à (21) (*)

$$\| \delta \mathrm{H}^*(\mathrm{Z}) \| \leq \text{const.} \, |\delta k| \qquad \text{pour } q \leq \mathrm{Z} \leq 1.$$

Comme, d'un autre côté [*cf.* (7') et (31)],

$$\delta s_0^* = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Psi[\mathrm{L}(s)] \, ds - \frac{\pi}{2} \right] \delta k,$$

on a [*cf.* (2)]

$$|\delta s_0| \leq \frac{3}{2} \pi \, |\delta k|.$$

Ces deux derniers faits entraînent [*cf.* (4') et (5) et, pour plus de détail, J. K., 23, pp. 173-174]

$$\left| \frac{\delta\psi_1}{\psi_1^2} \right| \leq \text{const.} \, |\delta k|, \qquad \left| \frac{\delta\psi_2}{\psi_2^2} \right| \leq \text{const.} \, |\delta k|$$

et, par voie de conséquence,

$$|\delta f^*(\mathrm{Z})| \leq \text{const.} \, |\delta k|,$$

puisque $f^*(\mathrm{Z})$ ne dépend de k que par l'intermédiaire de s_0, de ψ_1 et de ψ_2, donc de $\Psi^*(l)$. Enfin, on tire de (31)

$$\left| \delta \frac{1}{d_j^*} \right| = \left| \frac{\delta k}{d_j} \right| \leq \frac{1}{d} \, |\delta k| \qquad (j = 1, 2).$$

Eu égard à (7) et à (14), il résulte de l'ensemble des résultats qui précèdent

$$|\delta \mathcal{F}(x, k)| \leq \text{const.} \, |\delta k|^\nu \qquad (0 \leq k \leq 1),$$

ce qui démontre notre proposition.

(*) Ici encore, le symbole const. désigne au cours de ce paragraphe une fonction positive et bornée de α, β, d, Max $|\Psi'(l)|$.

27. A partir de cette étape, les raisonnements se développent comme dans ma Thèse. Je présenterai donc la démonstration d'existence proprement dite d'une manière condensée, en priant le lecteur de se reporter pour les détails à J. K., 28, pp. 201-211.

Notons, tout d'abord, que les deux théorèmes du paragraphe 26 montrent que la théorie de l'indice total de MM. Schauder et Leray s'appliquent à l'équation (31); nous pouvons donc énoncer :

Pour chaque valeur de k, $0 \leq k \leq 1$, *on peut définir l'indice topologique* $i(k) = d[x - \mathcal{F}(x, k), 0]$ *relativement à tout domaine borné de l'espace fonctionnel* $\mathcal{E}$.

Mais en vertu du théorème du paragraphe 25, à savoir que toute solution éventuelle de l'équation (32), $0 \leq k \leq 1$, est intérieure à une hypersphère bornée de $\mathcal{E}$, on peut affirmer

L'indice topologique $i(k)$ *est indépendant de* k.

Or pour $k = 1$, l'équation se réduit à l'équation (14') qui gouverne le problème du sillage posé relativement à la configuration $\mathcal{C}$. Pour $k = 0$, l'équation (32) se réduit à l'équation du problème de Helmholtz posé pour la configuration formée d'un segment de droite de longueur $(\beta - \alpha)$, parallèle à Oy, placé dans une bande de largeur infinie ($d_1 = d_2 = \infty$). Or, on sait que ce dernier problème possède une solution et une seule, en sorte que l'on a $i(0) = 1$.

D'après la propriété d'invariance du degré, rappelée ci-dessus, il s'ensuit

$$i(1) = i(0) = 1.$$

Cela montre que l'équation (14'), équivalente au système (14) dont les arguments $\Psi(l,)$ α, β, d_1 et d_2 satisfont aux conditions (H), possède au moins une solution; nous pouvons donc conclure :

Le problème de représentation conforme de Helmholtz (cas du sillage) posé relativement à la configuration $\mathcal{C}$ *satisfaisant à l'ensemble des hypothèses* (H), *énumérées au paragraphe* 14, *admet au moins une solution.* C. Q. F. D.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU PROBLÈME SYMÉTRIQUE.

28. Envisageons, à présent, le cas particulier d'un squelette $\mathcal{C}$ symétrique par rapport à la droite équidistante des droites μ_1 et μ_2. Nous appellerons, pour abréger, squelette symétrique toute configuration $\mathcal{C}$ jouissant de cette propriété.

Voici les nouvelles écritures que nous utiliserons pour traduire plus nettement cette hypothèse simplificatrice. Nous avons d'abord $d_1 = d_2$.

Nous prendrons pour axe Ox du plan $z = x + iy$ l'axe de symétrie de $\mathcal{C}$, pour origine O, le point d'intersection de $\widehat{BC}$ avec l'axe de symétrie de $\mathcal{C}$. Nous compterons les abscisses curvilignes sur $\widehat{OC}$ à partir de O, en sorte que la longueur commune des arcs $\widehat{OC}$ et $\widehat{BO}$ sera égale à $\frac{3-\alpha}{2}$. En résumé, la configuration $\mathcal{C}$ sera définie au moyen des données $\Psi(l)$, $\left[0 \leq l \leq \frac{3-\alpha}{2}\right]$, d_1. Nous appellerons encore n le nombre des points anguleux de $\widehat{BC}$, autres que O, sur $\widehat{OC}$; nous noterons $l_1, l_2, \ldots, l_n$ leurs abscisses curvilignes ([38]) d'après cela, le nombre des points anguleux de $\widehat{BC}$ sera $(2n+1)$ ou $2n$, suivant que le point O est ou n'est pas un point singulier de cet arc. De plus, les données caractéristiques de $\mathcal{C}$ seront assujetties à satisfaire à toutes les hypothèses (H) du paragraphe 14.

29. Il suit de là que le problème du sillage de Helmholtz, posé relativement à une telle configuration, possède au moins une solution. Mais nous allons faire voir que l'ensemble de ces solutions contient au moins une solution présentant la même symétrie que $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire symétrique par rapport à Ox) ([39]). A cet effet, modifions les notations des inconnues en connexion avec les écritures introduites au paragraphe 28. Par raison de symétrie, on devra avoir cette fois, *a priori*,

$$s_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad l\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = -l\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi\right).$$

Ces conditions sont compatibles avec l'équation $(7')$, eu égard à la relation

$$\Psi(l) + \Psi(-l) = \pi \qquad \left(0 \leq l \leq \frac{3-\alpha}{2}\right),$$

qui traduit l'hypothèse de symétrie de $\widehat{BC}$ par rapport à Ox. De plus, si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les n points anguleux de $\widehat{OC}$, distincts de O, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, les

---

([38]) Il résulte des propriétés de symétrie que O est un point anguleux de $\widehat{BC}$ toutes les fois que $\Psi(0) \neq \frac{\pi}{2}$.

([39]) Nous ignorons si l'ensemble des solutions en question se réduit à une solution unique. Dans un mémoire ultérieur M. Huron prouvera que, pour des formes particulières de $\widehat{BC}$, le problème posé pour un squelette $\mathcal{C}$ *symétrique* ne possède qu'une seule solution *symétrique*. Rappelons, à cette occasion, qu'une solution $z = z(f)$ du problème de Helmholtz est dite symétrique si l'expression $\frac{df}{dz}$ prend les valeurs imaginaires conjuguées en tout couple de points conjugués du plan f. Consulter aussi *loc. cit.* ([12]) et ([13]).

arguments de leurs images $Z_j = e^{is_j}\left(\frac{\pi}{2} < s_1 < s_2 < \ldots < s_n\right)$ dans le plan Z, P'_1, P'_2, ..., P'_n les points singuliers de $\widehat{OB}$ (donc symétriques des points P_1, P_2, ..., P_n respectivement par rapport à Ox), $s'_1, s'_2, \ldots, s'_n$ les arguments de leurs images $Z' = e^{is'_j}\left(0 < s'_n < s'_{n-1} < \ldots < s'_1 < \frac{\pi}{2}\right)$, on doit avoir

$$s'_j + s_j = \pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

Enfin, il faut que

$$-a = b, \qquad \psi_1 = \psi_2.$$

On montre alors que, moyennant ces relations jointes à $d_1 = d_2$, la solution correspondante est symétrique par rapport à Ox. En définitive, le problème actuel revient à déterminer $2n+2$ inconnues : les $(n+1)$ paramètres s_j et b et les $(n+1)$ fonctions $l_j(s)$, déduites de $l(s)$ au moyen des formules (13), où il faudra, cependant, remplacer par $\frac{\pi}{2} \leq s \leq s_1$ l'intervalle de définition $0 \leq s \leq s_1$ de $l_1(s)$ [40]. Le système fonctionnel de M. Villat correspondant s'écrit [*cf.* (14)]

$$l_1(s) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{s} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\, df(e^{is}) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leq s \leq s_1\right),$$

$$l_j(s) = \int_{s_{j-1}}^{s} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\, df(e^{is}) + l_{j-1} \qquad (s_{j-1} \leq s \leq s_j;\ j = 2, 3, \ldots, n),$$

$$l_{n+1}(s) = \int_{s_n}^{s} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\, df(e^{is}) + l_n \qquad (s_n \leq s \leq \pi);$$

$$\frac{1}{b-1} = \frac{1}{b-1} + \lambda\left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{\int_{-1}^{-q} \sin\Omega(X, 0)\, df(X, 0) + \psi_1}\right];$$

$$s_1 = s_1 + \frac{1}{\lambda}\left[l_1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^{s_1} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\, df(e^{is})\right],$$

$$s_j = s_j + \frac{1}{\lambda}\left[l_j - l_{j-1} - \int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-\mathrm{T}(e^{is})}\, df(e^{is})\right] \qquad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

On voit, somme toute, que, pour passer des écritures (14) aux écritures ci-dessus, il suffit de modifier l'équation de définition de $l_1(s)$ et de supprimer l'équation en a; mais, bien entendu, il faudra tenir compte, en écrivant les fonctionnelles des seconds membres, des conditions de symétrie écrites ci-dessus et d'y poser, en particulier

$$-a = b, \qquad \psi_1 = \psi_2.$$

---

(40) On voudra se rappeler que n n'a pas la même signification dans (13) et (14) d'une part, et dans le présent chapitre, d'autre part.

Dès lors, le raisonnement s'achève exactement comme dans le cas général. On réduit d'abord le système précédent à une équation fonctionnelle unique, en introduisant un ensemble abstrait dont l'élément x serait constitué par l'ensemble des $(n+1)$ fonctions $l_j(s)$ et des $(n+1)$ paramètres s_j et b. On montrera ensuite que l'ensemble abstrait en cause est un espace linéaire, normé, complet, sur lequel la transformation fonctionnelle ci-dessus est complètement continue. Dès lors, le raisonnement se poursuit comme aux paragraphes 25, 26 et 27, et comme le problème symétrique de Helmholtz, posé pour une configuration $\mathcal{C}$ symétrique par rapport à Ox (dont l'arc $\overset{\frown}{BC}$ se réduit à un segment de droite disposé suivant Oy), possède pour $d_1 = d_2 = \infty$ une solution symétrique, on conclut que :

Le problème de représentation conforme de Helmholtz, posé relativement à une configuration symétrique par rapport à l'axe Ox *et assujettie à vérifier les hypothèses* (H), *possède au moins une solution présentant la même symétrie.*

SUR

QUELQUES TYPES SPÉCIAUX DE RÉSEAUX

ET DE

CONGRUENCES CONJUGUÉS

PAR M. PAUL VINCENSINI.

I. — Introduction.

Dans un article du *Bulletin des Sciences Mathématiques* (¹), j'ai signalé les propriétés suivantes des surfaces harmoniques (représentatives des fonctions harmoniques). Soit S une surface harmonique représentant, en axes rectangulaires, la fonction harmonique $z = P(x, y)$. I étant un point fixe quelconque de l'espace et M un point quelconque de S de projection m sur le plan xOy, menons par I la parallèle à la normale en M à S, et désignons par m' le point où cette parallèle perce le plan xOy. On a les deux propriétés :

a. La correspondance ponctuelle établie dans le plan xOy par les points m, m' lorsque M décrit S est une *correspondance conforme inverse*, et c'est la correspondance conforme inverse la plus générale du plan.

b. Si l'on mène par chaque point m la parallèle à la normale au point correspondant M de S, on obtient *une congruence à surface moyenne plane*, le plan moyen étant xOy.

On déduit aussitôt de la proposition (*a*) que, si l'on considère deux surfaces harmoniques quelconques, et si l'on établit entre les deux surfaces une correspondance ponctuelle par plans tangents parallèles, la projection orthogonale de cette correspondance sur le plan xOy est *la correspondance conforme directe la plus générale du plan*.

(¹) *Surfaces harmoniques; congruences et représentations conformes associées* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. LXVIII, mars-avril 1944).

En ce qui concerne la proposition (*b*), il convient d'observer que l'ensemble des congruences à surface moyenne plane qu'elle fournit ne constitue pas la totalité des congrnences à surface moyenne plane, mais seulement une famille de telles congruences [congruences (H) de l'article cité]. Ces congruences se caractérisent d'ailleurs par des propriétés géométriques intéressantes, pour lesquelles je renvoie à l'article indiqué du *Bulletin des Sciences Mathématiques*. La congruence (H) la plus générale peut être définie en se donnant, dans un plan, une correspondance conforme inverse quelconque $m \to m'$, en joignant chaque point m' à un point fixe quelconque I de l'espace, et en menant, par le point m correspondant, la parallèle δ à Im'. La congruence est constituée par l'ensemble des droites δ.

C'est en cherchant à généraliser les résultats précédents que j'ai été conduit au développement qui va suivre.

Dans la première Partie du Mémoire j'approfondis l'étude des relations existant entre les congruences de Ribaucour et les réseaux conjugués à invariants égaux. On sait qu'on appelle *congruence de Ribaucour* toute congruence dont les développables déterminent sur la surface moyenne [lieu des milieux des segments focaux] un réseau conjugué, lequel est nécessairement à invariants (ponctuels) égaux.

Je généralise la construction des congruences (H) déduite de la considération d'une correspondance conforme inverse d'un plan et d'un point fixe I de l'espace précédemment rappelée, en l'étendant aux congruences de Ribaucour les plus générales. Le cas où la congruence de Ribaucour détermine sur la surface moyenne un réseau orthogonal (de courbure) est particulièrement intéressant. J'effectue la détermination de ces dernières congruences à partir des couples de surfaces isothermiques en correspondance involutive de Christoffel.

Dans la deuxième Partie j'applique les résultats de la première à l'étude des congruences (H) précédemment définies. Les relations entre ces congruences et les surfaces harmoniques sont examinées en détail. De nombreuses propriétés géométriques sont mises en évidence, et notamment le fait que ces congruences appartiennent à la famille des congruences W.

La troisième Partie est presque entièrement consacrée au problème de la recherche des déplacements à deux paramètres à imprimer à un angle de grandeur constante pour que les développables se correspondent dans les congruences engendrées par les deux côtés. Ce problème peut être regardé comme une généralisation de celui, bien connu, de la recherche des couples de droites parallèles engendrant des congruences dont les développables se correspondent. Le cas où les congruences décrites par les deux côtés de l'angle constant sont de Ribaucour est particulièrement intéressant, et conduit à déplacer le sommet de l'angle sur les surfaces parallèles à un tore quelconque suivant ses différents réseaux conjugués. Si l'angle est droit le déplacement

doit s'effectuer sur une surface minima arbitraire. Ces cas particuliers sont examinés en détail, de même que celui où les deux côtés de l'angle constant décrivent des congruences paraboliques avec correspondance de l'unique famille de développables.

A la fin du Mémoire j'ai tenu à indiquer une propriété de l'hélicoïde minima réglé. Cette surface peut être mise en correspondance ponctuelle par orthogonalité des éléments linéaires avec une surface de révolution *arbitraire*.

I.

1. Dans tout ce qui va suivre nous entendrons toujours, par *réseau*, un réseau conjugué, au sens de Dupin, d'une surface. Pour qu'un point de coordonnées $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ décrive un réseau dont les deux familles de courbes sont $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, il faut et il suffit, comme l'on sait, que les trois fonctions x, y, z soient trois solutions distinctes d'une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Une congruence est dite *conjuguée à un réseau* s'il existe, entre ses droites et les points du réseau, une correspondance telle que chaque droite de la congruence passe par le point correspondant du réseau, les développables de la congruence correspondant aux courbes du réseau, et si, en outre, les rayons de la congruence coupent effectivement les plans tangents du réseau (autrement dit si la congruence n'est pas l'une des deux congruences focales du réseau).

L'opportunité de la restriction précédente s'est présentée à C. Guichard quand il s'est agi de rendre généraux les énoncés de certains résultats de la théorie des réseaux et des congruences, tel par exemple le résultat suivant, dont il sera fait grand usage dans la suite de ce travail, et qui ramène la construction des congruences conjuguées à un réseau à la détermination des réseaux *parallèles* au réseau donné.

Deux réseaux sont parallèles si leurs courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ se correspondent, les tangentes aux courbes homologues en deux points homologues quelconques étant parallèles. La détermination des réseaux parallèles à un réseau donné quelconque (R) dépend de l'intégration d'une équation de Laplace (adjointe de l'équation du réseau) et, une fois ces réseaux connus, les congruences conjuguées à (R) s'obtiennent par la construction suivante :

Soit (R') un réseau quelconque parallèle à (R). Donnons-nous dans l'espace un point fixe quelconque I. Joignons I à un point quelconque m' de (R'), et menons par le point m de (R) homologue de m' la parallèle à la droite Im'. L'ensemble des droites ainsi obtenues forme une congruence conjuguée à (R). En faisant varier la position du point fixe I, pour un réseau (R) donné (choisi

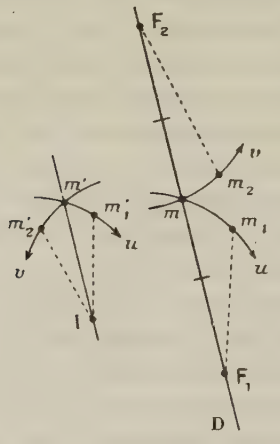
arbitrairement dans la famille des réseaux homothétiques dont il fait partie), on obtient ∞^3 congruences conjuguées à (R). La considération de l'ensemble des réseaux (R′) parallèles à (R) [définis chacun à une homothétie près] fournit la totalité des congruences conjuguées au réseau (R).

2. Portons plus spécialement notre attention sur les congruences de Ribaucour admettant pour surface moyenne une surface donnée S (¹). Le réseau que les développables de l'une quelconque de ces congruences déterminent sur S est un réseau à invariants égaux, et l'on peut se demander comment, *à partir des réseaux à invariants égaux de* S, *on pourra construire les congruences de Ribaucour de surface moyenne* S.

Soit (R) un réseau à invariants égaux de S. Les congruences de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen étant des congruences particulières conjuguées à (R), leur construction pourra s'effectuer, conformément au procédé indiqué au n° 1, en adjoignant à (R) des réseaux parallèles (R′) *convenablement choisis* et en menant, par les différents points de (R), les parallèles aux droites joignant un point fixe I de l'espace aux points correspondants de (R′). Il s'agit de voir comment il convient de choisir les réseaux (R′).

Supposons trouvé l'un de ces réseaux (R′), et soient I le point fixe associé, et m' le point de (R′) correspondant au point m de (R) [*fig.* 1]. La droite D

Fig. 1.



menée par m parallèlement à Im' engendre une congruence de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen. Désignons par F_1 et F_2 les deux foyers

(¹) Rappelons que la construction classique des congruences de Ribaucour de surface moyenne S consiste à chercher les surfacas (Σ) correspondant à S avec orthogonalité des éléments linéaires, puis à mener, par chaque point de S, la parallèle à la normale au point correspondant d'une surface Σ quelconque.

portés par D, et par $\overline{m\,m_1}$, $\overline{m\,m_2}$ les éléments d'arcs sur les courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ du réseau (R). Si (x, y, z) sont les coordonnées de m, on a, pour les composantes de ces éléments :

$$\overline{m\,m_1}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du,\ \frac{\partial y}{\partial u}du,\ \frac{\partial z}{\partial u}du\right), \qquad \overline{m\,m_2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ \frac{\partial y}{\partial v}dv,\ \frac{\partial z}{\partial v}dv\right).$$

D'autre part, $\overline{m'\,m'_1}$, $\overline{m'\,m'_2}$ étant les éléments d'arc de (R') correspondant aux éléments $\overline{m\,m_1}$, $\overline{m\,m_2}$ de (R), on aura aussi, en désignant par (x', y', z') les coordonnées du point m' :

$$\overline{m'\,m'_1}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}du,\ \frac{\partial y'}{\partial u}du,\ \frac{\partial z'}{\partial u}du\right), \qquad \overline{m'\,m'_2}\left(\frac{\partial x'}{\partial v}dv,\ \frac{\partial y'}{\partial v}dv,\ \frac{\partial z'}{\partial v}dv\right).$$

La similitude des triangles $(\mathrm{I}m'\,m'_1)$ et $(\mathrm{F}_1\,m\,m_1)$ donne (en valeur algébrique)

$$\frac{\overline{m'\,m'_1}}{\overline{m\,m_1}} = \frac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_1 m}}; \tag{1}$$

de même, la similitude des triangles $(\mathrm{I}m'\,m'_2)$ et $(\mathrm{F}_2\,m\,m_2)$ donne

$$\frac{\overline{m'\,m'_2}}{\overline{m\,m_2}} = \frac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_2 m}}. \tag{1'}$$

La congruence envisagée étant de Ribaucour, on a $\overline{\mathrm{F}_2 m} = -\overline{\mathrm{F}_1 m}$, et l'on déduit des relations (1), (1')

$$\frac{\overline{m'\,m'_1}}{\overline{m\,m_1}} = -\frac{\overline{m'\,m'_2}}{\overline{m\,m_2}} = \frac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_1 m}}.$$

On voit que deux des segments infiniment petits $(\overline{m\,m_1}, \overline{m'\,m'_1})$ ou $(\overline{m\,m_2}, \overline{m'\,m'_2})$ *sont de même sens et les deux autres de sens contraires*, et cela *quelle que soit* la position du point fixe I. Il résulte alors des expressions des composantes de $\overline{m\,m_1}$, $\overline{m\,m_2}$, $\overline{m'\,m'_1}$, $\overline{m'\,m'_2}$ écrites ci-dessus, que les coordonnées (x', y', z') du réseau (R') sont liées aux coordonnées (x, y, z) de (R) par les formules

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \ \ h\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = -h\dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases} \tag{2}$$

et deux analogues en (y, y') et (z, z'), h étant une certaine fonction de u et v, représentant d'ailleurs le rapport (algébrique) des segments parallèles $\overline{\mathrm{I}m'}$ et $\mathrm{F}_1\bar{m}$ $\left(h = \dfrac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_1 m}}\right)$.

On déduit aussitôt des relations (1) que x', y', z' vérifient l'équation de Laplace à *invariants égaux*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}=0$$

qui se déduit d'ailleurs, comme le montrent les relations (2), de l'équation de Laplace du réseau (R)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\log h)}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\log h)}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0$$

en y remplaçant h par $\frac{1}{h}$.

Ainsi, le réseau (R′) parallèle à (R), qu'il convient d'associer à (R) pour que la construction traduite par la figure (1) fournisse une congruence de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen, *est nécessairement à invariants égaux*, comme (R).

Étant donné un réseau quelconque à invariants égaux (R), il existe toujours au moins un réseau à invariants égaux (défini à une homothétie près) parallèle à (R). En général ce réseau est unique. Pour des réseaux (R) particuliers il peut y avoir plus d'un réseau parallèle à invariants égaux (il y en a alors une infinité); mais le réseau (R′) parallèle à (R) à associer à (R) dans la construction qui précède pour obtenir les congruences de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen est *toujours unique*, et c'est celui qui est défini, conformément aux relations (2), par la proportionnalité des couples d'arcs infiniment petits homologues issus de deux points homologues quelconques sur les courbes correspondantes des réseaux (R) et (R′).

Lorsque, dans la suite, nous parlerons du réseau à invariants égaux parallèle à un réseau à invariants égaux donné, il s'agira toujours du réseau unique dont il vient d'être question.

Ainsi, par exemple, si (R) est un réseau de translation quelconque (à invariants égaux nuls)

$$(R)\qquad x=U_1+V_1,\qquad y=U_2+V_2,\qquad z=U_3+V_3,$$

tous les réseaux parallèles à (R) sont de translation, donc à invariants égaux, mais seul le réseau défini, à une homothétie près, par les formules

$$(R')\qquad x=U_1-V_1,\qquad y=U_2-V_2,\qquad z=U_3-V_3,$$

fournit, moyennant la construction géométrique précédemment indiquée, ∞^1 congruences de Ribaucour (correspondant aux ∞^3 positions possibles du point I) de réseau moyen (R).

3. Il convient, pour ce qui va suivre, d'envisager plus spécialement le cas où, sur la surface moyenne S, le réseau moyen (R) d'une congruence de Ribaucour est un réseau à invariants égaux *orthogonal*, donc *isotherme*. Il s'agit donc des congruences de Ribaucour à surface moyenne isothermique dont les développables découpent sur cette surface moyenne le réseau de ses lignes de courbure. Si S′ est la surface support du réseau (R′) parallèle à (R) associé à (R) dans la construction de la congruence envisagée, les relations (2) montrent que la correspondance (par plans tangents parallèles) que les points homologues m et m' des réseaux (R) et (R′) déterminent sur S et S′ est une correspondance conforme. Deux angles homologues (formés par les tangentes à deux couples de courbes homologues de S et S′ issues de deux points correspondants m et m'), mesurés dans les plans tangents parallèles (supposés orientés dans le même sens) qui les contiennent, sont évidemment *de sens contraires :* la correspondance entre S et S′ est une *correspondance conforme inverse*.

Deux surfaces se correspondant par plans tangents parallèles dans une représentation conforme sont, ou bien deux surfaces homothétiques quelconques (la correspondance conforme est alors *directe*), ou bien deux surfaces minima *associées* (la correspondance est encore *directe*), ou bien deux surfaces (dites *transformées de Christoffel* l'une de l'autre) pour lesquelles la correspondance conforme est *inverse*. Cette dernière condition (correspondance conforme *inverse*) entraîne la *correspondance des réseaux de courbure des deux surfaces*, et classe ces réseaux dans la famille des réseaux orthogonaux à invariants égaux (isothermes).

Tout réseau orthogonal isotherme (R) admet, à une homothétie près, un réseau isotherme parallèle et un seul (R′), et c'est ce réseau qu'il faut adjoindre à (R) pour obtenir les congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen le réseau orthogonal isotherme (R).

La construction générale des congruences envisagées dans ce numéro est donc la suivante :

Donnons-nous arbitrairement un réseau orthogonal isotherme (R). Construisons son transformé de Christoffel (R′) (1). Joignons les différents points de (R′) à un point fixe quelconque de l'espace. Menons par les points homologues de (R) les parallèles aux droites obtenues. L'ensemble de ces parallèles constitue la congruence de Ribaucour la plus générale à réseau moyen orthogonal (isotherme).

---

(1) Le réseau orthogonal isotherme étant supposé donné par ses coordonnées $[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$, la détermination de son transformé de Christoffel $[x', y', z']$ peut être faite à partir des formules (2) du numéro 2. Cette détermination n'exige que des quadratures (*voir*, par exemple, G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. II, p. 253 et suiv.).

II.

4. Revenons maintenant aux congruences (H) définies dans l'Introduction. Ces congruences sont des congruences de Ribaucour comme toutes les congruences à surface moyenne plane, et leurs réseaux moyens (R) sont des réseaux plans à invariants égaux. Cherchons à déterminer les couples de réseaux plans parallèles à invariants égaux [(R), (R′)] qui, conformément à la construction générale du n° 2, caractérisent les congruences de ce type particulier.

La congruence (H) la plus générale de plan moyen (II) est déterminée par une correspondance conforme inverse $[m \to m']$ du plan (II) et par un point fixe I de l'espace, son rayon générateur étant la parallèle menée par m à la droite Im'. Les développables de (H) déterminent sur (II) un réseau à invariants égaux (R), et, lorsque m décrit ce réseau, m' décrit un réseau à invariants égaux parallèle à (R).

Or, étant donnée une correspondance conforme inverse plane quelconque, il existe un couple (et un seul) de réseaux homologues parallèles, et ces réseaux sont orthogonaux et isothermes.

D'autre part, parmi les réseaux parallèles à un réseau orthogonal isotherme donné, il en existe toujours un et un seul (une homothétie étant négligée) également isotherme [le réseau transformé de Christoffel du premier].

Il résulte de là que la congruence (H) la plus générale peut être définie *par le fait que ses développables déterminent dans le plan moyen un réseau orthogonal isotherme.*

Tout réseau (R) de cette espèce est le réseau moyen de ∞^3 congruences (H), obtenues, après adjonction à (R) de son transformé de Christoffel (R′), par la construction dont l'énoncé termine le n° 3.

5. Les congruences (H), initialement définies à partir d'une surface harmonique arbitraire en menant par les projections de ses points sur xOy les parallèles aux normales correspondantes, et rattachées ensuite aux correspondances conformes inverses du plan par la construction indiquée dans l'Introduction, sont intéressantes à un autre titre. La propriété caractéristique obtenue au numéro précédent, suivant laquelle les développables d'une congruence (H) déterminent, dans le plan moyen (xOy), un réseau orthogonal isotherme, identifie ces congruences avec celles d'une famille étudiée par M. Vaulot (¹). Au Chapitre V de son travail (§ 3), M. Vaulot effectue la recherche des congruences de Ribaucour à surface moyenne plane qui sont en même temps

(¹) M. Vaulot, *Congruences rectilignes, qui sont en même temps* W *et de Ribaucour* (*Thèse*, Paris, 1923).

des congruences W. Il arrive à cette conclusion que ces congruences sont précisément caractérisées par le fait que leur réseau moyen est un réseau orthogonal isotherme. Les congruences (H) du travail actuel, définies comme il vient d'être rappelé à partir des surfaces harmoniques, sont donc bien les congruences à la fois W et de Ribaucour envisagées par M. Vaulot. Et la remarquable simplicité de la construction (ne mettant en jeu qu'une simple projection orthogonale sur le plan xOy) qui fait dériver les congruences (H) des surfaces harmoniques, ajoute encore à l'intérêt géométrique que présente ce type intéressant de surfaces.

6. Le caractère W des congruences (H), que le rapprochement précédent vient de mettre en évidence, peut être rattaché aux considérations du travail actuel moyennant l'application du théorème bien connu suivant de G. Darboux.

Pour qu'une droite dépendant de deux paramètres u et v engendre une congruence W, *il faut et il suffit que ses six coordonnées pluckériennes vérifient une même équation aux dérivées partielles linéaire et homogène du second ordre*

$$(3)\qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial u}+E\frac{\partial\theta}{\partial v}+F\theta=0.$$

Les points $m[x(u, v)]$, $y(u, v)]$ et $m'[x'(u, v), y'(u, v)]$ décrivant, dans le plan xOy, deux réseaux transformés de Christoffel l'un de l'autre, on obtient comme l'on sait la congruence (H) la plus générale en menant, par chaque point m, la parallèle D à la droite Im', I étant un point fixe quelconque de l'espace, par exemple le point de Oz de cote -1.

Les coordonnées pluckériennes X, Y, Z, L, M, N de D sont

$$X=x',\qquad Y=y',\qquad Z=1,\qquad L=y,\qquad M=-x,\qquad N=xy'-yx'.$$

On a les relations (2) du n° 2 qui se réduisent ici à

$$(4)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial x'}{\partial u}=h\dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial x'}{\partial v}=-h\dfrac{\partial x}{\partial v},\\[2ex] \dfrac{\partial y'}{\partial u}=h\dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial y'}{\partial v}=-h\dfrac{\partial y}{\partial v},\end{cases}$$

auxquelles il faut adjoindre les suivantes :

$$(5)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}+\frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v}=0,$$

exprimant l'orthogonalité des réseaux (x, y) et (x', y').

En outre, x et y vérifient (*voir* le n° 2) l'équation de Laplace

$$(6)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0.$$

Il s'agit de montrer que les six fonctions

$$x,\quad y,\quad x',\quad y',\quad xy'-yx',\quad 1$$

vérifient une équation (6), laquelle devant être vérifiée pour $\theta = 1$ aura la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial u}+E\frac{\partial\theta}{\partial v}=0. \tag{7}$$

Formons les expressions de $\frac{\partial N}{\partial u}$, $\frac{\partial N}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}$ $(N = xy' - yx')$. On obtient aussitôt

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}y'+\frac{\partial y'}{\partial u}x-\frac{\partial y}{\partial u}x'-\frac{\partial x'}{\partial u}y,\\
\frac{\partial N}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}y'+\frac{\partial y'}{\partial v}x-\frac{\partial y}{\partial v}x'-\frac{\partial x'}{\partial v}y,\\
\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}y'+\frac{\partial^2 y'}{\partial v^2}x-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}x'-\frac{\partial^2 x'}{\partial v^2}y,\\
\frac{\partial^2 N}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}y'+\frac{\partial^2 y'}{\partial v^2}x-\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}x'-\frac{\partial^2 x'}{\partial v^2}y.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les quatre dérivées partielles de N figurant dans (8) sont, comme l'on voit, *une même combinaison linéaire et homogène des dérivées homologues de* x, y', y, x'.

Cela étant, envisageons le déterminant des coefficients de y', x, $-x'$, $-y$ aux seconds membres des relations (8), soit

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial u}\\
\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y'}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x'}{\partial v}\\
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y'}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x'}{\partial u^2}\\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y'}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 x'}{\partial v^2}
\end{vmatrix}.$$

Si l'on développe ce déterminant suivant la règle de Laplace, en tenant compte des relations (4), (5), et de l'équation (6) vérifiée par x, y, on constate qu'il est identiquement nul. Il existe donc une même relation linéaire homogène entre les éléments des différentes colonnes.

Les quantités x', y' y, x (les coordonnées pluckériennes X, Y, L, M) vérifient par suite une même équation de la forme (7) avec $B = 0$, soit

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial u}+E\frac{\partial\theta}{\partial v}=0. \tag{9}$$

La remarque relative à la constitution linéaire des dérivées $\frac{\partial N}{\partial u}$, $\frac{\partial N}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}$ données par les formules (8), montre que N vérifie cette même équation aux dérivées partielles (9).

Les coordonnées pluckériennes X, Y, Z, L, M, N d'un rayon quelconque D de la congruence (H) envisagée vérifiant une même équation aux dérivées partielles linéaire et homogène du second ordre, (H) est une congruence W, d'après le théorème de Darboux ci-dessus rappelé.

7. Une remarque intéressante à faire au sujet des congruences (H) envisagées en tant que congruences de Ribaucour est la suivante :

Toute congruence de Ribaucour admettant pour surface moyenne une surface donnée, peut être construite à partir d'une certaine surface (dite *génératrice* de la congruence) correspondant à la surface moyenne avec orthogonalité des éléments linéaires. La congruence s'obtient en menant par chaque point de la surface moyenne, la parallèle à la normale au point correspondant de la surface génératrice.

Envisageons alors une congruence (H) définie par la construction indiquée dans ce travail, consistant à mener, par la projection orthogonale m d'un point quelconque M d'une surface harmonique S sur le plan xOy, la parallèle à la normale en M à S. Adjoignons à S la surface harmonique *conjuguée* S' [définie par la fonction harmonique $z'(x, y)$ conjuguée de la fonction $z(x, y)$ définissant S]. Soit M' le point de S' se projetant sur xOy au même point m que M. On vérifie sans peine que si l'on fait tourner S' de $-\frac{\pi}{2}$ autour de Oz, ce qui amène S' en S_1 et M' en M_1, la normale en M_1 à S_1 est parallèle à la normale en M à S (¹). La correspondance que les points M_1 et m établissent entre la surface S_1 et le plan xOy est évidemment une correspondance par éléments linéaires orthogonaux, et S_1 est la surface *génératrice* de la congruence (H) considérée. On peut donc dire :

Les surfaces génératrices des congruences (H) *considérées en tant que congruences de Ribaucour sont des surfaces harmoniques*, et ces surfaces sont (à une rotation d'un angle droit près) les *conjuguées* des surfaces harmoniques dont les congruences (H) dérivent par la construction indiquée au début de ce travail.

Les congruences (H) sont donc liées de deux façons différentes aux surfaces harmoniques. Tout d'abord par la construction classique qui fait dériver une congruence (H) de la surface harmonique *génératrice*, puis par la construction, particulièrement simple, qui consiste à mener par la projection de chaque point d'une surface harmonique sur le plan xOy la parallèle à la normale correspondante.

(¹) Cette remarque est due à M. A. Charrueau, *Sur les surfaces représentatives des fonctions harmoniques* (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 67, p. 168 et 179). J'ai moi-même utilisé cette remarque, en la généralisant, dans le Mémoire du *Bulletin des Sc. math.* cité dans l'Introduction. J'en ai déduit, en particulier, diverses propriétés de certaines familles de congruences de Ribaucour associées aux surfaces harmoniques.

8. Il résulte de ce qui précède qu'en prenant comme point de départ les formules de M. Vaulot (*Mém. cité*, Chap. V, § 3) on peut, de deux façons différentes, obtenir les formules définissant au moyen de deux fonctions arbitraires d'une variable la surface harmonique la plus générale, et intégrer pour ainsi dire géométriquement l'équation $r+t=0$.

En modifiant légèrement les notations de M. Vaulot, on peut définir un point quelconque du plan moyen de la congruence W et de Ribaucour à surface moyenne plane (xOy) la plus générale [de la congruence (H) la plus générale] par les formules

$$(10)\qquad \begin{cases} x = i\left[\int \frac{d\alpha}{f'} - \int \frac{d\beta}{\varphi'}\right], \\ y = \int \frac{d\alpha}{f'} + \int \frac{d\beta}{\varphi'}, \end{cases}$$

les paramètres directeurs du rayon de la congruence issu du point (x, y) du plan moyen étant

$$(11)\qquad p = i(f-\varphi), \qquad q = -(f+\varphi), \qquad -1,$$

et f, φ désignant deux fonctions arbitraires des paramètres respectifs α et β dont les dérivées sont f', φ'.

Si l'on a égard à la construction des congruences (H) à partir des surfaces harmoniques rappelée à la fin du numéro précédent, on peut dire qu'il existe une surface harmonique dont les projections des différents points sur le plan xOy ont les expressions (10), les normales correspondantes ayant leurs paramètres directeurs p, q, -1 définis par les formules (11), cette surface étant d'ailleurs la surface harmonique la plus générale.

La troisième coordonnée z de la surface est définie par

$$z = \int p\,dx + q\,dy.$$

La quantité sous le signe $\int$ est nécessairement une différentielle exacte, et son intégration, immédiate, donne

$$z = -2\left[\int \frac{f}{f'}\,d\alpha + \int \frac{\varphi}{\varphi'}\,d\beta\right].$$

La surface harmonique la plus générale est donc définie par les équations

$$(12)\qquad \begin{cases} x = i\left[\int \frac{d\alpha}{f'} - \int \frac{d\beta}{\varphi'}\right], \\ y = \int \frac{d\alpha}{f'} + \int \frac{d\beta}{\varphi'}, \\ z = -2\left[\int \frac{f}{f'}\,d\alpha + \int \frac{\varphi}{\varphi'}\,d\beta\right], \end{cases}$$

f et φ étant des fonctions arbitraires de α et β respectivement.

Les surfaces réelles s'obtiennent en prenant pour f et φ des fonctions imaginaires conjuguées, les variables α et β étant également imaginaires conjuguées,

Les équations (12) mettent en évidence les deux familles de courbes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, qui définissent la surface harmonique la plus générale comme surface de translation. Pour rapporter la surface à ses asymptotiques il suffit de poser $\alpha = u + iv$, $\beta = u - iv$.

A titre de vérification, nous pouvons constater que, conformément à la propriété caractéristique (a) de l'Introduction, la correspondance entre les points $m(x, y)$ et $m'(p, q)$ du plan xOy est conforme. On a, en effet, en désignant par ds et ds' les éléments linéaires correspondants décrits par m et m'

$$ds^2 = \frac{4}{f'\varphi'} d\alpha\, d\beta, \qquad ds'^2 = 4 f'\varphi'\, d\alpha\, d\beta,$$

et par suite

$$ds'^2 = f'^2 \varphi'^2\, ds^2.$$

Si nous nous plaçons dans le cas où la surface (12) est réelle, nous constatons aussitôt que l'on a

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = -f'^2 \varphi'^2 \qquad (< 0),$$

ce qui prouve que la correspondance conforme $(m \to m')$ est *inverse*, conformément à la proposition (a).

9. De même qu'à toute congruence (H) on peut attacher deux surfaces harmoniques, à toute surface harmonique S on peut immédiatement associer deux congruences (H), soient H_1 et H_2, à rayons homologues parallèles, l'une H_1 obtenue en considérant S comme surface génératrice au sens classique, l'autre H_2 obtenue en considérant S comme génératrice au sens de la construction (b) de l'Introduction.

Dans le premier cas, H_1 s'obtient en faisant tourner la projection orthogonale m de chaque point M de S sur le plan xOy de l'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O, et en menant par le point obtenu la parallèle à la normale en M à S. Dans le second cas on obtient H_2 en menant par chaque point m la parallèle à la normale en M.

Les développables de H_1 correspondent, comme l'on sait, aux asymptotiques de S. Quant aux développables de H_2, elles correspondent, comme il est facile de le voir, à un réseau conjugué de la même surface S. La congruence H_2 peut, en effet, être considérée comme admettant pour génératrice (au sens classique) la surface S_1 déduite de la conjuguée S' de S par rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de Oz. Ses développables correspondent donc aux asymptotiques de S_1, donc de S', et ces dernières asymptotiques correspondent (par projection cylindrique parallèle à Oz) à un réseau conjugué de S.

Indiquons pour mémoire (*voir* l'article cité du *Bulletin des Sc. Math.*), que, si l'on soumet l'ensemble des points où les différents rayons d'une congruence H quelconque percent le plan xOy à une transformation conforme *directe* quelconque du plan, et que par les nouveaux points obtenus on mène les parallèles aux rayons correspondants de H, on obtient une nouvelle congruence du type (H). Les congruences H_1 et H_2 ci-dessus sont dans la relation que l'on vient d'indiquer, la transformation conforme directe étant une rotation d'un angle droit autour de O.

10. On pourrait se demander si la propriété que possèdent les congruences H d'être des congruences W, n'appartiendrait pas aussi aux congruences de Ribaucour générales admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme *arbitraire*. Le calcul montre qu'il n'en est rien. La raison géométrique de ce fait est simple. Considérons une congruence de Ribaucour (G) admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme (R), et soit S la surface support de ce réseau. (R′) étant le réseau transformé de Christoffel de (R) [défini à une homothétie près], et m, m' désignant deux points correspondants de (R), (R′), le rayon générateur D de (G) est la parallèle issue de m à la droite joignant m' à un certain point fixe I de l'espace. Projetons orthogonalement le voisinage de m sur (S) sur le plan π tangent en m à S; soit μ_1 la projection d'un point quelconque m_1 de ce voisinage. Projetons de même le voisinage de m' sur le plan tangent π' en m' au support S′ de (R′), et soit μ'_1 la projection d'un point quelconque m'_1 de ce voisinage.

La correspondance entre m et m' sur S et S′ étant une correspondance conforme inverse, il en est de même des correspondances entre les voisinages (plans) de m et m' sur π et π' (correspondance entre les points μ_1 et μ'_1). Si donc on mène par les différents points μ_1 les parallèles aux droites $I\mu'_1$ correspondantes, on obtient un élément de congruence de Ribaucour (g) [tangent à l'élément homologue de la congruence (G) initialement envisagée le long du rayon D]. Les éléments métriques du premier ordre (positions des foyers, des points limites, angle des plans focaux, etc.) relatifs au rayon D sont les mêmes pour (G) et pour (g), mais il n'en est pas de même, en général, pour ceux du second ordre.

Le fait qu'une congruence conjuguée à un réseau orthogonal isotherme est de Ribaucour ne mettant en jeu que les positions des foyers sur les différents rayons; la construction ci-dessus donnant les congruences de Ribaucour à réseau moyen *plan* donne aussi les congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme *gauche* quelconque. Mais le caractère W des congruences (H) à surface moyenne plane disparaît en général lorsqu'on passe du réseau moyen plan au réseau moyen gauche, car, le fait qu'une congruence est W met en jeu les asymptotiques des surfaces focales, c'est-à-dire les éléments du *deuxième ordre* attachés au rayon générateur.

III.

11. En ce qui concerne le problème de la recherche des congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen un réseau à invariants égaux donné, on peut faire les remarques suivantes :

Soient (R) le réseau moyen supposé donné, (R′) le réseau à invariants égaux parallèle à (R) (défini à une homothétie près), m et m' deux points homologues quelconques des deux réseaux. On obtient deux congruences de Ribaucour distinctes (G_1), (G_2) admettant (R) pour réseau moyen, en joignant m' à deux points fixes quelconques I_1, I_2 de l'espace, et en menant par m les parallèles D_1 et D_2 aux deux droites I_1m', I_2m'.

Prenons sur la droite I_1I_2 un point fixe quelconque I; il lui correspond une congruence de Ribaucour (G) de réseau moyen (R) dont le rayon générateur D, parallèle à Im', est situé dans le plan (mD_1D_2). Aux ∞^1 points I de I_1I_2 correspond ainsi un faisceau de ∞^1 congruences de Ribaucour (G) à rayons homologues coplanaires admettant (R) pour réseau moyen. Le rapport anharmonique de quatre rayons homologues quelconques de quatre congruences (G_1), (G_2), (G_3), (G_4), du faisceau précédent, est égal au rapport anharmonique des quatre points I_1, I_2, I_3, I_4 correspondants; ce rapport anharmonique est donc *constant*.

Toute droite I_1I_2 de l'espace donnant lieu à une configuration géométrique analogue à la précédente, on peut énoncer le résultat suivant :

Avec les ∞^3 congruences de Ribaucour admettant un réseau moyen donné on peut former ∞^4 faisceaux de congruences, tels que, pour les ∞^1 congruences d'un même faisceau, les rayons homologues issus d'un point quelconque m du réseau moyen soient coplanaires, quatre rayons homologues quelconques étant en rapport anharmonique constant.

De pareilles configurations projectives de rayons peuvent évidemment aussi être obtenues avec des congruences conjuguées à un réseau quelconque (R). Il suffit, pour le voir, de se reporter à la construction des congruences conjuguées à (R) au moyen d'un réseau quelconque (R′) parallèle à (R) et d'un point fixe quelconque I de l'espace rappelée au n° 1, et de reprendre le raisonnement précédent. Mais ici on a beaucoup plus de latitude pour la construction des configurations projectives en question, le réseau (R′) étant l'un *quelconque* des réseaux parallèles à (R), et sa détermination dépendant, comme l'on sait, d'une équation de Laplace.

En considérant, au lieu de la droite I_1I_2, un plan quelconque $(I_1I_2I_3)$, et en construisant les congruences (de Ribaucour ou non) conjuguées à un réseau donné (R), on met en évidence la possibilité de répartir l'ensemble des

congruences conjuguées à (R) en familles de ∞^2 congruences, telles que les gerbes de ∞^2 rayons homologues de ces congruences issus d'un même point quelconque du réseau (R) soient projectivement identiques. Les familles en question sont en nombre ∞^3 pour les congruences de Ribaucour de réseau moyen (R) [(R′) est alors déterminé à une homothétie près, indifférente puisque le plan $I_1I_2I_3$ est un plan quelconque de l'espace]. Dans le cas général les différentes familles correspondent, pour chaque position du plan $(I_1I_2I_3)$, aux différentes solutions de l'équation de Laplace dont dépendent les réseaux (R′) parallèles à (R).

12. Les remarques du numéro précédent conduisent à rechercher les groupes de congruences conjuguées à un réseau (R) donné, dont les systèmes de rayons homologues forment une figure *métriquement* (et non plus seulement projectivement) invariable.

Si l'on se borne, pour commencer, à la considération des congruences de Ribaucour, on peut aisément donner une réponse complète à la question précédente.

Si (R) est un réseau à invariants égaux arbitraire, il est généralement impossible de former, avec les congruences de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen, des groupes tels que les rayons homologues d'un même groupe forment une figure invariable (se coupent deux à deux sous un angle invariable). Les réseaux à invariants égaux pour lesquels il existe des configurations invariables de groupes de rayons homologues sont :

1° les réseaux à invariants égaux parallèles aux réseaux à invariants égaux des tores, pour lesquels il existe *deux* congruences de Ribaucour dont les rayons homologues forment un angle invariable;

2° les réseaux de courbure des surfaces minima, pour chacun desquels il existe ∞^2 couples de congruences de Ribaucour à rayons homologues orthogonaux.

Soit (R) un réseau à invariants égaux. Supposons que deux congruences de Ribaucour (G_1) et (G_2) admettant (R) pour réseau moyen, soient telles que les rayons homologues D_1, D_2 issus d'un même point quelconque de (R) forment un angle constant α. Soient (R′) le réseau à invariants égaux parallèle à (R) (défini à une homothétie près), et I_1, I_2 les deux points fixes associés à (R′) dans les constructions donnant respectivement (G_1) et (G_2). Si m' est le point de (R′) correspondant au point m de (R), les droites I_1m' et I_2m', respectivement parallèles à D_1 et D_2, forment l'angle constant α. Il résulte de là que le réseau (R′) est tracé sur un tore d'axe I_1I_2, engendré par la rotation, autour de la droite I_1I_2, d'un cercle passant par I_1, I_2 et coupant I_1I_2 sous l'angle α.

Il convient de distinguer les cas où l'angle α est différent de $\frac{\pi}{2}$ ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas on voit que les seul réseaux à invariants égaux (R) tels

qu'il existe des couples de congruences de Ribaucour les admettant pour réseaux moyens, deux rayons homologues quelconques formant un angle constant $\alpha\left(\neq\frac{\pi}{2}\right)$ sont les réseaux à invariants égaux parallèles aux réseaux à invariants égaux d'un tore quelconque (lesquels dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable). Pour tout réseau (R) de cette espèce, il existe deux congruences (G_1), (G_2) de Ribaucour (et manifestement pas davantage) dont les couples de rayons homologues se coupent sous un angle constant. On les obtient en menant, par chaque point m de (R), les parallèles aux droites joignant le point correspondant m' du tore associé, aux deux points I_1, I_2 où le tore coupe son axe de révolution. (G_1) et (G_2) ne sont réelles que si le cercle méridien du tore coupe l'axe de révolution.

Si l'angle α est droit, le réseau (R') parallèle à (R) est porté par une sphère Σ de diamètre I_1I_2. (R') est donc un réseau *orthogonal isotherme* de Σ, et il en résulte que (R) est le *réseau de courbure d'une surface minima arbitraire*.

Comme, dans ce dernier cas, pour tout couple de points diamétralement opposés I_1, I_2 de la sphère Σ l'angle $\widehat{I_1m'I_2}$ est droit, on voit que *toute surface minima* S *est la surface moyenne de* ∞^2 *couples de congruences de Ribaucour à rayons homologues orthogonaux*. Pour avoir l'un quelconque de ces couples, on joint un point quelconque m' de la sphère Σ à deux points diamétralement opposés quelconques I_1, I_2, puis on mène par le point m de S d'image sphérique m' les parallèles à I_1m' et I_2m'.

13. Parmi les réseaux à invariants égaux du tore, que l'on a été conduit à envisager dans le cas où $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, figure évidemment le réseau des lignes de courbure (méridiens et parallèles). (R) est alors le réseau de courbure de la transformée de Christoffel du tore, et sa détermination peut se faire par une quadrature. Nous saisirons, à ce sujet, l'occasion de signaler une forme particulièrement simple des équations définissant les couples de surfaces de révolution transformées de Christoffel l'une de l'autre [équations (13) et (13') de ce paragraphe].

Soient, S une surface quelconque de révolution autour de Oz, dont la méridienne L dans le plan xOz a pour équation $z=f(x)$, et S' la transformée de Christoffel de S de méridienne L'. Désignons par X, Z les coordonnées du point m' de S' correspondant au point m de S. En m et m' les plans tangents à S et S' sont parallèles, et la correspondance entre S et S' est une correspondance conforme inverse. Traduisons ces conditions. Supposons les coordonnées X et Z de m' exprimées en fonction de l'abscisse x de m. X aura une expression de la forme $X=\varphi(x)$, et l'on devra avoir, pour le parallélisme des plans tangents, $\frac{dZ}{dX}=f'(x)$, soit

$$Z=\int\varphi'(x)f'(x)\,dx.$$

Exprimons que la correspondance entre S et S′ est conforme. Il faut, et il suffit pour cela, que les éléments d'arcs décrits par m pour une rotation infinitésimale autour de Oz et pour une variation infinitésimale de x, soient proportionnels aux éléments d'arcs décrits par m' pour la même rotation infinitésimale et la même variation de x. En écrivant cette proportionnalité, on obtient aussitôt

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x},$$

d'où l'on déduit, C étant une constante arbitraire, soit

$$\varphi(x) = Cx.$$

soit

$$\varphi(x) = \frac{C}{x}.$$

Dans le premier cas S′ est homothétique de S (la correspondance conforme est directe). Le deuxième cas fournit la transformée de Christoffel S′ de S.

Les équations paramétriques définissant, par sa méridienne, S′ à partir de S, sont, en prenant par exemple la constante d'homothétie C égale à *un*,

$$X = \varphi(x) = \frac{1}{x},$$

$$Z = \int \varphi'(x) f'(x)\, dx = -\int \frac{f'(x)}{x^2}\, dx.$$

L'élimination de x entre les équations précédentes donne immédiatement l'équation de la méridienne S′ sous la forme cartésienne ordinaire :

$$Z = \int f'\left(\frac{1}{X}\right) dX.$$

Ainsi, les équations définissant par leurs méridiennes (dans le plan xOz) le couple le plus général de surfaces de révolution transformées de Christoffel l'une de l'autre sont

(13) $$z = f(x),$$

(13′) $$Z = \int f'\left(\frac{1}{X}\right) dX.$$

Les points homologues sur les méridiennes (13) et (13′) correspondent aux abscisses respectives x et $X = \frac{1}{x}$. La réciprocité des deux surfaces se lit d'ailleurs sur les équations (13), (13′).

Ces équations mettent, par exemple, immédiatement en évidence les associations comme surfaces transformées de Christoffel, des paraboloïdes de révolution d'axe Oz et des surfaces engendrées par les courbes logarithmiques d'asymptote Oz tournant autour de Oz, ou encore des surfaces engendrées

respectivement, par rotation autour de Oz, des cubiques $z = kx^3$ et des hyperboles équilatères admettant Oz pour asymptote.

Si l'une des surfaces est le tore de méridienne

$$x^2 + z^2 - 2ax - b^2 = 0,$$

l'équation (13) s'écrit

$$z = \pm\sqrt{-x^2 + 2ax + b^2},$$

et (13') fournit aussitôt la surface transformée de Christoffel

$$\pm Z = \frac{a}{b^2}\sqrt{b^2X^2 + 2aX - 1} - \frac{b^2 + a^2}{b^3}\operatorname{Log}\left(b^2X + a + b\sqrt{b^2X^2 + 2aX - 1}\right).$$

Si $a = 0$, on obtient

$$X = \frac{1}{b}\operatorname{ch} bZ.$$

et l'on retrouve l'association bien connue de la sphère et du caténoïde.

14. Envisageons maintenant, d'une façon générale, le problème qui consiste, étant donné un angle de grandeur invariable, à lui imprimer un mouvement à deux paramètres dans lequel les deux côtés engendrent des congruences conjuguées à un même réseau (décrit par le sommet).

Si l'on exige seulement la correspondance des développables des congruences décrites par les deux côtés de l'angle (sans égard à la propriété de conjugaison qui exige que le réseau décrit par le sommet ne soit focal pour aucune des deux congruences), une solution immédiate est donnée par les normales à une surface quelconque et les tangentes à l'une des familles de lignes de courbure, une autre solution est fournie par les tangentes aux courbes des réseaux isogonaux (dont les tangentes font un angle constant) que j'ai étudiés en détail dans un Mémoire antérieur (1).

Une solution évidente du problème précis qui nous occupe est formée par la figure constituée par les ∞^1 positions, dans un plan (π), d'un angle constant dont la position dépend d'un paramètre variable, mise en rotation autour d'une droite quelconque du plan. Les congruences des deux côtés sont conjuguées au réseau de courbure de la surface de révolution engendrée par la courbe lieu du sommet de l'angle dans le plan (π). Le plan (π) pourrait d'ailleurs rouler sur une développable, et l'on obtiendrait alors des congruences conjuguées au réseau de courbure d'une surface moulure quelconque.

Le problème général peut être présenté sous la forme même envisagée au n° 12 au sujet des angles constants dont les côtés décrivent des congruences de Ribaucour de même réseau moyen.

---

(1) *Sur les généralisations de quelques problèmes de géométrie différentielle et sur certains cycles de congruences* (*Acta mathematica*, t. 71, 1939, p. 145).

La question revient alors à déterminer les réseaux (R) tels que, parmi les réseaux qui leur sont parallèles, il en existe deux (R′), (R″) pour lesquels les différents segments joignant les divers couples de points homologues m', m'' de (R′), (R″) soient vus d'un point fixe O de l'espace sous un angle constant.

Si l'on se place dans le cas où les réseaux (R′), (R″) sont homothétiques (on peut alors les supposer égaux et déduits l'un de l'autre par une translation), il suffit d'amener, par translation, (R″) en coïncidence avec (R′), pour être ramené au cas du n° 12. Il doit alors exister deux points I_1, I_2 tels que l'angle $\widehat{I_1 m' I_2}$ soit constant, et l'angle mobile s'obtient en menant, par le point m de (R) homologue du point m' de (R′), les parallèles à $I_1 m'$ et $I_2 m'$. (R′) est alors porté par un tore. (R) est un réseau parallèle à un réseau *quelconque* du tore, et les côtés D_1 et D_2 de l'angle sont les parallèles issues de m aux droites joignant m' aux deux points I_1, I_2 où le tore coupe l'axe de révolution.

Si l'angle mobile est droit le tore se réduit à une sphère. (R′) est un réseau orthogonal quelconque de la sphère, et I_1, I_2 sont deux points diamétralement opposés quelconques de la même sphère. Dans ce cas (R) est *un réseau orthogonal quelconque* (formé par les lignes de courbure d'une surface arbitraire).

A toute surface S on peut donc attacher, de ∞^2 façons différentes, un angle droit mobile dont le sommet décrit la surface et dont les côtés engendrent des congruences conjuguées au réseau de courbure de la surface. On obtient cet angle en effectuant la représentation sphérique de S et en menant, par chaque point de S, les parallèles aux droites joignant l'image sphérique de ce point à deux points diamétralement opposés fixes quelconques de la sphère image.

Mais ce ne sont là que des solutions particulières du problème qui nous occupe. Dans le cas général les réseaux (R′) et (R″) sont simplement *parallèles* (non nécessairement homothétiques entre eux) au réseau (R) décrit par le sommet de l'angle mobile.

Si un angle $\widehat{D_1 m D_2}$ est animé du mouvement à deux paramètres le plus général dans lequel les congruences décrites par les deux côtés D_1 et D_2 sont conjuguées à un même réseau (R) [décrit par le point m], il doit exister deux réseaux (R′), (R″) parallèles à (R), tels que le segment déterminé par les points m', m'' de (R′), (R″) homologues de m soit vu d'un point fixe O sous un angle constant $\left(\text{égal à l'angle } \widehat{D_1 m D_2}\right)$.

Réciproquement, si deux réseaux (R′), (R″) sont parallèles et s'il existe un point fixe O tel que les segments $m'm''$ joignant deux points homologues quelconques des deux réseaux soient vus d'un point fixe O sous un angle constant, tout réseau (R) parallèle à (R′) et (R″) fournit une solution du problème, que l'on obtient en menant par le point m de (R) homologue de m', m'' les parallèles aux droites Om', Om''.

Tout revient donc, comme l'on voit, à déterminer les couples de réseaux parallèles (R′), (R″) jouissant de la propriété énoncée.

Comme deux réseaux parallèles quelconques peuvent être considérés comme se correspondant dans une correspondance par plans tangents parallèles entre leurs surfaces supports, le problème peut en définitive être ramené à celui de la recherche des couples de surfaces telles que si l'on établit entre leurs points m' et m'' une correspondance par plans tangents parallèles, il existe un point fixe O d'où l'on voit les différents segments $m'm''$ sous un angle constant.

Tout couple de surfaces S', S'' vérifiant la condition précédente fournit une infinité de solutions, que l'on obtient en prenant le couple de réseaux homologues [(R'), (R'')] dans la représentation par parallélisme des plans tangents de l'une des surfaces sur l'autre, en déterminant les différents réseaux (R) parallèles à (R') et (R''), et en effectuant ensuite, à partir du point O, la construction précédemment indiquée.

15. Il est facile de se rendre compte du degré de généralité de la solution qui vient d'être exposée. Le point fixe O étant supposé placé à l'origine des coordonnées, donnons-nous la surface S' du couple [S', S''], et supposons-la définie tangentiellement par l'équation

$$Xx + Yy + Zz = M,$$

x, y, z étant les coordonnées courantes du plan tangent, X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale, et M la distance du point O au plan tangent au point courant m' de S'. X, Y, Z, M sont des fonctions des deux variables u, v fixant, m' sur S', et sa représentation sphérique μ(X, Y, Z) sur une sphère Σ de centre O et de rayon 1. La représentation sphérique (qui peut être choisie arbitrairement) aura un certain ds^2

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et, si $\Delta(\varphi, \psi)$ désigne le paramètre différentiel mixte de deux fonctions φ, ψ de u, v, par rapport à ce ds^2, les coordonnées du point m' de S' sont données par les formules de Weingarten

$$(14)\qquad \begin{cases} x = \Delta(M, X) + MX, \\ y = \Delta(M, Y) + MY, \\ z = \Delta(M, Z) + MZ. \end{cases}$$

Cela étant, soit S'' une surface quelconque mise en correspondance par plans tangents parallèles avec S'. Elle sera définie tangentiellement par la distance N(u, v) de son plan tangent à l'origine, et le point m'' de S'' correspondant au point m' de S' aura pour coordonnées

$$(15)\qquad \begin{cases} \overline{x} = \Delta(N, X) + NX, \\ \overline{y} = \Delta(N, Y) + NY, \\ \overline{z} = \Delta(N, Z) + NZ. \end{cases}$$

L'angle $\widehat{m'Om''}$ est défini par

$$\cos\alpha = \frac{S x \bar{x}}{\sqrt{S x^2}\sqrt{S \bar{x}^2}},$$

Soit en remplaçant (x, y, z), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ par leurs expressions (14), (15) et en tenant compte des relations

$$S X \Delta(M, X) = S X \Delta(N, X) = 0 \qquad (S X^2 = 1),$$

$$\cos\alpha = \frac{S \Delta(M, X)\Delta(N, X) + MN}{\sqrt{S \Delta(M, X)^2 + M^2}.\sqrt{S \Delta(N, X)^2 + N^2}}. \tag{16}$$

L'angle α et la fonction $M(u, v)$ définissant S' étant donnés, (16) est, pour la fonction N définissant la surface S'' à associer à S', une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Les surfaces S'' à adjoindre à une surface donnée S', pour obtenir une solution du problème qui nous occupe, dépendent donc d'une fonction arbitraire d'un argument (et, bien entendu, des trois constantes qui fixent la position de O par rapport à S').

Ceci nous prouve que sur toute surface S' il existe une infinité de réseaux (R') (dont la généralité est celle d'une fonction arbitraire d'un argument), tels qu'à chacun d'eux on puisse associer un réseau parallèle (R''), le couple [(R'), (R'')] fournissant, par adjonction à (R') et (R'') d'un réseau parallèle (R), une solution du problème du déplacement d'un angle de grandeur donnée dont les côtés décrivent des congruences conjuguées à un même réseau (décrit par le sommet).

Dans le mode d'exposition précédent de la recherche des couples de surfaces S', S'', nous avons implicitement supposé que S' et S'' n'étaient pas développables, puisque nous avons admis l'existence d'une représentation sphérique commune non réduite à une courbe.

Le cas où S' (et par suite S'') serait développable se traite sans difficulté. S' et S'' sont alors deux développables quelconques se correspondant par génératrices parallèles. Donnons-nous dès lors un point fixe quelconque O de l'espace et soient D', D'' deux génératrices homologues quelconques de S', S''. A chaque point m' de D' correspondent deux points m''_1, m''_2 tels que les segments $(m'm''_1)$, $(m'm''_2)$ soient vus du point O sous un angle donné α. En choisissant l'un de ces points, m''_1 par exemple, et en le suivant par continuité lorsque m' décrit S', on obtient une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces S', S'' l'une sur l'autre (la plus générale d'ailleurs) du problème qui nous occupe relatif aux surfaces développables.

En envisageant le réseau conjugué de S' parallèle à son homologue sur S'' (autre que celui formé par les asymptotiques D') (1), en construisant l'un

(1) Ce réseau est constitué par les génératrices rectilignes de S', et par les courbes (dépendant d'une équation différentielle du premier ordre) coupant les génératrices de S' sous l'angle sous lequel les courbes correspondantes de S'' coupent les génératrices de cette deuxième surface.

quelconque (R) de ses parallèles, et en menant, par un point quelconque m de (R), les parallèles aux droites Om', Om_1'', on obient un angle de grandeur constante α dont les côtés décrivent des congruences conjuguées à (R).

Il résulte de l'étude qui précède qu'un réseau arbitrairement donné (R) ne peut pas, en général, être considéré comme conjugué à la fois à deux congruences dont les rayons homologues font un angle constant. Les réseaux jouissant de cette propriété sont des réseaux spéciaux dépendant (si l'on ne considère pas comme distincts deux réseaux parallèles) de deux fonctions arbitraires, l'une de deux arguments (celle qui définit la surface S′ dont il est question ci-dessus), l'autre d'un argument (fixant la surface S″ associée à S′ dans la détermination du réseau).

16. Explicitons par exemple l'équation (16) dans le cas où l'angle α est *droit*. L'équation est alors linéaire, et, moyennant un choix convenable de la représentation du couple [S′, S″] sur la sphère unitaire Σ, elle peut prendre une forme particulièrement simple.

Supposons Σ rapportée au système de ses génératrices rectilignes. On a alors

$$X = \frac{u+v}{1+uv}, \qquad Y = \frac{1}{i}\frac{u-v}{1-uv}, \qquad Z = \frac{uv-1}{1-uv},$$

$$ds^2 = \frac{4\,du\,dv}{(1-uv)^2}.$$

L'équation (16) se réduit à

$$S\,\Delta(M, X)\,\Delta(N, X) - MN = 0, \tag{17}$$

et l'on a

$$\Delta(M, X) = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial M}{\partial v}\right),$$

$$\Delta(N, X) = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial v}\right).$$

Si l'on tient compte des relations

$$S\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad S\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F = \frac{2}{(1-uv)^2},$$

on voit que l'équation (17) peut s'écrire

$$\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial v} - \frac{2}{(1-uv)^2}MN = 0.$$

Soit en posant $\log M = \mu$, $\log N = \nu$,

$$\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{2}{(1+uv)^2} = 0. \tag{18}$$

La surface S′ étant donnée, μ est une fonction connue de u et v, et il suffit d'intégrer l'équation linéaire du premier ordre (18) en ν pour obtenir les surfaces associées S″.

17. Je signale une solution particulière explicite assez étendue du problème de la recherche des couples de surfaces associées [S′, S″], remarquable en ce sens qu'elle fournit simultanément une infinité de couples [S′, S″] (autres que ceux déjà signalés au n° 14, issus d'une surface moulure arbitraire), tels que parmi eux il y en ait qui correspondent à un angle d'association absolument arbitraire.

Considérons la surface S′ définie par les équations

$$(S') \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-u^2)f(u) + \frac{1}{2}(1-v^2)\varphi(v), \\ y = \frac{i}{2}(1+u^2)f(u) - \frac{i}{2}(1+v^2)\varphi(v), \\ z = uf(u) + v\varphi(v), \end{cases}$$

où f et φ sont deux fonctions arbitraires des arguments respectifs u et v.

Cette surface est une surface de translation à réseau de translation imaginaire (¹); elle est réelle si l'on prend u et v imaginaires conjuguées, les fonctions f et φ étant elles-mêmes imaginaires conjuguées. Associons-lui la surface S″, que nous appellerons S''_α, définie par les équations

$$(S''_\alpha) \qquad \begin{cases} x = \frac{e^{i\alpha}}{2}(1-u^2)f(u) + \frac{e^{-i\alpha}}{2}(1-v^2)\varphi(v), \\ y = \frac{ie^{i\alpha}}{2}(1+u^2)f(u) - \frac{ie^{-i\alpha}}{2}(1+v^2)\varphi(v), \\ z = e^{i\alpha}uf(u) + e^{-i\alpha}v\varphi(v), \end{cases}$$

α étant une constante arbitraire.

S′ et S''_α sont évidemment en correspondance ponctuelle par plans tangents parallèles, le réseau conjugué commun étant le réseau de translation (u, v).

Si m' et m'' sont deux points homologues sur S′ et S''_α, les équations définissant les surfaces montrent aussitôt que l'on a, quel que soit le couple $(m'm'')$ envisagé,

$$\begin{cases} Om' = Om'', \\ \widehat{m'Om''} = \alpha. \end{cases}$$

La deuxième propriété $\left(\widehat{m'Om''} = \alpha\right)$ prouve que tout couple $[S', S''_\alpha]$ fournit une solution du problème de la recherche des couples de congruences conjuguées à un même réseau, les rayons homologues faisant l'angle

(¹) Les surfaces (S′) considérées sont les surfaces moyennes (lieux des milieux des segments focaux) des congruences normales à enveloppée moyenne point (dont les plans médiateurs des segments focaux passent par le point fixe O). Elles sont intimement liées aux surfaces minima [*voir* mon Mémoire *sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. LXV, juill.-août-sept. 1941).

J'y reviendrai prochainement à un autre point de vue.

constant α. Il suffit de prendre une surface quelconque S parallèle à S′ et S''_α suivant le réseau de translation commun, puis de mener par chaque point m de cette surface (qui est de translation comme S′ et S''_α) les parallèles D_1 et D_2 aux deux droites Om', Om''. D_1 et D_2 engendrent un couple de congruences répondant à la question.

Mais il y a plus. Si l'on considère par exemple les surfaces S′ et $S''_{\frac{\alpha}{2}}$, et si l'on désigne par P le plan déterminé par deux rayons vecteurs homologues Om', Om'' des deux surfaces, on constate que la variation de α laisse le rayon vecteur homologue des précédents relatif à S''_α dans ce même plan P. Si donc on mène, par chaque point m d'une surface S parallèle à S′ suivant le réseau de translation (u, v), les parallèles aux rayons vecteurs correspondants des différentes surfaces S''_α, on obtient ∞^2 *faisceaux plans de droites métriquement identiques dont les rayons homologues fournissent* ∞^1 *congruences conjugées au réseau* (u, v) *de* S.

Nous avons déjà rappelé qu'en déplaçant le sommet d'un faisceau plan de droites (invariablement liées les unes aux autres) sur une surface de révolution ou sur une surface moulure quelconque, on peut obtenir, comme avec les surfaces S dont il vient d'être question, ∞^1 congruences conjuguées à un même réseau.

Il serait sans doute intéressant de rechercher toutes les solutions du problème du mouvement à deux paramètres d'un faisceau plan, dont les différents rayons sont invariablement liés les uns aux autres et engendrent ∞^1 congruences conjuguées à un même réseau (décrit par le sommet du faisceau).

18. Les réseaux conjugués aux congruences engendrées par les deux côtés d'un angle de grandeur invariable sont, comme nous l'avons dit, des réseaux spéciaux, formant d'ailleurs une famille assez étendue (n° 15). Cette famille contient en particulier, comme nous l'avons vu (n° 14), tous les réseaux orthogonaux (formé par les lignes de courbure d'une surface arbitraire). Il est facile de se rendre compte qu'elle contient aussi des réseaux dont les deux familles de courbes sont confondues, constitués par l'un des deux systèmes de lignes asymptotiques d'une surface, et que, pour cette raison, nous dirons *réseaux demi-asymptotiques*.

La recherche de ces réseaux revient à celle des couples de surfaces S′, S″, entre lesquelles on peut établir une correspondance par plans tangents parallèles jouissant des propriétés suivantes :

1° les segments joignant les couples de points homologues sont vus d'un point fixe O sous un angle constant;

2° les images sphériques d'un système d'asymptotiques de chacune des deux surfaces sont confondues : il y a correspondance sur les deux surfaces, entre les courbes de l'un des deux systèmes d'asymptotiques (correspondance *demi-asymptotique*).

Si conformément aux notations du n° 15, M et N sont les distances à l'origine de deux plans tangents parallèles de S′ et S″, la première condition s'exprime, comme on l'a vu, par une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre les fonctions M et N. La deuxième condition s'exprime évidemment par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre entre ces deux mêmes fonctions, et les couples cherchés sont définis par les différentes solutions (M, N) du système des deux équations en question.

Nous n'entrerons pas dans le détail de l'étude de ce système. Nous nous bornerons ici à observer que son existence prouve que l'un des systèmes de lignes asymptotiques d'une surface ne peut pas, en général, être considéré comme réseau conjugué commun aux congruences décrites par les deux côtés d'un angle de grandeur invariable. Les réseaux demi-asymptotiques jouissant de la propriété indiquée sont des réseaux demi-asymptotiques spéciaux dont nous donnerons plus loin des exemples. Les congruences engendrées par les deux côtés de l'angle constant attaché à un pareil réseau sont telles que pour chacune d'elles, les développables, qui correspondent aux courbes d'un réseau réduit à une seule famille de courbes, sont confondues. Les congruences en question sont donc paraboliques, et le problème envisagé peut être considéré comme celui de la recherche des couples de surfaces entre lesquelles on peut établir une correspondance ponctuelle telle que *l'un des systèmes d'asymptotiques de l'une des deux surfaces corresponde à l'un des systèmes de lignes asymptotiques de l'autre, les tangentes aux asymptotiques correspondantes en deux points homologues quelconques se coupant sous un angle constant.*

19. Il convient ici que nous fassions quelques remarques sur la construction des surfaces admettant, pour représentation sphérique de l'un de leurs deux systèmes de lignes asymptotiques, une famille de courbes donnée de la sphère image.

On sait qu'on ne peut pas se donner arbitrairement les deux familles de courbes (L_1), (L_2) constituant la représentation sphérique (sur une sphère Σ) des lignes asymptotiques d'une surface. Les doubles systèmes de courbes (L_1), (L_2) de Σ doivent satisfaire à la condition suivante : le réseau constitué par les projections des courbes (L_1) et (L_2) sur un plan, faites du centre O, doit être un réseau à invariants égaux. Si cette condition est remplie, et si la représentation sphérique $[(L_1), (L_2)]$ est connue, il existe *une* surface (définie à une homothétie près), que l'on peut obtenir par des quadratures, admettant pour images sphériques de ses asymptotiques les deux familles (L_1), (L_2).

Mais on peut se donner arbitrairement l'une des deux familles (L_1) de la représentation sphérique. Il existe alors une infinité de familles (L_2) constituant avec (L_1) la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface. Pour avoir ces familles (L_2), il suffit de projeter du centre O de la

sphère Σ (L_1) sur un plan, ce qui donne une famille (l_1), puis, d'adjoindre à (l_1) une famille quelconque (l_2) formant avec (l_1) un réseau à invariants égaux [il existe une infinité de familles (l_2) dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument] et de projeter du point O l'une quelconque de ces familles (l_2) en (L_2) sur Σ.

Proposons-nous alors de déterminer tous les réseaux *demi-asymptotiques* parallèles à un réseau demi-asymptotique donné (R_1). Effectuons, à cet effet, la représentation sphérique de (R_1) en prenant les traces, sur Σ, des perpendiculaires abaissées du centre O sur les plans osculateurs aux différentes courbes de (R_1) [c'est-à-dire sur les plans tangents au support de (R_1) le long des différentes courbes de (R_1)]. Nous obtenons ainsi une famille de courbes (L_1) sur Σ. Adjoignons à (L_1) l'une quelconque des familles (L_2) (dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument) formant avec (L_1) la représentation asymptotique d'une surface. Chacune de ces familles donne une surface S dont l'un des réseaux demi-asymptotiques (R) est parallèle au réseau donné (R_1).

En menant, par chaque point m_1 de la surface support de (R_1), la parallèle à la droite joignant un point fixe ω de l'espace au point correspondant m de l'une quelconque des surfaces S que l'on vient d'obtenir, on obtient toutes les congruences paraboliques conjuguées au réseau (R_1).

En déplaçant le point fixe ω sur une droite ou dans un plan on met en évidence, pour chaque choix de la surface S associée à S_1, ∞^1 ou ∞^2 congruences paraboliques conjuguées à (R_1) dont les rayons homologues forment des faisceaux plans ou des gerbes homographiques.

20. Pour donner des exemples de couples de surfaces en correspondance ponctuelle telle que l'un des systèmes d'asymptotiques de l'une corresponde à l'un des systèmes d'asymptotiques de l'autre, les tangentes à deux asymptotiques correspondantes en deux points homologues se coupant et formant un angle constant α, on peut recourir au tore déjà envisagé au n° 14.

Soient I_1, I_2 les points du tore situés sur l'axe de révolution et α l'angle sous lequel l'axe coupe la surface. Envisageons l'une quelconque (R) des deux familles d'asymptotiques du tore. Construisons, par le procédé indiqué au numéro précédent, l'une quelconque des surfaces S parallèles au tore suivant le réseau demi-asymptotique (R'). Si m est un point quelconque de l'une de ces surfaces et m' le point correspondant du tore, il suffit de mener, par m, les parallèles D_1 et D_2 à I_1m', I_2m', pour obtenir deux congruences paraboliques (D_1), (D_2) dont les nappes focales S_1 et S_2 sont dans la relation voulue. Les tangentes aux asymptotiques homologues de S_1 et S_2 en deux points homologues quelconques sont les droites D_1, D_2 et ces droites sont bien concourantes et forment l'angle constant α.

21. Je voudrais, pour terminer ce travail, signaler une propriété des surfaces de révolution se rattachant directement à la construction, indiquée au n° 3, des congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme. Cette propriété met en relation une surface de révolution arbitraire avec l'hélicoïde minima réglé et peut être ainsi formulée :

Toute surface de révolution est représentable ponctuellement sur l'hélicoïde minima réglé avec orthogonalité des éléments linéaires.

On peut parvenir au résultat énoncé en cherchant les congruences *normales* de Ribaucour (G) déterminant sur la surface moyenne S un réseau orthogonal isotherme (R).

Supposons S rapportée au réseau (R), et soient u et v les paramètres fixant les deux familles de courbes du réseau. Soient m un point quelconque de S et m' son homologue sur la surface S′ support du réseau (R′) transformé de Christoffel de (R). Le rayon (D) d'une congruence (G), répondant à la question, issu du point m, est la parallèle, menée par m, à la droite Om' joignant m' à un certain point fixe O de l'espace.

La congruence (G) étant normale, ses plans focaux issus du rayon D sont rectangulaires, et comme ils doivent couper le plan tangent en m à S suivant les deux tangentes rectangulaires mU, mV aux courbes u (variable) et v du réseau (R), il faut que la droite D soit perpendiculaire à l'une au moins des deux tangentes mU, mV du réseau.

Supposons, par exemple, que D soit normale à mU. Alors Om' est normale à la courbe u du réseau (R′), qui, de ce fait, est tracée sur une sphère de centre O. Le réseau (R′) transformé de Christoffel de (R) est donc tel que ses courbes u sont situées sur une famille de sphères concentriques (de centre O). Ces courbes étant lignes de courbure pour la surface S′ support du réseau, S′ est une surface moulure à directrice conique (de sommet O).

Si D est normale à la fois à mU et mV, S′ devant avoir ses deux familles de lignes de courbure situées sur des sphères de centre O se réduit à une sphère de centre O. (R) est alors le réseau transformé de Christoffel d'un réseau orthogonal isotherme sphérique et son support S est une surface minima.

Une première famille de congruences normales de Ribaucour déterminant sur la surface moyenne un réseau orthogonal isotherme est donc constituée par les congruences des normales aux surfaces minima; cette solution particulière était évidente *a priori*.

Plaçons-nous dans le cas général où D n'est normale qu'à mU. S′ est alors, comme nous l'avons vu, une surface moulure à directrice conique sur laquelle le réseau de courbure (u, v) est orthogonal isotherme (surface isothermique). Or il est bien connu que les seules surfaces moulures isothermiques sont les surfaces de révolution. S′ est donc une surface de révolution (arbitraire) et

S est sa transformée de Christoffel, de révolution comme S′ et d'axe parallèle à celui de S′.

Les congruences (G) actuelles sont, comme l'on voit, les congruences des normales d'une surface de révolution arbitraire. Il était évident *a priori* que les congruences des normales aux surfaces de révolution fourniraient des solutions du problème puisque le réseau moyen d'une telle congruence est porté par une surface de révolution sur laquelle le réseau (u, v) est réseau de courbure (donc isotherme). Mais nous voyons en outre que ces congruences (avec les congruences des normales aux surfaces minima) constituent les seules solutions du problème envisagé.

Le résultat obtenu, assez banal en soi, peut prendre un certain intérêt si l'on a égard à la construction générale des congruences de Ribaucour à partir de leurs surfaces génératrices. D'une façon générale les plans focaux d'une congruence de Ribaucour sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de la surface génératrice, laquelle correspond à la surface moyenne de la congruence avec orthogonalité des éléments linéaires, l'image sphérique des développables de la congruence étant celle des lignes asymptotiques de la génératrice. Si la congruence est normale, sa génératrice est une surface minima. Dans le cas qui nous occupe, où la congruence est la congruence des normales d'une surface de révolution, l'image sphérique des développables est formée par une famille de cercles parallèles et par les méridiens orthogonaux. Cette image étant aussi celle des asymptotiques de la surface génératrice. cette dernière est *quelle que soit* la congruence de révolution envisagée, l'*hélioïde minima réglé*.

Toute surface de révolution pouvant évidemment être regardée comme la développée moyenne d'une surface de révolution, ce qui précède nous montre que *toute surface de révolution d'axe* Δ *est susceptible d'une représentation avec orthogonalité des éléments linéaires sur un hélicoïde minima réglé d'axe* Δ.

Les formules permettant de passer, par une transformation par éléments linéaires orthogonaux, de l'hélicoïde minima réglé à une surface de révolution quelconque de même axe, sont faciles à obtenir

Négligeant une homothétie, donnons-nous l'hélicoïde minima $(\mathcal{H})$ par les équations

$$(19)\qquad \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = v. \end{cases}$$

Les paramètres directeurs de la normale au point (u, v) sont $(\sin v, -\cos v, u)$. Une congruence de normales à une surface de révolution autour de Oz, (G), pouvant, comme on l'a vu, être considérée comme une congruence de Ribaucour de surface génératrice $(\mathcal{H})$, il suffit pour obtenir une surface de révolution quelconque en correspondance par éléments linéaires ortho-

gonaux avec $(\mathcal{H})$, de se donner (G), d'établir une correspondance par plans tangents et rayons orthogonaux entre $(\mathcal{H})$ et (G), et de faire correspondre à tout point de $(\mathcal{H})$ le point moyen du rayon correspondant de (G).

Définissons (G) en nous donnant l'une de ses surfaces orthogonales Σ, laquelle sera définie tangentiellement par une équation de la forme

$$\sin v\,X - \cos v\,Y + u\,Z - f(u) = 0.$$

f étant une fonction arbitraire de la seule variable u. Les coordonnées du point (u, v) de Σ sont

$$\begin{aligned} X &= -\sin v\,(uf' - f),\\ Y &= \cos v\,(uf' - f),\\ Z &= f'. \end{aligned}$$

La normale à Σ au point (u, v) est définie par les équations

$$\begin{aligned} X &= -\sin v\,(uf' - f) + \lambda \sin v,\\ Y &= \cos v\,(uf' - f) - \lambda \cos v,\\ Z &= f' + \lambda u. \end{aligned}$$

La valeur de λ correspondant au point moyen s'obtient sans difficulté et donne (une homothétie étant négligée) pour les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ de ce point les expressions

$$(20)\qquad \begin{cases} \bar{x} = [f - uf' - (1+u^2)f'']\sin v,\\ \bar{y} = -[f - uf' - (1+u^2)f'']\cos v,\\ z = (2+u^2)f' - uf - u(1+u^2)f''. \end{cases}$$

Les équations (20), où f est une fonction arbitraire de u, définissent la surface de révolution la plus générale, mise en relation d'orthogonalité des éléments linéaires avec l'hélicoïde minima réglé défini par les équations (19). Les points correspondants sont ceux de mêmes coordonnées curvilignes (u, v).

22. Le résultat du numéro précédent explique géométriquement la possibilité de résoudre complètement, pour l'hélicoïde minima réglé, le problème de la déformation infiniment petite.

Le problème général de la déformation infiniment petite d'une surface a été ramené, par Weingarten et Darboux, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre (équation *caractéristique*), et sa solution dépend linéairement de deux fonctions arbitraires d'une variable. Pour l'hélicoïde minima réglé rapporté à ses asymptotiques, l'équation caractéristique est une équation de Laplace admettant un invariant nul, d'où la possibilité indiquée.

Dans certains cas cette possibilité peut être mise en évidence par deux circonstances géométriques, assurant chacune l'existence d'une solution particulière du problème dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable;

la solution générale résulte alors de la superposition des deux solutions particulières. C'est ce qui arrive en particulier pour les quadriques (surfaces doublement réglées).

D'une façon générale, toute surface réglée admet une infinité de déformations finies (donc aussi infiniment petites) laissant les génératrices *rectilignes* et dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable. Pour l'hélicoïde minima réglé, on a donc une première solution du problème de la déformation infiniment petite dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, due à l'existence des génératrices rectilignes. Une deuxième solution du même problème, distincte de la précédente et dépendant aussi d'une fonction arbitraire d'une variable, est fournie par les déformations infiniment petites attachées aux représentations avec orthogonalité des éléments linéaires de l'hélicoïde minima réglé sur les différentes surfaces de révolution admettant pour axe l'axe de l'hélicoïde. La superposition de ces deux solutions particulières fournit la solution complète du problème.

Il convient d'observer que la correspondance par éléments linéaires orthogonaux entre l'hélicoïde minima réglé (19) et la surface de révolution (20) permet de construire une infinité de congruences W dont l'une des deux nappes focales est une surface de révolution (arbitraire).

On sait que l'on obtient la congruence W la plus générale admettant pour première nappe focale une surface S quelconque, en envisageant une déformation infiniment petite quelconque de S et en menant, par chaque point de S, dans le plan tangent, la perpendiculaire à la direction du déplacement infiniment petit du point dans la déformation infinitésimale considérée. Cela étant, envisageons pour une surface de révolution quelconque (R) définie par les formules (20), la déformation infiniment petite fournie par la correspondance par orthogonalité des éléments entre (R) et l'hélicoïde minima réglé $(\mathcal{H})$ défini par les équations (19). La direction du déplacement infiniment petit d'un point quelconque $M(u, v)$ de (R) dans cette déformation a pour paramètres directeurs les coordonnées du point (u, v) de $(\mathcal{H})[u\cos v, u\sin v, v]$. D'autre part, si l'on pose

$$(21)\qquad \begin{cases} A = f - uf' - (1+u^2)f'', \\ B = (2+u^2)f' - uf - u(1+u^2)f''', \end{cases}$$

la direction de la normale au plan tangent en M à (R) a pour paramètres directeurs

$$-B'\sin v,\quad B'\cos v,\quad A'.$$

Le rayon de la congruence W issu du point M de (R) étant perpendiculaire aux deux directions précédentes, ses paramètres directeurs sont

$$\begin{aligned} &B'\varphi\cos v - A'u\sin v,\\ &B'\varphi\sin v + A'u\cos v,\\ &-B'u. \end{aligned}$$

Les équations de la congruence W sont donc

$$\begin{aligned} x &= \quad A\sin v + \lambda(B'v\cos v - A'u\sin v),\\ y &= -A\cos v + \lambda(B'v\sin v + A'u\cos v),\\ z &= \quad B - \lambda B'u, \end{aligned}$$

λ étant le paramètre fixant les différents points (x, y, z) d'un rayon quelconque (u, v). A et B ayant les expressions (21) où f est une fonction arbitraire de u, et A′, B′ désignant les dérivées de A, B par rapport à u.

Si l'on fait subir à l'hélicoïde $(\mathcal{H})$ une translation h de direction quelconque δ, on ne modifie pas la relation d'orthogonalité entre $(\mathcal{H})$ et (R). Chaque valeur de h donne une congruence W admettant pour première nappe focale la surface de révolution (R). On obtient ainsi, pour chaque direction δ, ∞^1 congruences W dont les faisceaux de rayons homologues (relatifs aux différents points de R) sont évidemment homographiques.

Il est bien connu d'ailleurs que, d'une façon générale, toute congruence W, admettant pour première nappe focale une surface S, fait partie d'une infinité de familles de ∞^1 congruences W admettant la même première nappe focale, les faisceaux de rayons homologues d'une même famille situés dans les différents plans tangents à S étant homographiques.

Dans le cas actuel, la famille des ∞^1 congruences W obtenues en déplaçant $(\mathcal{H})$ parallèlement à Oz, est définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= \quad A\sin v + \lambda[B'(v+h)\cos v - A'u\sin v],\\ y &= -A\cos v + \lambda[B'(v+h)\sin v + A'u\cos v],\\ z &= \quad B - \lambda B'u, \end{aligned}$$

où h est une constante arbitraire.

LES

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

PAR M. P. LELONG.

I. — Introduction.

1. Je me propose, dans ce Mémoire, d'étudier une classe (L) de fonctions réelles dont l'étude systématique est en rapport avec celle des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

La classe (L) est constituée par des fonctions définies dans des domaines de l'espace C^n des n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ces fonctions sont semi-continues supérieurement du point M de coordonnées (z_k). La classe (L) est invariante dans son ensemble par les transformations analytiques faites sur les z_k et comprend les deux sous-ensembles suivants :

1° Les fonctions sousharmoniques dans le plan complexe C^1, ensemble auquel se réduit (L) pour $n = 1$;

2° Les fonctions de la forme $\log|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ où f est holomorphe dans un domaine de C^n.

Je désignerai par (L_1) ce dernier sous-ensemble qui contient en particulier les parties réelles des fonctions holomorphes. Pour celles-ci j'adopterai le nom de *fonctions pluriharmoniques* (1) et j'appellerai en conséquence *plurisousharmoniques* les fonctions étudiées dans ce Mémoire.

Dans un précédent travail (2) j'avais été conduit à grouper un certain nombre de propriétés des fonctions holomorphes de *deux* variables complexes. J'utilisais, en effet, pour les établir, une même méthode de démonstration qui consistait, pour l'essentiel, à déterminer une correspondance entre la propriété

(1) Au lieu du terme *biharmonique* employé quelquefois.

(2) *Ann. Éc. Norm.*, t. 58, 1941, p. 83-177.

étudiée et une propriété des fonctions sousharmoniques. Les propriétés des fonctions analytiques établies par cette voie étaient toutefois diverses, et s'il était heureux de faire appel aux moyens d'un chapitre déjà très élaboré de la théorie des fonctions de variables réelles, chapitre que des acquisitions d'un très grand prix sont venues récemment enrichir, par contre il était malaisé d'apercevoir plus qu'un rapport d'occasion entre les propriétés des fonctions analytiques ainsi établies, et le champ d'application de la méthode n'apparaissait pas nettement.

Le passage aux fonctions analytiques de plus de deux variables m'a conduit tout d'abord à rechercher une extension de la classe des fonctions sousharmoniques qui formaient l'instrument essentiel de la méthode suivie dans le cas de deux variables. Cette extension à l'espace $C^n(n \geq 2)$, faite avec l'idée d'obtenir une classe invariante par les transformations analytiques de C^n, conduit à la classe (L) des fonctions plurisousharmoniques ainsi qu'on le verra.

L'extension obtenue présente également un intérêt logique. La définition adoptée pour les fonctions plurisousharmoniques délimite en effet le groupe des propriétés rencontrées antérieurement dans l'étude des fonctions analytiques de deux variables et permet d'en fixer le caractère véritable. La première étude de ces fonctions qui est faite ici explique plus généralement le succès de certaines méthodes de la théorie des fonctions de variables réelles pour l'étude de la structure analytique complexe dans le cas $n > 1$.

Parmi les propriétés des fonctions analytiques de n variables, il en est dont l'énoncé ne fait intervenir que le module de ces fonctions [indiquons dès maintenant qu'elles seront rapportées non au module $|f|$, mais à $\log|f|$, c'est-à-dire à la classe (L_1) définie plus haut]. Si l'on s'efforce de grouper celles de ces propriétés qu'on peut déduire directement de l'une d'entre elles, soit (P), il apparaît possible de choisir pour (P) une propriété nullement caractéristique de (L_1), et de conserver cependant parmi celles associées à (P) nombre de propriétés remarquables de (L_1); celles-ci appartiennent donc à une classe (L) plus étendue que la classe (L_1) définie plus haut à partir des modules des fonctions analytiques.

Nous choisirons comme propriété (P) celle qui résulte des deux remarques suivantes : si V est de classe (L_1) dans le domaine D :

1° V a pour trace sur une variété analytique linéaire (plan) à une dimension complexe dans D, soit la constante $-\infty$, soit une fonction sousharmonique;

2° V est bornée supérieurement sur tout compact contenu dans D.

Une fonction $V(-\infty < V < \infty)$ satisfaisant à ces deux conditions sera dite *plurisousharmonique* (définition 1, § II). La suite montrera (§ III) que la classe (L) ainsi définie comprend des fonctions qui ne possèdent que la semi-continuité supérieure.

L'étude faite ici peut donc être présentée encore comme un moyen de grouper un ensemble de propriétés particulières des fonctions analytiques, ou, plus exactement, de leurs modules. Ces propriétés, dont l'ensemble est particulièrement riche pour $n > 1$, ne sont nullement liées à la totalité de la structure analytique complexe, étant l'apanage d'un ensemble de fonctions semi-continues; en conséquence, elles peuvent être déduites de (P) indépendamment des moyens que le caractère holomorphe pourrait offrir (série de Taylor, intégrale de Cauchy, etc.). On conçoit que leur démonstration fasse appel aux méthodes de la théorie des fonctions de variables réelles, et les raisons de succès de celle-ci apparaissent ainsi nettement.

Les considérations qui précèdent contribuent à une classification logique des difficultés qu'on rencontre dans l'étude des fonctions de plusieurs variables complexes. Leur importance et leur diversité soulignent la très grande richesse de la structure analytique pour $n \geq 2$. L'analyse de celle-ci doit conduire, si possible, à en recomposer les éléments à partir des propriétés de structures moins riches; cette tendance aboutit dans des travaux récents à rattacher certaines des difficultés rencontrées à des problèmes portant sur une structure topologique ou algébrique. A côté des propriétés de ces deux ordres, il en existe d'autres parmi lesquelles se groupent les propriétés de la structure analytique complexe dont on a défini l'ensemble en plongeant (L_1) dans la classe plus étendue (L) : ce sont les propriétés d'une fonction holomorphe qui découlent du fait que $\log|f|$ est une fonction plurisousharmonique; on pourra les appeler *propriétés de convexité*, l'image attachée à ce mot s'accordant assez bien avec l'énoncé précis de certaines d'entre elles.

2. Donnons un aperçu des définitions [3] auxquelles nous conduit cette première étude des fonctions plurisousharmoniques. La première d'entre elles (définition 1, § II), fondée sur les deux conditions (P), permet d'établir par récurrence de C^{n-1} à C^n la sommabilité des fonctions étudiées, puis leur semi-continuité (§ III). Chemin faisant sont démontrées des propriétés de la moyenne sur l'arête d'un n-cercle, propriétés qui, associées à la semi-continuité, apportent, par la suite, une seconde définition des fonctions étudiées (théorème 3, § V); elle montre qu'une part importante de la théorie des fonctions sousharmoniques, celle qu'on peut établir sans l'aide de la représentation potentielle de Riesz, trouve son correspondant quand on passe de C^1 à C^n $(n > 1)$; toutefois les propriétés obtenues sont, en un certain sens, plus riches de conséquences précises; on remarquera, à ce propos, que la classe des fonctions de (L) qui ne dépendent que des z_k

[3] Ces définitions ont été indiquées dans deux Notes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 215, 1942, pp. 398 et 454).

est constituée (§ VIII) par les fonctions convexes des variables $u_k = \log|z_k|$, la convexité ayant lieu par rapport à l'*ensemble des variables*].

Une fonction plurisousharmonique dans un domaine de C'' est sousharmonique dans le domaine correspondant de l'espace réel R^{2n} trace de C'' (§ IV). La comparaison des diverses fonctions de masse associées aboutit à un résultat particulièrement simple (théorème 4, § VI); en particulier si la fonction est de classe (L_1), on retrouve ainsi un beau résultat de Poincaré (4) que nous énoncerons : si $f(z_k)$ est une fonction holomorphe dans un domaine D, $\log|f(z_k)|$ est égal, à une fonction harmonique près dans D des variables (x_k, y_k), au potentiel (4) d'une masse de densité 2π répartie sur la variété $f(z_k) = 0$.

Une troisième définition de la classe (L) est obtenue en remarquant qu'une fonction plurisousharmonique qui a des dérivées secondes continues, satisfait à un système d'inégalités aux dérivées partielles (système I, § VI), obtenu en exprimant qu'une forme hermitienne associée à V est positive ou nulle; les coefficients de cette forme sont les composantes d'un tenseur qui généralise la densité de masse potentielle à laquelle il se réduit pour $n = 1$. La classe (L) est formée des fonctions qui satisfont au système I et de celles (à l'exclusion de la constante $-\infty$) qui sont limites de suites non croissantes de telles fonctions, L'extension suivante de la propriété (P) en résulte : une fonction plurisousharmonique a pour trace sur une variété irréductible soit une fonction sousharmonique, soit la constante $-\infty$. On en déduit (§ VII) qu'une fonction plurisousharmonique sur un domaine fermé n'atteint un maximum qu'en un point de pseudo-convexité de la frontière du domaine.

Les familles de fonctions plurisousharmoniques bornées supérieurement possèdent des propriétés simples. Nous définissons (§ IX) une classe (M) plus vaste que (L) à laquelle appartiennent encore les enveloppes supérieures de telles familles. La régularisée supérieure d'une fonction de classe (M) appartient à (L). Une application des fonctions plurisousharmoniques concerne la démonstration de la propriété suivante signalée dans une Note antérieure (5) : si D est un domaine d'holomorphie, la distance à la frontière d'un point intérieur M, comptée parallèlement à une direction fixe de plan analytique à une dimension complexe, est une fonction plurisousharmonique de M. Cette propriété simple (dont on déduirait sans peine la plupart des caractères *nécessaires* de ces domaines) peut être appliquée à l'étude du prolongement analytique d'une fonction de n variables, ainsi que je me propose de le montrer dans un prochain travail.

---

(4) *Mémoire sur le potentiel et les fonctions abéliennes* (*Acta Math.*, t. 22, p. 159). Voir la Note (17), n° 13 du présent travail.

(5) *C. R. Acad. Sc.*, t. 216, 1943, p. 107.

II. — Définition des fonctions plurisousharmoniques.

3. Une fonction réelle et définie dans un domaine de l'espace C^n des n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ peut être notée brièvement sous la forme $V(M)$ d'une fonction de point. La nécessité d'expliciter les coordonnées complexes z_k de M amène toutefois à utiliser la notation $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. C'est celle dont nous ferons usage en général, en observant, une fois pour toutes, que le signe de la fonction précédant les variables complexes z_k n'indique par lui-même qu'une correspondance, la plus générale, sauf mention du contraire.

Exceptionnellement nous considérerons la fonction sur l'espace R^{2n} à $2n$ coordonnées réelles x_k, y_k, qui est la trace de C^n. Nous écrirons alors $V(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)$, en sous-entendant les équations $z_k = x_k + iy_k$ de passage de C^n à R^{2n}.

C'est ainsi qu'une fonction définie sur C^1 (plan complexe) s'écrit soit $V(M)$, soit $V(x, y)$, soit $V(z)$. Cette dernière notation, une fois prise la précaution signalée plus haut, présente quelques avantages pour l'étude des fonctions sousharmoniques (6), classe invariante, comme on sait, par les transformations analytiques de C^1. Pour $n \geq 2$, elle apporte une simplification indispensable à l'écriture des fonctions que nous définirons dans C^n, ces fonctions étant, dans leur ensemble, invariantes par les transformations analytiques faites sur les z_k.

4. Rappelons qu'un ensemble E est une *variété analytique complexe* (7) *dans un domaine* D de C^n si E est fermé sur D et si E est défini au voisinage d'un de ses points M par un nombre fini d'équations $f_p = 0$ (f_p holomorphe au voisinage de M); E sera dit *variété irréductible* dans D si E n'est pas la réunion de deux variétés dans D dont l'une au moins soit distincte de E. Nous ne considérerons que des variétés homogènes W^q, c'est-à-dire ayant en chacun de leurs points même nombre de dimensions complexes (ce nombre figurera en indice supérieur). Nous supposerons de plus qu'elles sont simples, c'est-à-dire que, N désignant le rang du tableau $\left(\frac{\partial f_p}{\partial z_k}\right)$, on n'a pas $N < q$ en tous les points de E appartenant à un voisinage ouvert ω (auquel cas on aurait $N < q$ sur toutes les variétés irréductibles contenues dans E et intersectant ω). Dans ces conditions nous appellerons *réguliers* sur E les points où $N = q$, *singuliers* ceux où $N < q$;

(6) On trouvera dans l'ouvrage de T. Radó, *Subharmonic functions* (*Ergebnisse der Mathematik*, t. 5, 1937, p. 1), la démonstration des propriétés des fonctions sousharmoniques dont la connaissance est nécessaire à la lecture de ce travail; seuls les résultats plus récents ici utilisés feront l'objet d'un renvoi aux Mémoires originaux.

(7) *Voir* en particulier H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 61, 1944, p. 195).

ces derniers forment une variété $E' \subset E$, à $q-1$ dimensions complexes au plus au voisinage d'un de ses points.

Une variété linéaire de C^n sera appelée *plan*, ou plus précisément *variété plane*, quel que soit le nombre de ses dimensions.

La notion de fonction sousharmonique se transpose, par application, de l'espace C^1 à une variété W^1 définie dans un domaine D. Nous dirons que $V(M)$ est *sousharmonique sur la variété irréductible* W^1 si :

1° $V(M)$ possède une valeur bien déterminée $(-\infty \leq V < \infty)$ en tout point de W^1. Il existe un point de W^1 en lequel $V > -\infty$.

2° Si $M(z_k^0)$ est un point régulier de W^1 au voisinage duquel la variété est représentée par le système

$$z_k = \varphi_k(u) \tag{1}$$

(φ_k holomorphe du paramètre complexe u; $\varphi_k(u_0) = z_k^0$), V est sur W^1 une fonction sousharmonique de u au voisinage de u_0.

3° Au voisinage d'un point singulier, où il est besoin de plusieurs systèmes de la forme (1) pour représenter W^1, la condition précédente est réalisée par rapport à chacun d'eux séparément.

5. Nous caractériserons les fonctions plurisousharmoniques par la propriété de leurs traces sur les variétés planes P^1. Remarquons que les définitions adoptées plus haut entraînent que les diverses composantes connexes de l'intersection $D \cap W^q$, où W^q est une variété analytique *dans* C^n, soient comptées comme autant de variétés distinctes *dans* D. Dès lors, si Q^1 est un plan de C^n, chaque composante de l'intersection $Q^1 \cap D$ *constitue une variété plane* P^1 *dans* D.

Définition I. — Nous dirons qu'une fonction V est plurisousharmonique dans un domaine D de C^n si elle satisfait aux conditions suivantes :

(a). *En tout point de* D *elle possède une valeur déterminée, réelle, qui peut être soit une valeur finie, soit la valeur représentée par* $-\infty$. *En un point de* D *au moins cette valeur est finie.*

(b). *Elle possède une borne supérieure finie sur tout compact contenu dans* D.

(c). *Sur une variété plane à une dimension complexe dans* D, *la trace de* V *est une fonction sousharmonique ou vaut identiquement* $-\infty$.

La seconde condition (a) s'énonce encore : la constante $-\infty$ n'est pas une fonction plurisousharmonique.

Dans C^1 on retrouve exactement la classe des fonctions sousharmoniques. Dans C^n pour $n \geq 2$, la classe (L) ainsi définie n'est pas vide : elle contient les fonctions de la forme $C(f) \log |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$, où $C(f)$ est une constante

positive et $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction holomorphe dans D : ces fonctions constituent une classe restreinte qui jouit de propriétés particulières (continuité, disposition de l'ensemble $V = -\infty$). La définition conduit aux remarques suivantes :

1° Soit P^q une variété plane dans D définie en se donnant les z_k linéairement en fonction de q paramètres complexes $u_1, u_2, \ldots, u_q (q < n)$: V est fonction plurisousharmonique de $(u_1, \ldots, u_q)$ sur P^q ou identique à $-\infty$ sur P^q. Les fonctions de la classe restreinte montrent les deux possibilités.

2° Si V est pluriharmonique, $V_1 = aV + b$, où a et b sont deux constantes, $a \geq 0$, $b > -\infty$, est une fonction plurisousharmonique.

3° Si $V_1, V_2, \ldots, V_p$ sont p fonctions plurisousharmoniques, $V = \max V_i$ est plurisousharmonique.

4° Une suite non croissante de fonctions plurisousharmoniques a pour limite soit une fonction de même nature, soit la constante $-\infty$.

5° Nous dirons que $\mathcal{E}$ est un *ensemble polaire* (8) *dans un domaine* D *de* C^n s'il existe une fonction V plurisousharmonique dans D dont l'ensemble $V = -\infty$ coïncide avec $\mathcal{E}$ dans D. La définition 1 a pour conséquence : *un ensemble polaire dans* D *a pour trace sur une variété plane* P^1 *dans* D *un ensemble de capacité extérieure* (9) *nulle ou bien la contient tout entière.*

6° Un ensemble polaire $\mathcal{E}$ ne contient aucun domaine.

Supposons en effet que V soit plurisousharmonique dans un domaine D contenant deux hypersphères S_1, S_2 sécantes et que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble $V = -\infty$. Si $\mathcal{E}$ contenait S_1, il contiendrait aussi S_2, car on peut relier un point M de S_2 à un point Q intérieur à S_1 choisi de manière que M et Q appartiennent à une même variété plane P^1 dans la réunion $S_1 \cup S_2$; sur P^1, $\mathcal{E}$ ne saurait être de capacité extérieure nulle puisqu'il contient un voisinage de Q; il contient donc P^1 et M. Si $\mathcal{E}$ contient une hypersphère S_1 dans D, il contient ainsi toute réunion d'hypersphères deux à deux sécantes à laquelle appartient S_1, donc, en définitive, tout point intérieur à D, contrairement à la condition (a) de la définition 1.

La condition (a) est ainsi réalisée dans tout sous-domaine de D. Nous énoncerons :

Une fonction plurisousharmonique dans D *l'est aussi dans tout domaine intérieur à* D.

(8) L'expression a été formée par M. Brelot pour désigner l'ensemble des infinis (négatifs) d'une fonction sousharmonique dans tout le plan C¹. Il a été établi depuis par H. Cartan (*C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 945), qu'il y a identité entre ces ensembles et les ensembles de capacité extérieure nulle. Il nous paraît sans inconvénient de disposer du mot polaire dans un sens élargi afin d'exprimer une notion qui est nouvelle pour $n \geq 2$.

(9) Un ensemble est dit de capacité extérieure nulle s'il est contenu dans un ensemble ouvert de capacité arbitrairement petite.

La trace d'un ensemble polaire dans D *sur un domaine* $D' \subset D$ *est un ensemble polaire dans* D'.

La propriété 6°, peu précise, constitue un lemme utile pour la suite.

III. — Sommabilité et semi-continuité des fonctions plurisousharmoniques.

6. Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

Théorème 1. — *Les fonctions plurisousharmoniques sont semi-continues supérieurement.*

Admettons l'énoncé pour l'espace C^{n-1} : une fonction V plurisousharmonique dans un domaine D de C^{n-1} est alors mesurable; elle est bornée supérieurement, donc sommable sur un compact de D, l'intégrale pouvant avoir la valeur $-\infty$.

Soit M un point de coordonnées ζ_k. Pour abréger, nous emploierons les notations suivantes :

$C(M, r_1, r_2, \ldots, r_n)$, ou $C(M, r_k)$ désigne l'arête du n-cercle $|z_k - \zeta_k| = r_k$;
$S(M, r_1, r_2, \ldots, r_n)$, ou $S(M, r_k)$ désigne le n-cercle fermé $|z_k - \zeta_k| \leq r_k$.

Nous désignerons par D_r l'ensemble des points de D qui sont centres d'un n-cercle $S(M, r)$ de rayons égaux à r entièrement contenu dans D.

Soit M un point de coordonnées ζ_k, contenu dans D_r et soit σ la variété parcourue par le point m de coordonnées dans C^{n-1}

$$z_k = \zeta_k + r_k e^{i\theta_k}$$

pour $2 \leq k \leq n$, $0 \leq \theta_k \leq 2\pi$. Nous considérerons l'intégrale de Lebesgue étendue à σ

$$(1) \qquad I(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_\sigma V(z_1, m)\, dm$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \zeta_2 + r_2 e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \ldots d\theta_n.$$

Montrons tout d'abord que (1) a un sens. Deux cas sont possibles : ou bien $V(z_1, m)$ vaut identiquement $-\infty$ pour la valeur z_1 considérée quand $m(z_k, k \geq 2)$ varie au voisinage de $m_0(\zeta_k, k \geq 2)$, ou bien $V(z_1, m)$ est une fonction plurisousharmonique de m (remarque 1°, § IV), et alors $V(z_1, m)$ est sommable sur σ. Dans les deux cas l'intégrale $I(z_1)$ a une valeur déterminée, finie ou $-\infty$. Nous établirons que $I(z_1)$ est encore une fonction sommable de z_1 grâce au lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit* $V(z, m)$ *une fonction définie dans le domaine fermé* Δ *qui est le produit des domaines fermés* $z \in d$, $m \in \sigma$, *et possédant les propriétés suivantes :*

1° *elle est bornée supérieurement sur* Δ;

2° *pour m fixé, elle est fonction sousharmonique de z dans le domaine fermé d, ou bien est identique à la constante* $-\infty$;

3° *pour z fixé, elle est fonction semi-continue supérieurement de m dans* σ.

Dans ces conditions, l'intégrale de Lebesgue

$$I(z) = \int_{\sigma} V(z, m)\, dm \tag{2}$$

est une fonction quasi-sousharmonique de z ou vaut identiquement $-\infty$ *dans d.*

Nous disons qu'une fonction est *quasi-sousharmonique* si elle est égale à une fonction sousharmonique, sauf aux points d'un ensemble de capacité extérieure nulle où elle lui est inférieure.

Remarquons pour la démonstration du lemme 1 que, $V(z, m)$ étant semi-continue supérieurement, l'intégrale de Lebesgue (2) peut s'obtenir comme intégrale supérieure de Riemann. Soient $\Delta\sigma_i^p$ les mesures des éléments d'une partition de σ, i étant l'indice de l'élément, p celui de la partition, et soit $\mu_i^p(z)$ le maximum de $V(z, m)$ pour $m \in \Delta\sigma_i^p$. Posons

$$S_p(z) = \sum_i \mu_i^p(z)\, \Delta\sigma_i^p.$$

La fonction $\mu_i^p(z)$ est une enveloppe supérieure de fonctions sousharmoniques (ou identiques à $-\infty$) bornées supérieurement. Dans ces conditions $\mu_i^p(z)$ est une fonction quasi-sousharmonique ([10]) (ou $-\infty$) dans d; $S_p(z)$ est de même nature, ainsi que l'intégrale (2) obtenue comme limite de la suite $S_p(z)$ quand on donne à $\varepsilon_p = \max_i \Delta\sigma_i^p$ une suite de valeurs tendant vers zéro. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Il en résulte que $I(z_1)$, calculé à partir de (1), est fonction quasi-sousharmonique de z_1 (ou est identique à $-\infty$), donc est sommable en z_1 pour $|z_1 - \zeta_1| \leq r$.

Pour abréger, nous conviendrons :

$L(V, M, r_1, \ldots, r_n)$ ou $L(V, M, r_k)$ désigne la moyenne de V sur $C(M, r_k)$ prise par rapport aux $\theta_k (0 \leq \theta_k \leq 2\pi, k = 1, 2, \ldots, n)$.

$A(V, M, r_1, \ldots, r_n)$ ou $A(V, M, r_k)$ désigne la moyenne de V sur le n-cercle $S(M, r_k)$.

Dans ces conditions on a

$$L(V, M, r_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1})\, d\theta_1,$$

([10]) *Voir*, pour ce théorème dû à M. Brelot et H. Cartan : H. Cartan, *C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 945, et M. Brelot, *Ann. Ec. Norm.* t. 61, p. 317.

et le résultat précédent s'énonce :

LEMME 2. — *Soit* V *une fonction plurisousharmonique dans un domaine* D *de* C^n, *et* $S(M, r_k)$ *un n-cercle intérieur à* D : *le théorème* 1 *supposé vrai pour* C^{n-1} *entraîne l'existence de la moyenne* $L(V, M, r_k)$ dans C^n.

7. En utilisant la remarque 6°, n° 4 et une inégalité classique, nous établirons maintenant que $L(V, M, r_k)$ a une valeur finie.

Remarquons tout d'abord que, V étant borné supérieurement, $L(V, M, r_k)$ peut, selon un résultat connu (11), être calculée soit comme intégrale double à partir de (1) et (3), soit comme intégrale étendue à la variété $C(M, r_k)$, soit encore comme intégrale n-uple sous la forme

$$(3)\qquad L(V, M, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} V(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_1 \ldots d\theta_n,$$

l'ordre des n intégrations étant quelconque.

Supposons $M \in D_{2r}$, de manière que pour $r_k < r$, on ait $S(M, r_k) \subset D_r$. Désignons par K une borne supérieure de V sur D_r et majorons V dans $S(M, \tau r_k)$, $0 < \tau < 1$, en fonction de $L(V, M, r_k)$. Pour ce calcul nous supposerons, afin de simplifier l'écriture, que les coordonnées ζ_k de M sont nulles. Notons $l(\xi_1, z_1)$ le noyau de Poisson, égal à la partie réelle du rapport $\frac{\xi_1 + z_1}{\xi_1 - z_1}$, et majorons V en utilisant sa sousharmonicité en z_1 pour $z_2, \ldots, z_n$ fixés. On a, pour $|\xi_1| = r_1$ et $|z_1| = \tau r_1$,

$$(4)\qquad B_\tau = \frac{1-\tau}{1+\tau} \leq l(\xi_1, z_1) \leq \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

Posons $V_1 = V - K$: V_1 est négatif ou nul. En exprimant que V_1 est au plus égal à la fonction harmonique qui prend les mêmes valeurs pour $|\xi_1| = r_1$ et se calcule par l'intégrale de Poisson, nous obtenons

$$(5)\qquad V_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) \leq B_\tau \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_1(r e^{i\theta_1}, z_2, \ldots, z_n)\, d\theta_1.$$

Dans (5) il n'est pas exclu que les deux membres aient pour valeur $-\infty$.

Considérons maintenant z_1 comme seul variable et appliquons la majoration (5) à la fonction V_1 écrite au second membre de (5) : il vient une inégalité analogue où figure une double moyenne. En répétant l'opération par rapport à toutes les variables z_k successivement, nous obtenons la majoration cherchée qui s'écrit, P représentant le point de coordonnées z_k

$$(6)\qquad \begin{cases} V_1(P) \leq B_\tau^n L(V_1, M, r_k), \\ V(P) \leq B_\tau^n L(V, M, r_k) + K(1 - B_\tau^n). \end{cases}$$

(11) Énoncé dû à L. Tonelli. *Voir* SAKS, *Théorie de l'intégrale*, p. 75, édition française, 1933.

Nous énoncerons :

LEMME 3. — *Si* V *est plurisousharmonique sur le n-cercle fermé* $S(M, r_k)$, *et* V *est borné supérieurement par* K, (5) *donne une majoration de* V(P) *dans le n-cercle* $S(M, \tau r_k)$. $0 < \tau < 1$. B_τ *ayant la valeur* (4).

Supposons qu'on ait $L(V, M, r_k) = -\infty$, le n-cercle $S(M, r_k)$ étant intérieur au domaine D où V est plurisousharmonique : (6) montre qu'on a $V(P) = -\infty$ dans $S(M, \tau r_k)$; l'ensemble polaire $V = -\infty$ contient un domaine contrairement à la remarque 6°, paragraphe 4. Ainsi :

LEMME 4. — *Si* V *est plurisousharmonique dans* D, *la moyenne* $L(V, M, r_k)$ *possède une valeur finie pour* $r_k > 0$ *et pour* $S(M, r_k) \subset D$; *elle est fonction non décroissante et convexe de chacune des variables* $u_k = \log r_k$.

La dernière partie de l'énoncé résulte de (3) et du caractère sousharmonique de V par rapport à chacun des z_k séparément; elle entraîne à son tour :

LEMME 5. — *La moyenne* $L(V, M, r_k)$ *possède, quand* M *est fixé et quand le plus grand des* r_k *tend vers zéro, une limite déterminée* $V_0(M)$.

8. Nous sommes maintenant en possession du résultat suivant : V étant une fonction plurisousharmonique dans un domaine de C^n le théorème 1 supposé vrai pour C^{n-1} entraîne dans C^n l'existence et les propriétés de la moyenne $L(V, M, r_k)$ qui sont exprimées par les lemmes 2, 3, 4, 5.

Nous nous proposons maintenant de montrer que ces mêmes propriétés ont pour conséquence la semi-continuité supérieure de V, c'est-à-dire entraînent le théorème 1 pour l'espace C^n.

Nous appelons *régularisée supérieure* [12] d'une fonction A(M) une fonction B(M) égale en chaque point au maximum de Baire de la fonction A(M). Nous écrirons :

$$B(M) = \text{reg. sup. } A(M).$$

B(M) est encore la plus petite majorante de A(M) qui soit semi-continue supérieurement.

En posant

$$V_0(M) = \lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k)$$

---

[12] En un point M considérons une suite de voisinages $S_n(M)$ n'ayant en commun que le point M : le maximum de Baire est la borne inférieure des maxima μ_n de la fonction sur ces voisinages. Dans un travail antérieur (*Thèse Ann. Éc. Norm.*, 58, 1941, p. 98), j'avais, pour une classe de fonctions particulière, considéré les maxima μ'_n sur les ensembles ouverts $S_n(M) - M$ et défini la valeur de la régularisée supérieure en M à partir des μ'_n : pour ces fonctions qui rentrent d'ailleurs dans la classe (M) définie § IX, la plus petite majorante semi-continue supérieurement peut en effet être obtenue de cette manière.

nous nous proposons de montrer successivement les deux égalités

$$V_0(M) = \text{reg. sup. } V(M), \tag{7}$$

$$V_0(M) = V(M). \tag{8}$$

Le théorème 1 en résultera dans l'espace C^n.

L'égalité (7) se démontre comme dans le cas $n=1$. Soit ε quelconque positif : il existe un voisinage ω de M tel que pour $P \in \omega$, on ait

$$V(P) < \text{reg. sup. } V(M) + \varepsilon.$$

Pour $\max r_k$ suffisamment petit, on aura

$$S(M, r_k) \subset \omega.$$

donc

$$L(V, M, r_k) \leq \text{reg. sup. } V(M) + \varepsilon.$$

D'où

$$V_0(M) = \lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) \leq \text{reg. sup. } V(M). \tag{9}$$

Par ailleurs revenons à (6) et posons $\tau = 1 - \eta_1$; il vient $B_\tau = 1 - \eta_1'$, η_1' tendant vers zéro en même temps que η_1. De (6) résulte

$$V(P) \leq (1 - \eta_1') L(V, M, r_k) + \eta_1' K \tag{6'}$$

pour $P \in S(M, \varepsilon r_k)$. Faisons tendre η_1 vers zéro; (6') nous donne

$$\text{reg. sup. } V(M) \leq L(V, M, r_k), \tag{10}$$

quels que soient les $r_k > 0$. Faisons tendre ceux-ci vers zéro; nous obtenons

$$\text{reg. sup. } V(M) \leq \lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) = V_0(M). \tag{11}$$

L'ensemble de (9) et (11) démontre (7).

9. Reste à établir (8) qui s'énonce :

Lemme 6. — *Une fonction plurisousharmonique* $V(M)$ *est égale à la limite de sa moyenne* $L(V, M, r_k)$ *quand* $\max r_k$ *tend vers zéro.*

Posons $\rho = \max(r_2, \ldots, r_n)$ et remarquons que le théorème 1 supposé vrai dans C^{n-1} entraîne pour une fonction plurisousharmonique de C^{n-1} les égalités (7) et (8). On aura donc, en laissant ζ_1 constant,

$$V(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \lim_{\rho = 0} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(\zeta_1, \zeta_2 + r_2 e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \ldots d\theta_n. \tag{12}$$

Cette égalité est en effet vérifiée si $V(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)$ est une fonction plurisousharmonique de $(z_2, \ldots, z_n)$ pour la valeur ζ_1 considérée; elle l'est encore

si, pour cette valeur ζ_1, V vaut identiquement $-\infty$ quand on fait varier $(z_2, \ldots, z_n)$ au voisinage de $(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$.

Ceci posé, $M(\zeta_k)$ étant un point déterminé du domaine D où V est plurisousharmonique, nous considérerons la différence

$$(13) \qquad \varepsilon_\rho(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \zeta_2 + \rho e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + \rho e^{i\theta_n}) \times d\theta_2 \ldots d\theta_n - V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n),$$

où z_1 est variable dans le cercle $|z_1 - \zeta_1| < r_0$; on suppose $\rho < \rho_0$, r_0 et ρ_0 positifs assez petits pour que $S(M, r_0, \rho_0, \ldots, \rho_0)$ soit intérieur à D. Nous distinguerons trois cas selon le comportement de V au point M, le raisonnement ne différant du reste que par des détails :

1° $V(M) > -\infty$: la fonction $\varepsilon_\rho(z_1)$ est alors définie sauf pour les valeurs de z_1 où $V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = -\infty$, valeurs dont l'ensemble e est de capacité nulle dans le cercle $|z_1 - \zeta_1| < r_1$ et est indépendant de ρ; hors de e, on a

$$\varepsilon_\rho(z_1) \geq 0, \quad \varepsilon_{\rho_1}(z_1) \leq \varepsilon_{\rho_2}(z_2) \qquad \text{pour } 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_0$$

et

$$\lim_{\rho = 0} \varepsilon_\rho(z_1) = 0$$

d'après (12) et (13). Considérons alors l'intégrale

$$(14) \qquad J_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_\rho(\zeta_1 + r e^{i\theta_1})\, d\theta_1,$$

où r a une valeur positive inférieure à r_0. Pour $\rho = \rho_0$, J_ρ a un sens, car on a

$$(15) \qquad J_\rho = L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\zeta_1 + r e^{i\theta_1}, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, d\theta_1.$$

Au second membre le premier terme est fini (lemme 4), et il en est de même de l'intégrale qui est supérieure à $V(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = V(M) > -\infty$: J_ρ a donc une valeur finie pour $\rho = \rho_0$. Pour résumer : les fonctions $\varepsilon_\rho(z_1)$ forment une suite de fonctions définies hors de l'ensemble de mesure nulle e, suite non croissante quand ρ tend vers zéro en décroissant, et les intégrales J_ρ, $(\rho < \rho_0)$, sont bornées par J_{ρ_0}. Dans ces conditions on peut affirmer que J_ρ tend vers zéro avec ρ. Le résultat est indépendant de la valeur positive, inférieure à r_0, donnée à r. Or on a

$$(16) \qquad L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) - V(M) = J_\rho + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\zeta_1 + r e^{i\theta_1}, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, d\theta_1 - V(M).$$

Donnons à r une valeur positive r_1 assez petite pour que la différence des deux derniers termes au second membre de (16) soit inférieure à ε pour $r = r_1$.

Prenons ensuite ρ_1 de manière que J_{ρ_1} soit, lui aussi, inférieur à ε. Nous aurons

$$0 < L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) - V(M) < 2\varepsilon,$$

pour $r < r_1$, $\rho < \rho_1$, ce qui démontre le lemme 6 dans le cas étudié.

2° Supposons $V(M) = -\infty$, la fonction $V(z, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ de z n'étant pas identique à $-\infty$ au voisinage de $z = \zeta_1$ pour les coordonnées $\zeta_2, \ldots \zeta_n$ considérées. L'ensemble $V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = -\infty$ est encore un ensemble de capacité nulle e (auquel appartient maintenant la valeur $z_1 = \zeta_1$ correspondant au point M); (13) définit $\varepsilon_\rho(z)$ sauf sur e; (15) montre que J_ρ a encore une valeur finie et tend vers zéro avec ρ. L'intégrale au second membre de (15) a pour limite $-\infty$ quand r tend vers zéro. On choisira r_0 pour que cette intégrale soit inférieure à $-N$, puis ρ_0 pour que J_{ρ_0} soit inférieur à l'unité. On aura alors d'après (5)

$$L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) < -N + 1 \qquad \text{pour } r < r_0, \rho < \rho_0.$$

On a donc

$$\lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) = -\infty = V(M).$$

3° Supposons enfin que pour les valeurs $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ considérées et pour $|z_1 - \zeta_1| \leq r_0$, $V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ soit identique à $-\infty$: (13) n'a plus de sens; nous poserons

$$\lambda_\rho(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \zeta_2 + \rho e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + \rho e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \ldots d\theta_n.$$

On a

$$\lambda_{\rho_1}(z_1) < \lambda_{\rho_0}(z_1) \quad \text{pour } \rho_1 < \rho_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\rho = 0} \lambda_\rho(z_1) = -\infty,$$

quel que soit z_1 dans le cercle $|z_1 - \zeta_1| \leq r_0$. L'intégrale

$$J'_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_\rho(\zeta_1 + r e^{i\theta_1})\, d\theta_1$$

a un sens et vaut $L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho)$: si l'on fixe $r (r < r_0)$, elle tend vers $-\infty$ quand ρ tend vers zéro. On a donc encore

$$\lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) = -\infty = V(M),$$

ce qui établit le lemme 7 dans le troisième des cas possibles.

Les propriétés (7) et (8) sont ainsi démontrées sous la forme

$$\text{rég. sup. } V(M) = \lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) = V(M)$$

égalités dont la comparaison établit le théorème 1.

IV. Fonctions plurisousharmoniques de C^n et fonctions sousharmoniques de R^{2n}.

10. Dans la démonstration du théorème 1 interviennent seules les propriétés de la fonction $V(M)$ sur les plans P^1 obtenus en laissant constants $n-1$ des z_k. Nous considérerons trois classes de fonctions (A), (B), (L).

(A) désigne les fonctions sousharmoniques dans un domaine de R^{2n}.

(B) désigne l'ensemble des fonctions V satisfaisant dans un domaine de C^n aux conditions (a), (b) de la définition 1, et à la condition (c_1) :

(c_1). P^1 *étant une variété plane (dans le domaine de définition de la fonction) obtenue en donnant à* $n-1$ *des* z_k *des valeurs constantes,* V *est sousharmonique sur* P^1 *ou y vaut identiquement* $-\infty$.

(L) désigne enfin la classe des fonctions plurisousharmoniques dans un domaine de C^n.

La démonstration du théorème 1 s'applique au résultat plus précis.

Théorème 1 *bis*. — *Les fonctions de la classe* (B) *sont semi-continues supérieurement.*

Les classes (A), (B), (L) sont donc toutes trois semi-continues : nous allons les comparer. Remarquons que (B) possède les propriétés établies, chemin faisant, au paragraphe 7 ; on a, en particulier, pour une fonction $V \in (B)$

$$V(M) \leq L(V, M, r_k). \tag{1}$$

Nous en déduirons :

Théorème 2 *bis*. — *La classe* (B) *est contenue dans* (A).

Il nous suffira en faisant appel à une propriété bien connue des fonctions sousharmoniques de démontrer que $V(M)$ est au plus égal à la moyenne de V sur une hypersphère Σ de centre M intérieure au domaine D de définition de la fonction. Nous désignerons par ζ_k les coordonnées de M ; celles d'un point de Σ sont de la forme

$$z_k = \zeta_k + r_k e^{i\theta_k} \qquad \text{avec} \quad \sum_k r_k^2 = R^2,$$

R étant le rayon de Σ ; l'élément d'aire $d\sigma$ sur Σ a pour expression

$$d\sigma = h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}\, d\theta_1 \ldots d\theta_n.$$

où $h(r_1, \ldots, r_{n-1})$ est positif. On a donc

$$\int_\Sigma d\sigma = (2\pi)^n \int h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1},$$

$$\int_\Sigma \mathrm{V}\, d\sigma = \int_\Sigma \mathrm{V}(\zeta_k + r_k e^{i\theta_k})\, h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}\, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$
$$= (2\pi)^n \int \mathrm{L}(\mathrm{V}, \mathrm{M}, r_k)\, h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}.$$

ou, encore, d'après (1),

$$\int_\Sigma \mathrm{V}\, d\sigma = (2\pi)^n \mathrm{V}(\mathrm{M}) \int h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1} = \mathrm{V}(\mathrm{M}) \int_\Sigma d\sigma,$$

ce qui démontre le théorème 2 *bis*. Pour achever d'ordonner (A), (B), (L), remarquons que (c_1) est moins restrictif que la condition (c) de la définition 1 : on a donc $(\mathrm{L}) \subset (\mathrm{B})$ et pour résumer

$$(\mathrm{L}) \subset (\mathrm{B}) \subset (\mathrm{A}).$$

Ainsi donc :

Théorème 2. — *Une fonction plurisousharmonique de C^n a pour trace une fonction sousharmonique sur R^{2n}.*

En particulier un ensemble polaire dans un domaine D de C^n est un ensemble de capacité extérieure nulle (au sens de la capacité dans R^{2n}); un tel ensemble est donc de mesure nulle dans R^{2n}. En voici une conséquence : si $V_1, \ldots, V_p$ sont p fonctions plurisousharmoniques dans D, $V = V_1 + \ldots V_p$ est de même nature; en effet il existe un point de D où l'on a $V > -\infty$, D ne pouvant être la somme d'ensembles de mesure nulle en nombre fini.

V. — Propriétés caractéristiques des moyennes sur un n-cercle.

11. Parmi les domaines appelés n-cercles, nous comprendrons non seulement les domaines déterminés par n inégalités de la forme $|z_k - \zeta_k| < r_k$, mais encore tous ceux qui en résultent par un changement de coordonnées dans C^n. Un n-cercle quelconque sera défini par n inégalités

$$\left| \sum_i a_{ik}(z_k - \zeta_k) \right| < r_k.$$

où le tableau (a_{ik}) est formé des coefficients d'une transformation orthogonale et unitaire :

$$\sum_i a_{ip}\overline{a_{iq}} = \delta_{pq}, \quad \delta_{pq} = 0 \text{ si } p \neq q, \quad \delta_{pq} = 1 \text{ si } p = q.$$

Les rayons r_k sont des nombres *positifs*; le point de coordonnées (ζ_k) est le *centre* du n-cercle; la variété à n dimensions réelles

$$\sum_i a_{ik}(z_k - \zeta_k) = r_k e^{i\theta_k} \qquad (0 \leq \theta_k \leq 2\pi)$$

est l'*arête* du n-cercle.

Des trois classes semi-continues supérieurement (A), (B), (L) du paragraphe IV, la première est caractérisée par la propriété de la moyenne sur la frontière à $2n-1$ dimensions réelles d'une hypersphère, la seconde par la propriété de la moyenne sur l'arête d'un n-cercle dont les faces sont parallèles aux plans coordonnés; enfin les fonctions plurisousharmoniques le sont par la propriété de leurs moyennes sur l'arête d'un n-cercle *quelconque*. Nous démontrerons en effet

THÉORÈME 3. — *Pour qu'une fonction* $V(-\infty \leq V < \infty,\ V \not\equiv -\infty)$ *définie dans un domaine* D *soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'elle possède les propriétés suivantes :*

(α). V *est semi-continue supérieurement dans* D.

(β) *A tout point* $M \in D$ *correspond un nombre positif* $\rho(M)$ *tel que la moyenne de* V *sur l'arête d'un n-cercle quelconque de centre* M, *de rayons positifs inférieurs à* $\rho(M)$, *soit au moins égale à* $V(M)$.

Pour qu'une fonction soit plurisousharmonique, il faut et il suffit, bien évidemment, qu'elle soit de classe (B) et le demeure par tout changement de coordonnées de C^n. Donc le théorème 3 équivaut au

LEMME 1. — *Pour qu'une fonction* $V(M)$ *soit de classe* (B) *dans un domaine* D, *il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition* (α) *et à la condition*

(β_1) *A tout point* M *de* D *correspond un nombre positif* $\rho(M)$ *tel que*

$$V(M) \leq L(V, M, r_k) \qquad \text{pour } 0 < r_k < \rho(M).$$

Si l'on remplace dans les hypothèses du lemme 1 la condition (β_1) par la condition (β_2) qui n'en diffère que par l'inégalité moins restrictive $0 \leq r_k < \rho(M)$, l'énoncé est immédiatement établi. En effet prenons $r_1 > 0$, $r_2 = r_3 \ldots = r_n = 0$; l'inégalité $V(M) \leq L(V, M, r_k)$ montre, associée à (α), que V est sousharmonique de z_1 variant seul, ou vaut identiquement $-\infty$.

Tout revient donc à montrer que (α), (β_2) entraînent (β_1). Ce point résulte à son tour des remarques suivantes que nous présenterons sous forme de lemmes :

LEMME 2. — *Si* V *est une fonction semi-continue supérieurement,* $e(t)$ *un ensemble fermé qui se déforme continûment en fonction du paramètre réel* t, *le maximum de* $V(M)$ *pour* $M \in e(t)$ *est une fonction semi-continue supérieurement de* t.

En effet si pour $t = t_0$ ce maximum vaut A, l'ensemble $V < A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, étant ouvert, constitue un voisinage de $e(t_0)$, donc contient $e(t_0)$ pour $|t - t_0| < \eta_1$.

Pour assurer la semi-continuité de la moyenne de V sur un ensemble fermé $\sigma(t)$ qui se déforme continûment en fonction d'un paramètre réel t, nous sommes amené à faire des hypothèses plus précises: ces hypothèses seront réalisées en particulier, quand $\sigma(t)$ sera une variété dépendant analytiquement de t, ne conservant pas nécessairement un nombre de dimensions constant quand t varie; $\sigma(t)$ pourra en particulier se réduire à un point auquel cas la moyenne de V sera la valeur de V en ce point. Nous supposerons que les conditions suivantes (*conditions* C) sont réalisées pour $|t - t_0| < h$.

1° Sur $\sigma(t)$ est définie une mesure $\mathfrak{M}_t$ (ou répartition de masses positives) faisant correspondre un nombre positif (mesure ou masse portée) à chaque sous-ensemble fermé, la mesure de $\sigma(t)$ avec $\mathfrak{M}_t$ étant égale à l'unité.

2° Entre $\sigma(t)$ et $\sigma(t_0)$ existe une correspondance $\Gamma(t)$ de manière qu'à tout point M de $\sigma(t_0)$ corresponde un ensemble $e(t, M)$ de $\sigma(t)$, un point de $\sigma(t)$ appartenant à un ensemble $e(t, M)$ et à un seul.

3° ε étant un nombre positif quelconque, il lui correspond un nombre $\eta(\eta_1 < h)$ tel que :

a. l'ensemble $e(t, M)$ est intérieur à l'hypersphère de centre M, de rayon ε pour tout $M \in \sigma(t_0)$ et tout t de l'intervalle $|t - t_0| < \eta_1$.

b. ω_t désignant la mesure d'un ensemble (ω_t) de $\sigma(t)$ par $\mathfrak{M}_t$, on a

$$(1 - \varepsilon)\omega_0 < \omega_t < (1 + \varepsilon)\omega_0$$

pour tout couple d'ensembles (ω_0), (ω_t) en correspondance par $\Gamma(t)$ et pour tout t de l'intervalle $|t - t_0| < \eta_1$.

LEMME 3. — *Si la déformation de* $\sigma(t)$ *satisfait aux conditions* C *pour les valeurs de* t *voisines de* t_0 *et si* $V(M)$ *est semi-continue supérieurement, la moyenne de* $V(M)$ *sur* $\sigma(t)$ *au sens de la mesure* $\mathfrak{M}_t$ *est semi-continue supérieurement pour* $t = t_0$.

Soient, en effet, (ω_0^i) les éléments d'une partition de $\sigma(t_0)$ en domaines fermés n'ayant en commun deux à deux que des points formant un ensemble de mesure nulle sur $\sigma(t_0)$; nous choisirons la partition assez fine pour qu'on ait, μ^i désignant le maximum de V sur (ω_0^i),

$$L_0 = \int_{\sigma(t_0)} V(M)\, d\sigma > \sum_i \omega_0^i \mu^i - \varepsilon, \tag{1}$$

ε donné positif. Nous choisirons ensuite $|t - t_0| < \eta_1$ de manière que l'ensemble $V < \mu^i + \varepsilon$ contienne l'ensemble (ω_t^i) pour tous les indices i, ce qui

est possible d'après la semi-continuité de V et la condition C, (3^o, α). Dans ces conditions, on aura, L_t désignant la moyenne de V sur $\sigma(t)$

$$L_t = \int_{\sigma_t} V(M)\, d\sigma < \sum_i (\mu^i + \varepsilon)\omega_t^i < \varepsilon + \sum \mu^i \omega_t^i.$$

Mais

$$\omega_t^i < (1+\varepsilon)\omega_{t_0}^i \qquad \text{pour} \quad |t - t_0| < \tau_i'.$$

Donc

$$L_t < \varepsilon + (1+\varepsilon)\sum_i \mu^i \omega_{t_0}^i < \varepsilon + (1+\varepsilon)(L_0 + \varepsilon)$$

pour $t - t_0$ suffisamment petit. On a donc $L_t < L_0 + \varepsilon'$, quand L_0 a une valeur finie, pour t voisin de t_0, ce qui démontre la semi-continuité supérieure de la moyenne L_t quand L_0 est finie. La démonstration s'étend sans peine au cas $L_0 = -\infty$ en remplaçant (1) par $\Sigma \mu^i \omega_{t_0}^i < -N$, N positif arbitrairement grand.

Appliquons le lemme 3 au cas où $t_0 = 0$, et $\sigma(0)$ est la variété $C(M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$ définie par

$$z_1 = \zeta_1, \quad \ldots, \quad z_{p-1} = \zeta_{n-1}, \quad z_p = \zeta_p + r_p e^{i\theta_p}, \quad \ldots, \quad z_n = \zeta_n + r_n e^{i\theta_n},$$

ζ_k, r_k étant constants, θ_q variable ($0 \leq \theta_q \leq 2\pi$, $p \leq q \leq n$). Cette variété est limite de $C(M, r_1, \ldots, r_n)$ pour $t = \max(r_1, \ldots, r_{p-1})$ tendant vers zéro et les conditions C sont réalisées au voisinage de $t = 0$. On aura donc si $L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$ désigne la moyenne de V sur $C(M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$:

soit

$$L(V, M, r_1, \ldots, r_n) < L(V, M, 0, \ldots, 0, 2p, \ldots, r_n) + \varepsilon;$$

soit

$$L(V, M, r_1, \ldots, r_n) < -N \qquad \text{pour} \quad |t| < \tau_i,$$

selon que $L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$ est fini ou non. Dans le second cas on a $V(M) = -\infty$. Dans le premier la condition (β_2), soit

$$V(M) \leq L(V, M, r_1, \ldots, r_n) \qquad \text{entraîne} \qquad V(M) \leq L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n) + \varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, donc $V(M) \leq L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$, soit, *dans tous les cas la condition* (β_1). Le lemme 1 en résulte. Le théorème 3 est ainsi établi.

12. Le théorème 3 permet d'affirmer dans de nombreux cas qu'une fonction est plurisousharmonique *à condition qu'elle soit semi-continue supérieurement.*

Ce dernier point pourra quelquefois être établi au moyen du lemme 2 ou du lemme 3.

1° Soit $V(M, P)$ une famille de fonctions plurisousharmoniques dans D dépendant du paramètre P, et soit e un ensemble dans l'espace du paramètre P. Posons

$$W_1(M) = \max_{P \in e} V(M, P).$$

Si $W_1(M)$ *est semi-continue supérieurement*, $W_1(M)$ *est plurisousharmonique dans* D : on appliquera le théorème 3 en remarquant que

$$W_1(M) \leq \max_{P \in e} L[V(M, P), M, r_k] \leq L(W_1, M, r_k).$$

2° Même résultat pour la fonction

$$W_2(M) = \int_e d\mu(P)\, V(M, P),$$

où $\mu(P)$ est une fonction *positive* d'ensemble définie sur e,

3° En particulier soit $V(M, P) = V(M + P)$, $M + P$ désignant le point de coordonnées $\zeta_k + \zeta'_k$ quand M a pour coordonnées ζ_k, P pour coordonnées ζ'_k. D'après le lemme 2, *si e est un ensemble fermé* (13)

$$W_1(M) = \max_{P \in e} V(M + P)$$

est plurisousharmonique.

4° Soit encore

$$W_2(M) = \int_e V(M + P)\, d\mu(P).$$

L'intégration se fait sur les ensembles e_M obtenus à partir de e par la translation M; les conditions du lemme 3 sont réalisées (au besoin après multiplication de la fonction de masse par un nombre constant, de manière que la masse totale sur e ait pour valeur l'unité); dans ces conditions $W_2(M)$ est *une fonction plurisousharmonique*, étant semi-continue supérieurement d'après le lemme 3.

5° En particulier

$$L(V, M, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(\zeta_k + z_k e^{i\theta_k})\, d\theta_1 \ldots d\theta_n \qquad (|z_k| = r_k)$$

est une fonction plurisousharmonique (14) à la fois de $M(\zeta_k)$ et de $P(z_k)$; en P elle ne dépend que des modules $|z_k|$.

6° Si V est plurisousharmonique, la fonction

$$W_3 = \max V(z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}, z_{p+1} e^{i\theta_{p+1}}, \ldots, z_n e^{i\theta_n})$$

pour z_k constant et θ_η variable ($0 \leq \theta_q \leq 2\pi$, $p+1 \leq q \leq n$) est une fonction plurisousharmonique de $(z_1, \ldots, z_n)$. De même

$$W_4 = \frac{1}{(2\pi)^{n-p}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \ldots, z_p, z_{p+1} + z'_{p+1} e^{i\theta_{p+1}}, \ldots, z_n + z'_n e^{i\theta_n})\, d\theta_{p+1} \ldots d\theta_n$$

(13) Si l'on ajoute une restriction convenable sur la nature de l'ensemble au voisinage de ses points-frontières, $W_1(M)$ est même une fonction *continue*.

(14) On peut montrer qu'elle est fonction plurisousharmonique *continue* de M.

est une fonction plurisousharmonique de $(z_1, \ldots, z_n)$; elle l'est aussi du point Q de coordonnées $z_1, \ldots, z_p, z'_{p+1}, \ldots, z'_n$.

7° En particulier, si $f(z_1, \ldots, z_n)$ désigne une fonction holomorphe, les quantités W_3 et W_4 formées à partir de $V = \log|f|$ seront désignées respectivement par $\log M(z_1, \ldots, z_p; r_{p+1}, \ldots, r_n)$ et par $N(z_1, \ldots, z_p; r_{p+1}, \ldots, r_n)$. Ces quantités qui interviennent dans l'étude de la croissance d'une fonction entière et dans celle de la répartition de ses variétés zéros sont des fonctions plurisousharmoniques.

8° Remarquons enfin que les propriétés établies plus haut pour la moyenne $L(V, M, r_k)$ sont valables et se démontrent de même pour la moyenne $A(V, M, r_k)$; on peut remplacer l'une par l'autre dans l'énoncé du théorème 3.

VI. - Fonctions plurisousharmoniques ayant des dérivées secondes continues.

13. Pour abréger, nous dirons qu'une fonction est de classe $K^{(n)}$ si elle possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre n compris. Les fonctions plurisousharmoniques qui sont de classe $K^{(2)}$ sont les solutions d'un certain système d'inégalités aux dérivées partielles. Nous poserons :

$$\frac{\partial V}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k} - i\frac{\partial V}{\partial y_k}\right) \qquad (z_k = x_k + iy_k),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k} + i\frac{\partial V}{\partial y_k}\right) \qquad (\bar{z}_k = x_k - iy_k).$$

$$s_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial z_i\, d\bar{z}_j} = \frac{1}{4}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_i\, \partial y_j} + i\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, dy_j} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_j\, \partial y_i}\right)\right| \quad \text{si } i \neq j \qquad (s_{ij} = \bar{s}_{ji})$$

et

$$s_{ii} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2}\right) \quad \text{si } i = j \qquad (s_{ii} \text{ réel}).$$

Soit V, plurisousharmonique dans un domaine D; menons par un point $M(\zeta_k)$ de D un plan P^1 défini par $z_k = \zeta_k + t_k u$ et exprimons que, sur P^1, la trace de V est sousharmonique. Il vient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial \bar{u}} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial z_i\, d\bar{z}_j} t_i \bar{t}_j \geq 0.$$

Nous énoncerons :

Pour qu'une fonction V *de classe* $K^{(2)}$ *soit plurisousharmonique dans*, D, *il faut et il suffit que la forme hermitienne*

$$\Phi = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial z_i\, d\bar{z}_j} dz_i\, d\bar{z}_j = \sum_{i,j} s_{ij}\, dz_i\, dz_j \tag{1}$$

soit une forme positive ou nulle en tout point de D,

ou encore

Pour que V, *de classe* $K^{(2)}$, *soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'entre ses dérivées secondes complexes* s_{ij} *soient vérifiées les n inégalités*

$$\sum_{\alpha_p} D^{(\alpha_p)} \geq 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

obtenues en exprimant que la matrice hermitienne $\|s_{ij}\|$ a ses valeurs propres positives ou nulles; D^{α_p} est le déterminant tiré du tableau $\|s_{ij}\|$ en prenant p lignes et p colonnes dont les indices appartiennent à une même combinaison (α_p); la sommation est faite par rapport à toutes les combinaisons obtenues pour p fixé.

Fonctions pluriharmoniques. — Nous dirons que V est pluriharmonique dans D si V et — V y sont plurisousharmoniques (ce qui équivaut à dire que V est bornée sur tout compact intérieur à D, et est harmonique sur les variétés planes P^1); V et — V sont sousharmoniques dans R^{2n}; V est donc harmonique et, par suite, analytique des variables (x_k, y_k), ou, encore, des $(z_k, \bar{z}_k)$.

Écrivons que la fonction

$$V = \psi(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$

satisfait au système des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations aux dérivées partielles $s_{ij} = 0$, la forme (1) devant être nulle identiquement; nous obtenons pour ψ une solution

$$\psi = f(z_1, \ldots, z_n) + g(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$

ou

$$\psi = f(z_1, \ldots, z_n) + f(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n),$$

en exprimant que ψ est réel. Nous énoncerons :

Pour qu'une fonction soit pluriharmonique il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.

14. *Tenseur des densités de masse d'une fonction de classe* $K^{(2)}$. — Nous appellerons ainsi le tenseur contravariant formé des coefficients complexes s_{ij} de la forme Φ. Il est facile de donner la signification des coefficients s_{kk} : considérons la fonction sousharmonique obtenue en faisant varier z_k seul; il est associé à cette fonction dans le plan P^1 ainsi décrit une répartition de masses potentielles, dont la densité est

$$\sigma_k = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_k^2}\right) = \frac{2}{\pi} s_{kk}.$$

Considérons maintenant un plan P^1 quelconque donné par les équations $z_k = \zeta_k + t_k u$ avec $\sum t_k \bar{t}_k = 1$: la densité de masse relative à la trace sous-

harmonique de V sur ce plan est, au point $M(z_k)$.

$$\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial u} = \frac{2}{\pi}\sum_{i,j} s_{ij}t_i\bar{t}_j.$$

Il est intéressant de la comparer avec la masse relative à la fonction V, *considérée comme fonction sousharmonique dans* R^{2n}. Cette masse dépend d'une densité. On a, en désignant par ω_{2n} la surface de la sphère $\sum_i z_i\bar{z}_i = 1$,

$$\Delta V = \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2} = (2n-2)\omega_{2n}\rho.$$

pour $n \geq 2$ et $\Delta V = \omega_{2n}\rho = 2\pi\rho$, pour $n = 1$. Par ailleurs, $\omega_{2n} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$. Donc la densité ρ s'obtient en multipliant la somme des densités ρ_k relatives à chacune des variables z_k par un facteur A_n ne dépendant que de n. On a

$$\rho = A_n\sum_k \rho_k \qquad \text{avec } A_n = \frac{(n-2)!}{2\pi^{n-1}}. \tag{2}$$

15. Le résultat précédent est lié à un énoncé plus général relatif aux fonctions plurisousharmoniques *quelconques*. Pour simplifier faisons disparaître le coefficient A_n, en prenant comme fonction fondamentale du potentiel dans R^{2n} non pas $-\frac{1}{r^{2n-2}}$, mais

$$g_n(r) = -\frac{1}{\omega_{2n}(2n-2)r^{2n-2}} \qquad \text{si } n \geq 2 \tag{3}$$

et

$$g_n(r) = \frac{1}{2\pi}\log r \qquad \text{pour } n = 1.$$

L'avantage est le suivant : le flux Φ qui sort de la surface frontière d'un domaine D est égal à la masse contenue dans D; il suffit de le vérifier pour une hypersphère, ce qui est immédiat.

Soit $S(M, r_k)$ un n cercle contenu dans D, de centre $M(\zeta_k)$; désignons par τ une des n hypersurfaces qui constituent la frontière de D (sur τ, $\sum_k \bar{z}_k = r_k$, $z_j < r_j$ pour $j \neq k$). Dans ces conditions la masse μ contenue dans $S(M, r_k)$, relative à V *fonction sousharmonique dans* R^{2n}, est

$$\mu = \Phi = \sum_k \int_\tau \frac{\partial V}{\partial u_k}\,d\sigma_k = \sum_k \int \frac{\partial V}{\partial r_k} r_k\,d\theta_k \prod_{j\neq k} r_j\,dr_j\,d\theta_j. \tag{4}$$

Désignons par $\mu_k''(\zeta_k, r_k; z_j)$ la masse relative à V considérée comme *fonction sousharmonique de* z_k *seul*, quand z_k varie dans le cercle $z_k - \zeta_k \leq r_k$, pour $z_j\,(j \neq k)$ fixés, et par μ_k la quantité qui en résulte par intégration dans le

volume balayé par le point de coordonnées $z_j (j \neq k)$ de C^{n-1} quand on parcourt $S(M, r_k)$. On aura, d'après (4),

$$\mu = \sum_k \int_{\sigma_k} \mu_k^0(\zeta_k, r_k; z_j) \Pi r_j \, dr_j \, d\theta_j$$

ou

$$\mu = \sum_k \mu_k. \tag{5}$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME 4. — *Si la fonction fondamentale est prise sous la forme* (3), *la masse de* V *dans un domaine* D *de* C^n *est égale à la somme dans* D *des masses relatives aux* n *fonctions sousharmoniques obtenues en faisant varier successivement chacun des* z_k *séparément.*

Indiquons deux applications :

a. V est de classe $K^{(2)}$. Désignons par ρ' et ρ'_k les densités relatives aux fonctions fondamentales (3). On aura

$$\rho' = \sum_k \rho'_k = 2 \sum_k s_{kk}.$$

b. On a

$$V = \log |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|,$$

où f est holomorphe dans D.

La masse $\mu_k''(\zeta_k, r_k; z_j)$ est alors égale à 2π multiplié par le nombre de racines de l'équation $f(z_1, \ldots, z_n) = 0$ pour z_j fixé $(j \neq k)$, situées dans le cercle $|z_k - \zeta_k| < r_k$; l'intégrale μ_k est, au facteur 2π près, l'aire de la projection de la variété $f(z_1, \ldots, z_n) = 0$ sur le sous-espace C^{n-1} des $z_j (j \neq k)$, chaque point de la projection étant compté autant de fois qu'il est la projection de points différents de la variété dans C^n. L'égalité (5), où μ est évidemment indépendant d'un changement d'axes de C^n nous montre que la somme des projections d'une variété analytique W^{n-1} sur les sous-espaces coordonnés C^{n-1} est un invariant. Du reste en choisissant les axes de manière que le plan P^{n-1} tangent à W^{n-1} ait pour équation $z_n = 0$, on voit que cet invariant n'est autre que l'aire de W^{n-1}. Ainsi donc : d'une part, nous retrouvons la propriété connue [16] de l'aire d'une variété analytique complexe d'être égale à la somme de ses projections sur les n sous-espaces coordonnés C^{n-1}, d'autre part, (5) nous donne, en appelant S l'aire de W^{n-1} et S_k l'aire des projections

$$\mu_k = 2\pi S_k, \qquad \mu = \sum_k \mu_k = 2\pi \sum_k S_k = 2\pi S$$

---

[16] *Voir* WIRTINGER, *Monatshefte für Math. und Physik*, t. 44, 1936, p. 343.

qui s'énonce :

La masse associée à la fonction sousharmonique $V = \log|f(z_1, \ldots, z_n)|$, *dans* R^{2n} *est répartie sur la variété* $f = 0$ *et de densité constante* 2π, *la fonction potentielle fondamentale étant prise sous la forme* $g_n(r)$ *indiquée par* (3).

Nous retrouvons donc en second lieu le résultat signalé § I, n° 2, résultat qui donne une interprétation remarquable de l'aire d'une variété analytique W^{n-1} dans C^n; on en trouvera la première démonstration, par une voie assez longue, dans le Mémoire de H. Poincaré (17).

16. Le système d'inégalité I (§ VI, n° 13) nous fournit une troisième définition de la classe des fonctions plurisousharmoniques. Nous démontrerons :

Théorème 5. — *La classe des fonctions plurisousharmoniques se compose :* 1° *des fonctions ayant des dérivées secondes continues satisfaisant au système* I; 2° *des fonctions* (*à l'exception de la constante* $-\infty$) *obtenues comme limites de suites non croissantes des précédentes.*

Remarquons en effet que la moyenne $A(V, M, r)$ d'une fonction plurisousharmonique V définie dans D, moyenne prise sur le n-cercle $|z_k - \zeta_k| \leq r$, de centre $M(\zeta_k)$, de rayons égaux à r, est une fonction continue de M pour $M \in D_r$. Plus généralement, si V est de classe $K^{(p)}$, $A(V, M, r)$, est de classe $k^{(p+1)}$. Dans ces conditions, soit $A_p(V, M, r)$ la moyenne itérée p fois; elle est une fonction de classe $k^{(p+1)}$. De plus elle est plurisousharmonique pour $M \in D_{pr}$ (Remarque 4°, n° 12), Pour $p = 3$, $A_3(V, M, r)$ est donc une fonction plurisousharmonique, de classe $K^{(2)}$, pour tout r positif; elle est de plus non croissante quand r décroît et a pour limite $V(M)$ pour $r = 0$. En donnant à r la suite des valeurs $\frac{1}{n}$, on obtiendra donc V comme limite d'une suite non croissante de solutions du système I, ce qui établit le théorème 5.

17. Il est facile de voir qu'*une transformation analytique de* C^n *transforme une fonction plurisousharmonique en une fonction de même nature*. Soit, tout d'abord, V de classe $K^{(2)}$ dans D; substituons aux variables z_k des variables z'_k, le point (z_k) parcourant D quand (z'_k) parcourt un domaine D': si la transformation est analytique (18), les z_k s'expriment par des équations $z_k = \varphi_k(z'_i)$, où les

(17) *Sur les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* (*Acta Math.*, t. 22, 1899, p. 159). H. Poincaré prend la fonction fondamentale sous la forme $g'_n(r) = -\frac{1}{r^{2n-2}}$. Dans ces conditions la densité constante à prendre sur la variété $f = 0$ est égale au coefficient A_n qui figure dans notre égalité (2), et non pas à *un*, ainsi qu'il est dit dans le Mémoire cité.

(18) Nous disons analytique (dans C^n) au lieu de pseudo-conforme.

φ_k sont analytiques et ne dépendent que des variables z' (à l'exclusion des z'_j). La forme

$$\Phi = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} t_p \bar{t}_q$$

est positive ou nulle. Soit $t_p = \sum_i \frac{\partial \varphi_p}{\partial z'_i} dz'_i$; Φ s'écrit

$$\Phi = \sum_{\substack{p,q \\ i,j}} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z'_i} \frac{\partial \bar{\varphi}_q}{\partial \bar{z}'_j} dz'_i d\bar{z}'_j = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial z_i \partial \bar{z}'_j} dz'_i d\bar{z}'_j$$

et $\Phi \geq 0$ exprime que V est fonction plurisousharmonique des (z'_j).

Si, maintenant, on suppose que V est une fonction plurisousharmonique quelconque, on considérera V comme limite des moyennes $A_n\left(V, M, \frac{1}{n}\right)$ pour $n \to \infty$ et l'on appliquera le résultat précédent.

Réciproquement, soit (T) une transformation continue, biunivoque, d'un domaine D de C'' en un domaine D'. Supposons que (T) transforme l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques dans D en fonctions de même nature dans D'. L'ensemble des fonctions pluriharmoniques est conservé par (T), une fonction pluriharmonique V étant telle que V et $-V$ soient simultanément plurisousharmoniques. Dès lors, soient

$$z_k = x_k + i y_k = \varphi_k(z'_j, \bar{z}'_j)$$

les équations qui définissent (T); x_k est égal à la partie réelle de la fonction φ_k; c'est une fonction pluriharmonique dans D de (z_k); elle devient par la transformation une fonction H_k pluriharmonique de (z'_j) dans D'. On a donc

$$\varphi_k = H_k + i H'_k.$$

où H_k, H'_k sont deux fonctions pluriharmoniques de (z'_j), donc d'expression *analytique* par rapport aux variables z'_j, $\bar{z}'_j$. La fonction $\varphi_k(z'_j, \bar{z}'_j)$ est donc analytique de ces variables. Pour achever de caractériser φ_k, il suffit d'exprimer qu'une fonction $A(z_1, \bar{z}_1)$ harmonique et ne dépendant que du point (z_1) dans C_1 reste pluriharmonique après la transformation (T), c'est-à-dire satisfait aux équations $\frac{\partial^2 A}{\partial z'_i \partial \bar{z}'_j} = 0$; les conditions obtenues

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}'_j} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial z_j} = 0$$

montrent que φ_k ne dépend que de n des variables z'_j, $\bar{z}'_j$. Au besoin, après une permutation, on pourra supposer que ces variables sont les z'_j, à l'exclusion de leurs conjuguées. Nous énoncerons :

THÉORÈME 6. — *Pour qu'une transformation biunivoque conserve l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques, il faut et il suffit qu'elle soit, à une symétrie près, une transformation analytique complexe dans* C^n.

18. Nous dirons qu'une fonction $V(M)$ est *plurisousharmonique sur une variété* W^q *irréductible dans un domaine* D si elle satisfait aux conditions suivantes :

1° *Elle possède une valeur bien déterminée* $(-\infty \leq V < \infty)$ *en tout point de* W^q; *il existe un point de* W^q *où* $V > -\infty$.

2° *Si* $M(z_k^0)$ *est un point régulier de* W^q *au voisinage duquel* W^q *est représentée par un système*

$$z_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_q) \tag{4}$$

de n fonctions holomorphes des paramètres $u_1, \ldots, u_q$, *avec* $z_k^0 = \varphi_k(u_i^0)$, V *est une fonction pluriharmonique de* (u_i) *au voisinage des valeurs* (u_i^0).

3° *Au voisinage d'un point singulier de* W^q, *s'il est besoin de plusieurs systèmes de la forme* (4) *pour représenter* W^q, *nous supposerons que la condition* 2° *est réalisée par rapport à chacun d'eux séparément.*

Nous démontrerons :

LEMME. — *Une suite non croissante* S *de fonctions plurisousharmoniques sur une variété* W^q *irréductible dans* D *a pour limite une fonction plurisousharmonique sur* W^q *ou bien identiquement* $-\infty$ *sur* W^q.

Remarquons tout d'abord que W^q est la somme d'une infinité dénombrable d'éléments δ, chacun représenté par un système de la forme (4); à tout élément $\delta^{(1)}$ on peut en associer un autre *contigu* $\delta^{(2)}$ tel que les deux systèmes (4) associés $\varphi_k^{(1)}(u_i^{(1)})$ et $\varphi_k^{(2)}(u_i^{(2)})$ satisfassent à

$$\varphi_k^{(1)}(u_i^{(1)}) \equiv \varphi_k^{(2)}(u_i^{(2)}),$$

pour un ensemble ouvert $\delta_1 \cap \delta_2$ de valeurs (u_i^1) et de valeurs (u_i^2). Dans ces conditions si δ a pour limite la constante $-\infty$ sur un élément δ, S converge vers $-\infty$ sur tout élément contigu, et finalement converge vers $-\infty$ sur toute la variété W^q. Dans le cas contraire, S ne peut converger vers $-\infty$ dans aucun des éléments δ: la limite de S est une fonction plurisousharmonique dans chacun des éléments δ, donc sur toute la variété W^q. Le lemme est établi: il permet de démontrer :

THÉORÈME 7. — *Une fonction plurisousharmonique dans un domaine* D *de* C^n *a pour trace sur une variété* W^q $(q \geq n-1)$ *irréductible dans* D, *soit une fonction plurisousharmonique, soit la constante* $-\infty$.

En effet, si V n'est pas de classe $K^{(2)}$, considérons V comme la limite de la suite $A_3\left(V, M, \frac{1}{n}\right) = V'_n$. Les fonctions, V'_n, de classe $K^{(2)}$, sont plurisousharmoniques sur W^q : en effet si, utilisant (4), nous exprimons V'_n en fonction des u_i, la forme Φ définie par (1) s'écrit $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 V'_n}{\partial u_i \partial \overline{u_j}} du_i d\overline{u_j}$, forme *positive ou nulle*. D'autre part, quand n augmente indéfiniment, V'_n, suite non croissante, a pour limite V sur W^q; d'après le lemme, V est donc une fonction plurisousharmonique sur W^q, où y vaut identiquement $-\infty$.

Le théorème 7 nous permet de généraliser la propriété (c) de la définition 1, § II, n° 5 : la trace d'une fonction plurisousharmonique sur une variété analytique W^1 irréductible dans un domaine D est une fonction sousharmonique ou est la constante $-\infty$.

VII. Maximum d'une fonction plurisousharmonique dans un domaine et pseudo-convexité.

19. Une fonction plurisousharmonique dans un domaine D est sousharmonique sur la trace de D dans R^{2n}; elle ne peut donc avoir un maximum relatif en un point intérieur de D, à moins d'être constante dans D. Nous supposerons dans ce qui suit que V est une fonction non constante dans D, plurisousharmonique dans D et sur sa frontière F; nous dirons que V a un maximum A en P s'il existe un voisinage ω de P tel que $V \leq A$ sur $\omega \cap D'$ (D' désigne la fermeture D + F). Ce maximum sera dit *strict* si P est point isolé de l'ensemble $V = A$ sur D'; sinon il sera dit *simple*. Dans ce cas il existe une suite de points $P_n \in D'$ ayant P comme limite. Ces points peuvent être choisis sur F; en effet, si P_n n'est pas sur F, P_n est un point intérieur d'une composante δ_n convexe de l'intersection $\omega \cap D$; on a donc $V \equiv A$ sur δ_n et sur la frontière de δ_n; mais celle-ci contient des points de F; on pourra donc remplacer P_n par un point P'_n sur F appartenant à la frontière de δ_n. Remarquons que, dans ce cas, existe une suite de domaines δ_n tendant vers P avec $\delta_n \in D$, $V = A$ sur δ_n; cette circonstance n'est réalisée que si tout voisinage de P découpe sur D une infinité de domaines disjoints, et si V peut être constante sur des domaines intérieurs à D aboutissant à F.

Dans la suite, nous supposerons que V, définie sur D', satisfait à la condition (α) :

α. P *étant un point quelconque de la frontière de* D, ω *un voisinage de* P, V *n'est pas identique à une constante sur* $\omega \cap D$.

Lemme. — *Si* V *est plurisousharmonique sur* D' *et satisfait à la condition* (α), *un point* P *de la frontière* F *de* D *en lequel* V *possède un maximum, possède la propriété suivante : ou bien il existe une variété analytique* W^1 *qui appartient à* F

dans un voisinage de P, *ou bien toute variété analytique* W^1 *qui passe par* P *et est définie dans un voisinage de* P *possède des points étrangers à* D' *ayant* P *comme point limite.*

Supposons $V(P) = A$ et soit ω un voisinage de P tel que V soit plurisousharmonique sur ω; W^1 étant une variété analytique dans ω passant par P, la trace de V sur $\omega \cap W^1$ est une fonction sousharmonique. Si l'on exclut la seconde alternative du lemme, W^1 appartient à D'; on a donc $V \leq A$ sur $\omega \cap W^1$ et $V = A$ en P, point intérieur de l'ensemble $\omega \cap W^1$: on a donc nécessairement $V = A$ sur $\omega \cap W^1$. Ainsi l'hypothèse $(\omega \cap W^1) \in D'$ entraîne que le maximum en P soit simple. D'autre part il ne peut exister une suite de points $P_n \in (\omega \cap W^1)$ tendant vers P et intérieurs à D, car on aurait $V(P_n) = A$ en ces points, ce qui entraîne, comme on l'a vu, que (α) ne soit pas vérifié. Ainsi donc il existe un voisinage ω_1 de P, $\omega_1 \subset \omega$, et dans ce voisinage W^1 appartient à F, ce qui établit la première alternative du lemme.

Nous sommes ainsi conduit à distinguer une pseudo-convexité ([19]) stricte. Nous dirons que D' est *strictement pseudo-convexe* en un point frontière P si toute variété analytique W^1 contenant P et définie dans un voisinage de P contient des points *étrangers* à D'. Nous dirons que D' est *simplement pseudo-convexe* en P si toute variété W^1 par P contient des points *étrangers ou frontières* de D'. Nous énoncerons alors :

Théorème 8. — *Soit* V *une fonction plurisousharmonique sur le domaine fermé* D' *et y satisfaisant à la condition* (α). *Si elle possède un maximum en un point* P *de la frontière de* D :

ou bien D' *est strictement pseudo-convexe en* P ;
ou bien D' *est simplement pseudo-convexe en* P, *mais la frontière de* D' *contient une variété analytique* W^1 *dans un voisinage de* P *et* V *est constant sur cette variété.*

Nous dirons qu'un point P de la frontière de D' appartient à l'*ensemble maximal* de D' s'il existe une fonction plurisousharmonique dans D' satisfaisant à la condition (α) et ayant un maximum simple en P. On pourra définir un ensemble maximal *restreint* de D' en opérant à partir de la classe (L_1) des fonctions de la forme $V = \log f(z_k)$, $f(z_k)$ étant holomorphe dans D'. D'après le théorème 8, *l'ensemble maximal appartient à l'ensemble des points frontières de* D' *en lesquels* D' *est pseudo-convexe.*

La notion d'ensemble maximal est à comparer avec la surface frontière « remarquable » introduite par S. Bergmann ([20]), relativement à certains

([19]) *Voir* Behnke et Thullen, *Ergebnisse der Math.*, 3, 1934, p. 53.

([20]) *Voir* S. Bergmann (*Math. Annalen*, 104, 1931, p. 611 et *Math. Zeitschrift*, 36, 1933, p. 174) pour la définition et les applications de la surface « remarquable » (ausgezeichnete Randfläche) rela

domaines particuliers limités (dans C^2), par deux hypersurfaces analytiques ([21]). Pour de tels domaines, l'ensemble maximal appartient à l'intersection des deux hypersurfaces frontières et cette intersection constitue la variété « remarquable » du domaine.

Faisons pour terminer deux remarques :

1° *Une fonction $f(z_k)$ holomorphe sur D' y est déterminée entièrement par la connaissance de ses valeurs sur l'ensemble maximal restreint de D', soit E_r.*

En effet une fonction pluriharmonique H_1 sur D' atteint son maximum sur E_r, car si l'on pose $H_1 + iH_2 = g(z_k)$, H_2 étant la conjuguée de H_1, $H_1 = \log|e^{g(z_k)}|$ est donc de classe (L_1). S'il existait deux fonctions pluriharmoniques H_1, H'_1 sur D', coïncidant sur E_r, on aurait $H_1 - H'_1 = 0$ sur E_r et par suite, à la fois $H_1 - H'_1 \leq 0$ et $H'_1 - H_1 \leq 0$ sur D'; d'où $H_1 \equiv H'_1$. Il suffit alors d'envisager séparément la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z_k)$ pour établir la remarque énoncée.

2° Si E est un ensemble polaire dans un domaine Δ, et *si E_m est l'ensemble maximal relatif à un domaine fermé* $D' \subset \Delta$, E *ne peut contenir* E_m. En effet, supposons que E soit l'ensemble $V = -\infty$ (V plurisousharmonique dans Δ, donc dans D'); si E_m appartenait à E, le maximum de V sur D' serait égal à $-\infty$, ce qui est impossible.

VIII. — Fonctions plurisousharmoniques ne dépendant que des modules $r_k = |z_k|$.

20. Les fonctions plurisousharmoniques qui ne dépendent dans C^n que des quantités $|z_k| = r_k$ se ramènent aux fonctions convexes des variables $u_k = \log r_k$ dans leur ensemble. C'est là une circonstance qui généralise le résultat bien connu pour $n = 1$, mais qui, en un certain sens, est plus riche puisqu'il s'agit d'une convexité dans un espace à $n + 1$ dimensions réelles. Les deux énoncés qui suivent expliquent le rôle joué par les fonctions convexes de n variables réelles dans la théorie des fonctions analytiques de n variables complexes.

D'autre part l'un d'eux résout pour les fonctions ne dépendant que des $|z_k|$ le problème important de savoir si la classe (L) peut être engendrée, simplement à partir de (L_1). Pour préciser, soit (L'_1) la classe des fonctions obtenues en multipliant une fonction de (L_1) par un nombre positif quelconque. Toute fonction de (L) s'obtient-elle comme régularisée supérieure d'une limite

---

tive à la frontière des domaines envisagés par l'auteur dans C^2. La surface « remarquable » S d'un domaine D est définie par la condition d'être à deux dimensions réelles et telle qu'une fonction pluriharmonique dans D soit déterminée par ses valeurs sur S.

([21]) Une hypersurface analytique est constituée dans C^2 par le lieu géométrique d'une variété W^1 dépendant continûment d'un paramètre réel.

upérieure de fonctions de (L_1) bornées dans leur ensemble comme ceci a lieu our $n=1$? Le théorème 10 résout la question par l'affirmative pour n uelconque quand la fonction ne dépend que des $|z_k|$.

Nous supposerons dans la suite que D_0 est un domaine univalent, contenant n même temps que le point (z_k) tous les points $(z_k e^{i\theta_k})$, $0 \leq \theta_k \leq 2\pi$. Un tel lomaine (qui ne contiendra pas nécessairement son centre O) est encore aractérisé par sa trace d_0 dans l'espace des variables $u_k = \log r_k$, ou encore par e cylindre Γ de base d_0 dans l'espace R^{n+1} des variables $(u_1, \ldots, u_n, v)$.

Théorème 9. — *Pour qu'une fonction* $V(z_1, \ldots, z_n)$ *définie dans un domaine n-cerclé* D_0 *de centre* O *et n'y dépendant que des* $r_k = |z_k|$ *soit plurisousharmonique. Il faut et il suffit que dans l'espace* $R^{n+1}(u_1, \ldots, u_n, v)$ *la surface* S *d'équation* $v = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$, *où* φ *est la valeur de* V *exprimée en fonction des variables* $u_k = \log r_k$, *soit une surface convexe du côté des* v *négatifs.*

La surface S de l'énoncé est définie à l'intérieur du cylindre Γ de base d_0. Nous démontrerons simultanément

Théorème 10. — *Pour qu'une fonction* V *ne dépendant que des modules* $r_k = |z_k|$, *définie dans un domaine n-cerclé* D_0, *de centre* O, *y soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'elle soit l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions de la classe* L_1 *dans* D_0.

Nous démontrerons en premier lieu :

Lemme. — *Si* V *est plurisousharmonique, fonction seulement des* $|z_k|$ *dans* D_0, V *est fini dans* D.

En effet, dans le cas contraire on aurait $V = -\infty$ sur l'arête d'un n cercle $C(O, r_k)$, cette arête étant contenue dans D_0 [en général D_0 ne contiendra pas le n-cercle $S(O, r_k)$]. A chacun des r_k associons un $r'_k < r_k$ de manière que le produit topologique Δ des n couronnes $r'_k \leq |z_k| \leq r_k$ appartienne à D_0. En partant de l'expression d'une fonction harmonique dans une couronne $r'_k \leq |z_k| \leq r_k$, prenant des valeurs données sur les deux cercles frontières, on forme aisément l'expression de la fonction H, harmonique par rapport aux variables z_k séparément, et prenant les mêmes valeurs que V sur les 2^n arêtes A_η qui constituent l'ensemble maximal E_m de Δ (chaque arête s'obtient en choisissant l'une des deux circonférences frontières de chaque couronne et effectuant le produit topologique des n circonférences choisies); H est exprimée par la somme de 2^n fonctions H_η de même nature, H_η étant nulle sur E_m sauf sur A_η, où elle prend les valeurs de V. Si l'on a $V = -\infty$ sur A_η la fonction H_η vaut identiquement $-\infty$ dans Δ; il en est donc de même de H, donc aussi de V, H étant une majorante de V dans Δ. On aurait donc $V \equiv -\infty$ dans Δ contrairement à l'hypothèse que V est plurisousharmonique dans D_0. Le lemme est établi.

Il en résulte que la fonction $y = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ définie dans l'énoncé du théorème 9 est finie en tout point de d_0. D'autre part elle est convexe de chacune des variables u_k, donc, étant finie, continue par rapport à chacune de ces variables; de sa convexité par rapport à chacun des u_k résulte encore qu'elle est bornée et à nombres dérivés bornés sur un compact intérieur à d_0; elle est donc continue par rapport à l'ensemble des u_k et l'équation $y = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ définit bien une nappe de surface S dans R^{n+1}.

Pour montrer que S est convexe du côté des y négatifs, considérons deux points $A(u_k, y)$, $B(u'_k, y')$ dont les projections $a(u_k)$, $b(u'_k)$ appartiennent à d_0, ainsi que le segment ab. Il nous suffit de montrer que *si* A *et* B *sont au-dessus de* S, *il en est de même de tout le segment* AB.

Si A et B ont des coordonnées (u_k) rationnelles nous pourrons écrire les équations de la droite ab sous la forme

$$u_k = \frac{1}{\delta} m_k \log|t| + \log C_k \tag{1}$$

(t paramètre complexe, δ, m_k entiers); (1) montre que la droite ab est la trace de la variété analytique définie dans D_0 par

$$z_k^{\delta} = C_k t^{m_k}. \tag{2}$$

Sur cette variété la fonction V est sousharmonique de t; φ est donc convexe de $\log|t|$. Ainsi la section de S qui se projette suivant ab sur l'espace des (u_k) est une courbe convexe, ce qui démontre la propriété dans le cas où A et B ont des coordonnées (u_k) rationnelles; elle subsiste quand A et B ont des coordonnées (u_k) quelconques par suite de la continuité de la fonction $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$. La première partie du théorème 9 est ainsi établie.

Pour démontrer la réciproque, supposons que V se réduise dans D_0 à une fonction $y = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ donnant l'équation d'une surface S convexe du côté des y négatifs et définie quand (u_k) appartient à d_0. Soit P_i, d'équation

$$y = \sum_k a_k^{(i)} u_k + b^{(i)},$$

un plan tangent à S (plan ayant avec S un point commun au moins et laissant S du côté des y positifs) pris dans un ensemble dénombrable E de tels plans : nous choisirons E de manière que les $(a_k^{(i)})$ soient rationnels $\left(a_k^{(i)} = \frac{m_k^{(i)}}{\delta^{(i)}}; m_k^{(i)}, \right.$ $\left.\delta^{(i)} \text{ entiers}; \text{ on pose } C^{(i)} = e^{\delta^{(i)} b^{(i)}}\right)$ et qu'ils forment un ensemble partout dense sur l'ensemble des $(a_k^{(i)})$ correspondant aux plans tangents à S. Posons

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = C^{(i)} z_1^{m_1^{(i)}} \ldots z_n^{m_n^{(i)}}$$

et soit

$$V_i = \frac{1}{\delta^{(i)}} \log|f_i(z_k)|. \tag{3}$$

D'après la manière dont l'ensemble E des plans P_i a été défini, on a évidemment sur S

$$\varphi = \max_i \sum_k (a_k^{(i)} u_k + b^{(i)}).$$

D'où

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = V \geq \max_i (\sum a_k^{(i)} u_k + b^{(i)}) = \max V_i.$$

On a donc

$$V = \max_i V_i. \tag{4}$$

Ainsi V est l'enveloppe supérieure des fonctions V_i plurisousharmoniques; V est de plus continu, puisqu'il en est ainsi de φ (la continuité de φ résulte elle même de la convexité de S). Donc V est une fonction plurisousharmonique (n° 12, 1°). La seconde partie du théorème 9 est établie.

La première partie du théorème 10 l'est aussi : si V est plurisousharmonique et ne dépend que des z_k dans D_0, il correspond en effet à la surface S représentative de V dans l'espace R^{n+1} une suite V_i de fonctions de classe restreinte données par (3) dont V est l'enveloppe supérieure.

Pour démontrer la seconde partie du théorème 10, considérons une fonction V définie dans le domaine n-cerclé D_0 de centre O, et soit

$$V = \max_i C(g_i) \log |g_i(z_k)| \qquad [C(g_i) > 0] \tag{5}$$

l'égalité qui définit V comme enveloppe supérieure d'une suite de fonctions de la classe (L_1') dans D_0. Posons

$$V_i = \max_{\theta_k} C(g_i) \log |g_i(z_k e^{i\theta_k})|, \tag{6}$$

le maximum devant être pris quand les θ_k ($k = 1, \ldots, n$) parcourent l'intervalle $0 \leq \theta_k \leq 2\pi$; V_i est fonction continue et convexe des $u_k = \log r_k$ dans leur ensemble. D'autre part, au lieu de (5), on peut écrire

$$V = \max_i V_i. \tag{7}$$

Donc V est fonction convexe des u_k dans leur ensemble; elle en est donc fonction continue; dans ces conditions elle est fonction continue dans D_0. Il résulte alors (n° 12, 1°) de (7) qu'elle est plurisousharmonique, ce qui achève la démonstration du théorème 10.

IX. — Les fonctions de classe (M).

21. Soit (F) une famille de fonctions plurisousharmoniques bornées supérieurement localement dans un domaine D, c'est-à-dire ayant une borne supérieure finie sur tout compact intérieur à D. Dans C' on obtient une famille fermée par rapport au passage à la limite d'une suite convergente de (F) en adjoignant à (F) l'ensemble des fonctions quasi sousharmoniques [22] ayant les

[22] La définition en est rappelée au n° 6.

mêmes bornes supérieures dans D. Dans l'espace $C^n (n \geq 2)$ on complétera (F) par des fonctions appartenant à une classe (M) plus étendue que (F), une fonction de (M) coïncidant avec une fonction plurisousharmonique sauf sur un ensemble $\mathcal{E}$, de mesure nulle dans R^{2n}, aux points duquel elle lui est inférieure. Cette extension est fonction de la définition adoptée pour $\mathcal{E}$. Pour $n \geq 2$, une telle définition ne peut plus être rattachée à des notions déduites de la théorie du potentiel ([23]), et nous définirons directement la classe (M) de la manière suivante :

Définition 2. — Une fonction U *définie dans un domaine* D *de* C^n *sera dite de classe* (M) *si elle possède les propriétés suivantes :*

a. En tout point de D *elle possède une valeur déterminée, réelle, qui peut être soit une valeur finie, soit la valeur* $-\infty$. *En un point de* D *au moins cette valeur est finie.*

b. Elle possède une borne supérieure finie sur tout compact contenu dans D.

c. Sur une variété plane à une dimension complexe dans D, *la trace de* U *est une fonction quasi sousharmonique ou vaut identiquement* $-\infty$.

On démontre comme au paragraphe II, n° 5, 6° que U ne peut être indentique à $-\infty$ dans un domaine contenu dans D.

De la définition résulte :

1° La classe (M) contient la classe (L) pour n quelconque ; elle est constituée pour $n = 1$ par l'ensemble des fonctions quasi sousharmoniques.

2° Une suite non croissante de fonctions de classe (M) a pour limite soit une fonction de même nature, soit la constante $-\infty$.

3° L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions de classe (M) bornée supérieurement localement dans D, est une fonction de classe (M) (démonstration à partir de la proposition analogue pour $n = 1$).

4° La limite supérieure d'une suite de fonctions de classe (M) bornée supérieurement localement dans D est une fonction de classe (M) ou la constante $-\infty$ (on appliquera 3° puis 2°).

22. Nous nous proposons maintenant de démontrer le résultat suivant :

Théorème 11. — *La régularisée supérieure d'une fonction de classe* (M) *est une fonction plurisousharmonique.*

La démonstration repose par l'intermédiaire du théorème 3 sur les propriétés des moyennes $L(U, M, r_k)$ et $L(V, M, r_k)$ où l'on a posé

$$V(M) = \text{reg. sup. } U(M).$$

([23]) On remarquera cependant la généralisation de la notion de densité de masse (n° 14) sous forme d'un tenseur, qui montre dans quelle voie peut être recherchée une extension à l'espace C^n des notions capacitaires.

Pour établir l'existence de $L(U, M, r_k)$, nous considérerons l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, z_2, \ldots, z_n)\, d\theta_1,$$

où $M(z_k)$ et $S(M, r_k)$ sont supposés intérieurs au domaine D où U est défini. Les fonctions quasi sousharmoniques appartiennent à l'ensemble des fonctions appelées par M. Brelot sous-médianes, fonctions qui ne diffèrent d'une fonction sousharmonique que sur un ensemble de mesure nulle où elles lui sont inférieures. On sait ([24]) que l'enveloppe supérieure d'une famille bornée supérieurement de telles fonctions est encore de même nature. Les fonctions de la classe (M) sont des fonctions sous-médianes par rapport à chacune des variables z_k considérées séparément. Donnons des valeurs fixes à $z_2, \ldots, z_n$ et prenons la régularisée supérieure de $U(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par rapport à z_2; nous noterons $U_1(z_1, \ldots, z_n)$ cette régularisée; le résultat cité entraîne que U_1 soit encore une fonction sous-médiane de chacune des variables $z_1, \ldots, z_n$. D'autre part U et U_1 ne différant pour $z_2, \ldots, z_n$ fixés que pour les valeurs z_1 d'un ensemble de mesure nulle, l'intégrale (1) est encore égale à

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} U_1(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, z_2, \ldots, z_n)\, d\theta_1.$$

Cette intégrale portant sur une fonction semi-continue supérieurement de θ_1 se calcule comme intégrale supérieure de Riemann. On en déduit, selon un raisonnement déjà fait (n° 6) qu'elle représente une fonction sous-médiane de chacune des variables $z_2, \ldots, z_n$. On poursuivra en intégrant successivement par rapport aux paramètres $\theta_2, \ldots, \theta_n$. Finalement l'intégrale

$$(3) \qquad L(U, M, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} U(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

existe. Elle ne peut avoir pour valeur $-\infty$, sinon on aurait identiquement $U = -\infty$ dans un n cercle intérieur $S(M, \tau r_k)$, $0 < \tau < 1$ (même démonstration que pour les lemmes 3 et 4, n° 7), ce qui est impossible: donc $L(U, M, r_k)$ possède, pour tout n cercle $S(M, r_k)$ contenu dans D, une valeur finie; cette valeur est fonction non décroissante et convexe des variables $u_k = \log r_k$. Quand $\rho = \max r_k$ tend vers zéro, $L(U, M, r_k)$ a donc une limite bien déterminée $V_0(M)$.

Nous allons montrer qu'on a

$$(4) \qquad V_0(M) = \text{reg. sup. } U(M).$$

En effet on a $V_0(M) = \text{reg. sup. } U(M)$ d'après la définition même de reg. sup. U(M). D'autre part on a reg. sup. $U(M) \geq L(U, M, r_k)$ [même démonstra-

([24]) *Voir* BRELOT, *Bull. Sc. Math.*, t. 68, 1944, p. 9, note (3); l'essentiel, pour la démonstration est d'établir la sommabilité de l'enveloppe supérieure.

tion que pour l'inégalité (10) du n° 8, à partir de l'inégalité (6), n° 8, en faisant tendre $\rho = \max r_k$ vers zéro, on obtient donc (4). Il résulte de (4) que $V_0(M) = \lim_{r_k=0} L(U, M, r_k)$ est une fonction semi-continue supérieurement. Il est aisé de voir que cette limite est plurisousharmonique. On a, en effet,

$$U(M) \leq V_0(M) \leq L(U, M, r_k) \tag{5}$$

ou en itérant la moyenne

$$L(U, M, r'_k) \leq L[L(U, M, r_k), M, r'_k] = L[L(U, M, r'_k), M, r_k].$$

Quand $\rho' = \max r'_k$ tend vers zéro, $L(U, M, r'_k)$ tend vers $V_0(M)$. On a donc

$$V_0(M) \leq L(V_0, M, r_k). \tag{6}$$

Cette inégalité, jointe à (4), montre que $V_0(M)$ appartient à la classe (B) du paragraphe IV. D'autre part elle le demeure par un changement d'axes dans C^n; elle est donc plurisousharmonique. Le théorème 11 est établi.

23. L'ensemble des points où une fonction de classe (M) diffère de sa régularisée est de mesure nulle sur l'arête d'un n cercle. Nous démontrerons en effet :

Théorème 12. — *La moyenne d'une fonction de classe* (M) *sur l'arête d'un n-cercle quelconque est égale à la moyenne de sa régularisée supérieure.*

Remarquons, pour la démonstration, que, pour z_n fixé, U est une fonction de classe (M) par rapport à $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ ou est identique à $-\infty$. Dans les deux cas, si l'on appelle U_{n-1} la régularisée supérieure de U prise pour z_n constant *par rapport à l'ensemble des variables* $(z_1, \ldots, z_{n-1})$, on a, en admettant le théorème 12 pour C^{n-1},

$$L(U, M, r_k) = L(U_{n-1}, M, r_k). \tag{7}$$

D'autre part, d'après (4)

$$U_{n-1}(z_k) = \lim_{r=0} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} U(z_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_{n-1} + r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}, z_n)\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \tag{8}$$

La fonction U_{n-1} est sous-médiane en z_n, de sorte que, si l'on appelle U_n sa régularisée supérieure par rapport à z_n, pour $z_1 \ldots z_{n-1}$ constants, on a

$$U_n = \lim_{\rho=0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + \rho e^{i\theta_n})\, d\theta_n. \tag{9}$$

En comparant (8) et (9) avec

$$V(M) = \text{reg. sup. } U(M) = \lim_{r_k=0} L(U, M, r_k), \tag{10}$$

on a

$$U_n(M) = V(M),$$

en désignant par V(M) la régularisée supérieure de U(M). On peut donc énoncer, en procédant par récurrence :

LEMME. — *La régularisée supérieure d'une fonction de classe* (M) *s'obtient en régularisant successivement par rapport à chacune des variables* z_k *prises dans un ordre quelconque.*

On a, de plus, puisque V est la régularisée supérieure de U_{n-1} par rapport à z_n

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + re^{i\theta_n})\, d\theta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + re^{i\theta_n})\, d\theta_n,$$

d'où

$$L(U_{n-1}, M, r_k) = L(V, M, r_k). \tag{11}$$

En comparant (11) et (7), il vient

$$L(U, M, r_k) = L(V, M, r_k). \tag{12}$$

L'égalité (12) est ainsi établie par récurrence. Le raisonnement fait est indépendant du système d'axes considéré dans C^n. Le théorème 12 est démontré.

Il est à remarquer que les démonstrations des théorèmes 11 et 12 font passer par l'intermédiaire d'une classe plus générale que (M), celle des fonctions satisfaisant aux conditions (*a*), (*b*) de la définition 2 et à une condition (c_1) moins restrictive que (*c*), où l'on ne considérera que les plans P^1 parallèles aux plans coordonnés. La régularisée supérieure d'une fonction de cette classe est de classe (B); l'ensemble où elle diffère de la fonction est de mesure nulle sur l'arête d'un *n*-cercle de faces parallèles aux plans coordonnés.

24. Le théorème 11 nous donne la démonstration d'une propriété remarquablement simple d'un domaine d'holomorphie par rapport à ses points intérieurs. Nous l'énoncerons :

THÉORÈME 13. — *Si* D *est un domaine d'holomorphie et si* $\delta_1(M)$ *désigne la distance d'un point intérieur de* D *à la frontière, parallèlement à une direction complexe fixe, la fonction* $V(M) = -\log \delta_1(M)$ *est une fonction plurisousharmonique de* M *dans le domaine* D.

Par le point $M(z_k)$ menons en effet un plan P^1 parallèle à la direction complexe (a_k); ses équations s'écrivent

$$z_k = \zeta_k + a_k u. \tag{13}$$

où u est complexe et où $\Sigma a_k a_k = 1$. L'intersection de la frontière de D avec P^1 est un ensemble fermé e. Par définition la distance $\delta_1(M)$ de M à la frontière de D parallèlement à la direction (a_k) sera la distance de M à l'ensemble e. Puisque D est ouvert, $\delta_1(M)$ est une fonction semi-continue inférieurement de M; la fonction $V(M) = -\log \delta_1(M)$ est semi-continue supérieurement

de M; elle est, de plus, fonction continue pour un déplacement de M parallèlement à la direction (a_k).

La trace $\Psi(u)$ de $f(z_k)$ sur le plan P' est holomorphe pour $|u| < \rho_0(M)$

$$(14) \qquad \Psi(u) = f(\zeta_k + a_k u) = f(\zeta_k) + u\sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(\zeta_k) + \ldots + u^n \Psi_n(a_k, \zeta_k) + \ldots$$

Ψ_n est holomorphe de (ζ_k) pour $M \in D$, et est un polynome homogène de degré n en a_k; le rayon d'holomorphie de Ψ, soit $\rho_0(M)$, est supérieur en général à $\delta_1(M)$, mais on a $\delta_1(M) = \text{reg. inf. } \rho_0(M)$, et par suite

$$V(M) = -\log \delta_1(M) = \text{reg. sup. } [-\log \rho_0(M)].$$

Soit D_1 un domaine contenu, ainsi que sa fermeture, dans D, et contenant M à son intérieur, soit τ le maximum de $|f(M)|$ pour $M \in D_1$. D'après (14) on a

$$|\Psi_n(a_k, \zeta_k)| \leq \frac{2\pi\tau}{\rho_1^n},$$

où ρ_1 désigne la distance de $M(\zeta_k)$ à la frontière de D, parallèlement à (a_k); ρ_1 est borné inférieurement, quelle que soit cette direction, par un nombre positif; la suite

$$V_n(a_k, \zeta_k) = \frac{1}{n}\log |\Psi_n(a_k, \zeta_k)|$$

est une suite bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques quand M appartient à un compact contenu dans D_1, c'est-à-dire, en définitive, sur un compact quelconque contenu dans D.

Pour une direction (a_k) fixée, on a

$$U = -\log \rho_0(M) = \limsup. V_n(a_k, \zeta_k),$$

U est une fonction de classe (M). Finalement, d'après le théorème 11

$$V(M) = \text{reg. sup. } U(M)$$

est une fonction plurisousharmonique pour $M \in D$. La propriété énoncée est établie.

L'énoncé du théorème 13 subsiste si l'on remplace la distance $\delta_1(M)$ parallèlement à une direction complexe (a_k) par la distance ordinaire $\delta(M)$ de M à la frontière du domaine D : $\delta(M)$ est en effet le minimum de $\delta_1(M)$ quand le point de coordonnées (a_k) parcourt la sphère $\sum_k a_k \bar{a}_k = 1$. D'autre part $\delta(M)$ est une fonction continue de M. Il en résulte bien (§ V, n° 12, 1°) que

$$\log \delta(M) = \max_{(a_k)} [-\log \delta_1(M)]$$

est une fonction plurisousharmonique.

LES

ESPACES VARIATIONNELS

GÉNÉRALISÉS

PAR M. ANDRÉ LICHNEROWICZ.

Introduction.

Dans une série de Notes récentes (1), j'ai indiqué comment il était possible de distinguer, parmi les espaces de Cartan à connexion euclidienne dont l'élément générateur est un élément linéaire, une classe d'espaces généralisant les espaces de Finsler, auxquels j'ai donné le nom d'*espaces variationnels généralisés*. Je me propose de développer ici une théorie systématique de ces espaces.

C'est par l'analyse des équations différentielles auxquelles est soumis le mouvement d'un système dynamique non conservatif que j'ai été amené à la construction de tels espaces. La théorie des mouvements des systèmes dynamiques conservatifs et leur géométrisation sont grandement facilitées par le rôle éminent joué dans cette théorie par le calcul des variations classique auquel est venue s'ajouter grâce à Poincaré, Cartan et de Donder la théorie des invariants intégraux. En introduisant des fonctionnelles plus générales que celles du calcul des variations classique, j'ai été conduit à définir une extension de la technique de ce calcul, particulièrement adaptée à la théorie des mouvements des systèmes dynamiques non conservatifs et, plus généralement, à la théorie d'équations différentielles pour lesquelles certaines conditions de différentielle totale ne sont pas satisfaites. L'étude des relations intégrales d'invariance (2), qui paraîtra prochainement dans un autre Recueil, obéit au même souci. La géométrisation des problèmes relatifs à ce calcul des variations

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 328; t. 214, 1942, p. 599; t. 216, 1943, p. [illegible]; t. 217, 1943, p. 418.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 217, 1943, p. 669.

non holonome conduit naturellement à la construction des espaces variationnels généralisés.

Dans la Section I de ce Mémoire, j'étudie un exemple simple, celui des espaces ponctuels à connexion semi-symétrique, pour montrer comment peut s'effectuer cette construction. La Section II est consacrée à l'axiomatique du calcul des variations non holonome et à la définition des extrémales généralisées. Les Sections III, IV, V constituent la théorie proprement dite des espaces variationnels. A ces espaces on peut attacher deux connexions euclidiennes légèrement différentes, mais dont les géodésiques coïncident naturellement. L'une de ces connexions présente l'avantage de ne pas faire intervenir de dérivées d'ordre supérieur des données fondamentales. On notera aussi que les seuls espaces variationnels généralisés qui puissent être envisagés comme espaces ponctuels sont les espaces à connexion semi-symétrique étudiés à la Section I. Dans la Section VI je forme les deux tenseurs de torsion et les trois tenseurs de courbure qui caractérisent géométriquement l'espace. La Section VII est consacrée à l'étude des rapports de la géométrie des espaces variationnels avec la *Metric geometry of paths* de J. Douglas et la section VIII à quelques-unes des nombreuses applications à la dynamique, classique et relativiste, de la théorie.

Je signalerai enfin que la théorie développée ici est la théorie des espaces variationnels du premier ordre, mais qu'il est possible de développer une théorie analogue pour les espaces d'ordre supérieur, généralisant ainsi la théorie des espaces de Kawaguchi-Cartan.

Les notations employées sont les notations classiques du calcul différentiel absolu. En particulier les signes de sommation sont partout supprimés. Si $f(x^\lambda)$ désigne une fonction des coordonnées x^λ, je pose

$$\frac{\partial f}{\partial x^\lambda} = \partial_\lambda f.$$

I. — Sur certains espaces ponctuels à connexion semi-symétrique.

1. *La connexion intermédiaire de Weyl.* — Afin de bien distinguer les éléments qui m'ont conduit à la construction des espaces variationnels généralisés, je présenterai d'abord ces éléments sur un exemple particulièrement simple et dont l'importance apparaîtra ultérieurement.

Soit V une variété analytique à n dimensions. Comme dans la théorie des espaces de Weyl, nous nous donnerons sur cette variété une forme différentielle quadratique

$$(1.1) \qquad ds_0^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda)\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \lambda, \ldots = 1, 2, \ldots n),$$

et une forme différentielle linéaire non intégrable

$$(1.2) \qquad \omega = K_\alpha(x^\lambda)\, dx^\alpha.$$

Je désignerai par E l'espace riemannien défini sur la variété V par la métrique (1.1).

Au voisinage de tout point M de V, menons par M un faisceau de courbes rectifiables joignant M à tout point m de ce voisinage. Nous donnerons ce voisinage de la métrique ds^2, conforme à la métrique ds_0^2, et définie au point m par la relation

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = e^{\int_M^m k_\alpha dx^\alpha}\,ds_0^2. \tag{1.3}$$

l'intégrale étant évaluée le long de la courbe joignant M à m. Quand m tend vers M le long de la courbe considérée, les $g_{\alpha\beta}$ tendent vers les $\dot{g}_{\alpha\beta}$; mais en M les dérivées partielles $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ diffèrent des dérivées partielles correspondantes par l'espace riemannien E. Il est commode et sans inconvénient de désigner ces dérivées partielles par la notation $\partial_\gamma^0 g_{\alpha\beta}$. On a manifestement au point M

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma^0 g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} k_\gamma. \tag{1.4}$$

Nous sommes ainsi conduits à faire correspondre à la métrique ds^2 la connexion ponctuelle affine ayant pour éléments au point M

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^{\nu} = \gamma_{\gamma\alpha}^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\nu\beta}\left[g_{\gamma\beta} k_\alpha + g_{\alpha\beta} k_\gamma - g_{\gamma\alpha} k_\beta\right], \tag{1.5}$$

où $\gamma_{\gamma\alpha}^{\nu}$ désigne le symbole de Christoffel de seconde espèce associé aux $g_{\alpha\beta}$. Cette connexion n'est autre que la *connexion de Weyl* attachée à la forme quadratique ds_0^2 et à la forme linéaire ω.

Cependant ce n'est pas cette connexion symétrique qui va nous intéresser, et ceci pour la raison suivante. Supposons un instant la forme linéaire ω intégrable. La métrique ds_0^2 définit alors sur V un espace riemannien ordinaire. Au point m considérons deux vecteurs, l'un l' unitaire dans ds_0^2, l'autre l' strictement colinéaire à l' et unitaire dans ds^2. Quand m vient en M, les deux vecteurs $\dot{l}'$ et $\dot{l}'$ viennent en coïncidence, mais *leurs dérivées diffèrent*. Pour former la dérivée covariante du vecteur l' unitaire en M, il nous faut tenir compte de cette différence dans la connexion déduite de la connexion (1.5).

2. *La connexion semi-symétrique.* — Revenons au cas d'une forme ω quelconque et désignons toujours au point m, par $\dot{l}'$ et l' deux vecteurs strictement colinéaires unitaires l'un dans ds_0^2, l'autre dans ds^2. Ces deux vecteurs sont manifestement liés par la relation

$$l' = \dot{l}'\, e^{\frac{1}{2}\int_M^m k_\alpha dx^\alpha}.$$

Il en résulte qu'au point M les dérivées $\partial_\alpha l'$ s'expriment en fonction des dérivées correspondantes $\partial_\alpha^0 l'$ pour l'espace riemannien E, par les formules

$$\partial_\beta l' = \partial_\beta^0 l' - \frac{1}{2} k_\beta l'. \tag{2.1}$$

où l'on a supprimé l'indice zéro au dernier terme du second membre, puisqu'en M il y a coïncidence entre les l^ν et les $\overset{0}{l}{}^\nu$.

Considérons alors l'espace ponctuel S formé par le raccordement des voisinages des différents points M de V selon la connexion (1.5), le vecteur unitaire adopté au point M étant l^ν. Si ∇_μ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans S, il vient

$$\nabla_\mu l^\nu = \partial_\mu l^\nu + \Gamma_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} l^\lambda = \partial_\mu^0 l^\nu - \frac{1}{2} K_\mu l^\nu + \overset{0}{\Gamma}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} l^\lambda.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la connexion ponctuelle affine ayant pour éléments

$$\Gamma_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} = \overset{0}{\Gamma}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} - \frac{1}{2} K_\mu g^{\nu}{}_{\lambda},$$

soit, compte tenu de (1.5),

$$\Gamma_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} = \overset{0}{\Gamma}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} + \frac{1}{2} g^{\nu\rho}(g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\mu} K_\rho). \tag{2.2}$$

La connexion affine ainsi obtenue est *semi-symétrique au sens de Schouten* (1), puisqu'il lui correspond le tenseur de torsion ponctuelle

$$\Omega_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} - \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}) = \frac{1}{4}(K_\lambda g^{\nu}{}_{\mu} - K_\mu g^{\nu}{}_{\lambda}).$$

Si $\overset{0}{\nabla}_\mu$ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans l'espace E, il est clair que l'on a

$$\nabla_\mu l^\nu = \overset{0}{\nabla}_\mu l^\nu + \frac{1}{2} g^{\nu\rho}(g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\mu} K_\rho) l^\lambda.$$

Il en résulte que le système différentiel aux géodésiques de l'espace à connexion semi-symétrique S

$$l^\mu \nabla_\mu l^\nu = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$l^\mu \overset{0}{\nabla}_\mu l^\nu = \frac{1}{2}(g^{\lambda\nu} - l^\lambda l^\nu) K_\lambda. \tag{2.3}$$

Si la forme ω est intégrable, le système différentiel (2.3) définit, comme il est bien connu, les géodésiques de l'espace riemannien conforme à E, admettant la métrique

$$ds^2 = l^\mu \, ds_\mu^2; \qquad \omega = d\mathrm{l}.$$

L'introduction de l'espace S nous permet ainsi de géométriser, dans le cas le plus général, le système différentiel (2.3). Nous démontrerons ultérieurement

---

(1) *Sur les espaces à connexion semi-symétrique*, voir SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Springer, Berlin, 1924, p. 69-75; EISENHART, *Non-riemannian geometry* (*Americ. Math. Soc. Colloquium*, vol. 8, 1927, p. 36-38); J. M. THOMAS, *Asymmetric displacement of a vector* (*Trans. Americ. Math. Soc.*, vol. 28, 1926, p. 658-870).

que les espaces à connexion semi-symétrique (2.2) sont *les seuls espaces variationnels généralisés qui peuvent être envisagés comme espaces ponctuels*. On conçoit par la leur importance.

II. — Le calcul des variations non holonome.

3. *Définitions et notations.* — Avant de pouvoir aborder la construction de la géométrie des espaces variationnels, il nous faut tout d'abord réaliser cette extension du calcul classique des variations que j'ai signalée au cours de l'Introduction. Les définitions que nous allons donner sont celles qui sont strictement indispensables à la construction des espaces variationnels qui généralisent les espaces de Finsler. Il apparaîtra que ces définitions sont susceptibles d'une certaine extension. Elles pourraient permettre de construire des géométries englobant par exemple celle des espaces de Cartan-Kawaguchi. Nous ne nous intéresserons pas à de telles géométries dans le présent Mémoire.

Sur une variété analytique V à n dimensions dont le point courant M admet les coordonnées (x^λ), considérons les courbes C définies par la représentation paramétrique

$$x^\lambda = x^\lambda(v) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.1}$$

où les fonctions $x^\lambda(v)$ sont supposées continûment différentiables jusqu'au second ordre sur un intervalle (a, b). Étant donné un nombre ε positif, arbitrairement petit, nous désignerons :

1° par $(u_0, u_1) \subset (a, b)$ *un intervalle d'amplitude inférieure à* ε ;

2° par $y^\lambda(v, \varepsilon)$ un système de n fonctions continûment différentiables en v sur l'intervalle *et nulles pour* $v = u_0$ *et pour* $v = u_1$.

Nous donnerons dans la suite à $x^\lambda(v)$ l'accroissement

$$\delta x^\lambda = \varepsilon\, y^\lambda(v, \varepsilon) \tag{3.2}$$

et nous poserons

$$\eta_1(\varepsilon) = \operatorname*{Max}_{\substack{v \in (u_0, u_1) \\ \lambda \in (1, 2, \ldots, n)}} \delta x^\lambda(v) . \tag{3.3}$$

Il est clair que quand ε tend vers zéro, il en est de même pour $\eta_1(\varepsilon)$.

Appliquons aux $y^\lambda(v, \varepsilon)$ la formule des accroissements finis entre les valeurs u_0 et v de la variable v. En désignant par $y'^\lambda(v, \varepsilon)$ la dérivée de y^λ par rapport à v, il vient

$$y^\lambda(v, \varepsilon) = (v - u_0)\, y'^\lambda(\theta, \varepsilon),$$

avec

$$u_0 < \theta < v.$$

Supposons que quel que soit l'intervalle $(u_0, u_1) \subset (a, b)$ et d'amplitude inférieure à ε, on ait, pour $v \in (u_0, u_1)$,

$$\nu^{(h)}(v, \varepsilon) < K.$$

Il en résulte

$$\eta(\varepsilon) < K\varepsilon^2.$$

Dans la présente Section, comme dans les autres Sections plus spécialement géométriques, nous ferons usage de la convention habituelle de sommation.

4. *Sous-différentielle d'une fonctionnelle.* — Je désignerai par le symbole

$$F^u_{u_0}[x^i(v)]$$

une fonctionnelle attachée à l'arc (u_0, u) de C et satisfaisant à la condition suivante : pour toute valeur $u_0 \in (a, b)$, il existe un intervalle (u_0, u_1) tel que quand u varie dans (u_0, u_1), $F^u_{u_0}$ définisse une fonction intégrable de u.

Prenant, comme il a été dit, l'intervalle (u_0, u_1) d'amplitude inférieure à ε, j'appelle sous-différentielle $\bar{\partial}F$ de la fonctionnelle F *une fonction des $x^i(v)$, de leurs dérivées premières $x'^i(v)$ et des ∂x^i qui soit :*

1° *linéaire par rapport aux ∂x^i ;*

2° *telle que l'on ait*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta F - \bar{\partial} F}{\varepsilon_1} = 0, \tag{4.1}$$

où ΔF désigne l'accroissement de F correspondant aux accroissements (3.2) des x^i.

5. *Sous-variation d'une intégrale.* — Considérons par exemple l'intégrale

$$J = \int_{u_0}^{u_1} H[F^u_{u_0}, x^i(u), x'^i(u)]\, du, \tag{5.1}$$

où H désigne une fonction continue des $(2n+1)$ arguments F, x^i, x'^i.

J'appelle sous-variation $\bar{\partial}J$ de l'intégrale J *une intégrale de la forme*

$$\bar{\partial} J = \int_{u_0}^{u_1} L[x^i(u), x'^i(u), \partial x^i(u)]\, du, \tag{5.2}$$

où L est une fonction des x^i, des dérivées x'^i et des ∂x^i qui est :

1° *linéaire par rapport aux ∂x^i ;*

2° *telle que l'on ait*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta J - \bar{\partial} J}{\varepsilon_1} = 0, \tag{5.3}$$

où ΔJ désigne l'accroissement de J correspondant aux accroissements (3.2) des x^i.

6. *Fonctionnelles de la classe régulière.* — J'appellerai *fonctionnelle de la classe régulière* attachée à C, une fonctionnelle

$$F^{u}_{u_0}[x^{\alpha}(v)],$$

telle que pour toute valeur $u_0 \in (a, b)$, il existe un intervalle (u_0, u_1) pour lequel quel quel soit $u \in (u_0, u_1)$ on ait les propriétés suivantes :

a. $F^{u}_{u_0}$ est une *fonctionnelle continue et dérivable* de u. Quand u tend vers u_0, $F^{u}_{u_0}$ tend vers une constante que l'on peut toujours supposer nulle.

b. $F^{u}_{u_0}$ est une *fonctionnelle dérivable* pour les valeurs $v \in (u_0, u)$ et admet, relativement aux x^i, les dérivées fonctionnelles partielles

$$F'_{\lambda}[x^{\alpha}(v); v];$$

quels que soient u_0 et u_1, on a sur C

$$F'_{\lambda}[x^{\alpha}(v); v] < \Lambda. \tag{6.1}$$

c. Pour les accroissements (3.2), *la différentielle de* F *peut être mise sous la forme*

$$\delta F = \int_{u_0}^{u} F'_{\lambda}[x^{\alpha}(v); v]\,\delta x^{\lambda}(v)\,dv + \varepsilon_1[x^{\alpha}(u), x'^{\alpha}(u)]\,\delta x^{\lambda}(u), \tag{6.2}$$

avec une partie exceptionnelle relative à la valeur $v = u$. Quels que soient u_0 et u_1, on a sur C

$$\varepsilon_1[x^{\alpha}(u), x'^{\alpha}(u)] < B. \tag{6.3}$$

D'après la définition de la différentielle de Fréchet, on a donc

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\Delta F - \delta F}{\gamma_1} = 0.$$

Nous poserons

$$\varphi(\varepsilon) = \operatorname*{Max}_{u \in (u_0, u_1)} \frac{\Delta F - \delta F}{\gamma_1}. \tag{6.4}$$

$\varphi(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε.

L'exemple de fonctionnelle de la classe régulière que nous serons constamment amenés à utiliser nous est fourni par l'intégrale

$$F = \int_{u_0}^{u} \omega[x^{\alpha}(v), x'^{\alpha}(v)]\,dv, \tag{6.5}$$

où ω désigne une fonction continûment différentiable jusqu'au second ordre des variables x^i et x'^i. Il est clair que la fonctionnelle (6.5) satisfait aux hypothèses de la classe régulière. En particulier, comme il est bien connu, la fonctionnelle F admet la différentielle

$$\delta F = \int_{u_0}^{u} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x^{\lambda}} - \frac{d}{dv} \frac{\partial \omega}{\partial x'^{\lambda}} \right| \delta x^{\lambda}(v)\,dv + \frac{\partial \omega}{\partial x'^{\lambda}}(u)\,\delta x^{\lambda}(u). \tag{6.6}$$

7. *Sous-différentielle d'une fonctionnelle de la classe régulière.* — Pour une fonctionnelle de la classe régulière, la sous-différentielle définie au paragraphe 4 admet une expression particulièrement simple. Elle est égale à la partie exceptionnelle de la différentielle ∂F, soit

$$\partial F = a_\lambda[x^\varkappa(u), x'^\varkappa(u)]\,\delta x^\lambda(u). \tag{7.1}$$

Montrons d'abord que l'expression (7.1) qui est linéaire par rapport aux δx^λ satisfait effectivement à la définition de la sous-différentielle, c'est-à-dire satisfait à l'égalité (4.1). On a, en effet,

$$\frac{\Delta F - \partial F}{\eta} \leq \frac{|\Delta F - \delta F|}{\eta} - \frac{|\partial F - \delta F|}{\eta};$$

or, d'après (6.4),

$$\frac{\Delta F - \delta F}{\eta} < \varphi(\varepsilon)$$

et, en vertu de l'inégalité (6.1) et de l'équation (6.2),

$$\frac{|\partial F - \delta F|}{\eta} = \frac{\left|\int_{u_0}^{u} F'_\lambda[x^\varkappa(v); v]\,\delta x^\lambda(v)\,dv\right|}{\eta} < \frac{\varepsilon n \Lambda \eta}{\eta} = n\Lambda\varepsilon.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\frac{|\Delta F - \partial F|}{\eta} < \varphi(\varepsilon) + n\Lambda\varepsilon \tag{7.2}$$

et l'expression (7.1) satisfait bien à l'égalité (4.1).

Inversement, il est facile de démontrer que toute fonction $\partial^* F$ satisfaisant aux postulats de la sous-différentielle coïncide nécessairement avec (7.1). Soit, en effet,

$$\partial^* F = b_\lambda[x^\varkappa(u), x'^\varkappa(u)]\,\delta x^\lambda(u) \tag{7.3}$$

une telle fonction. On a

$$\frac{|\partial F - \partial^* F|}{\eta} \leq \frac{|\Delta F - \partial F|}{\eta} + \frac{|\Delta F - \partial^* F|}{\eta}.$$

Il résulte alors des postulats sur la sous-différentielle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial F - \partial^* F}{\eta} = \lim_{\varepsilon \to 0} |a_\lambda[x^\varkappa(u), x'^\varkappa(u)] - b_\lambda[x^\varkappa(u), x'^\varkappa(u)]|\,Z^\lambda(u) = 0,$$

où l'on a posé

$$Z^\lambda(u) = \frac{\delta x^\lambda(u)}{\eta}.$$

En passant à la limite et en tenant compte de l'arbitraire avec lequel peuvent être choisis les $Z^{\lambda}(u_0)$, on aboutit aux égalités

$$b_{\lambda}[x^{\alpha}(u_0), x'^{\alpha}(u_0)] = a_{\lambda}[x^{\alpha}(u_0), x'^{\alpha}(u_0)].$$

Ces égalités ayant lieu quel que soit $u_0 \in (a, b)$ et quelle que soit la courbe C considérée, il en résulte l'identité complète des expressions (7.1) et (7.3).

Ainsi, pour l'intégrale (6.5) étudiée antérieurement, la sous-différentielle admet l'expression

$$\delta F = \frac{\partial \omega}{\partial x'^{\lambda}} \delta x^{\lambda}. \tag{7.4}$$

8. *Sous-variation d'une intégrale portant sur une fonctionnelle de la classe régulière.* — Considérons l'intégrale

$$J = \int_{u_0}^{u_1} H[F^{u}_{u_0}, x^{\alpha}(u), x'^{\alpha}(u)]\, du, \tag{8.1}$$

où la fonction H est supposée trois fois continûment différentiable pour des $(2n+1)$ arguments et où la fonctionnelle $F^{u}_{u_0}$ est l'intégrale définie par l'équation (6.5). Nous nous proposons de rechercher la forme explicite de la sous-variation $\bar{\delta}J$ de l'intégrale J.

Nous indiquerons d'abord quelques majorations. On a en premier lieu, en vertu de (7.2),

$$\|\bar{\delta}F\| = \operatorname*{Max}_{u \in (u_0, u_1)} |\bar{\delta}F| < \eta_1 \operatorname*{Max}_{u \in (u_0, u_1)} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda}(u) < \alpha\eta_1, \tag{8.2}$$

$$\|\Delta F\| = \operatorname*{Max}_{u \in (u_0, u_1)} |\Delta F| \leq \operatorname*{Max}_{u \in (u_0, u_1)} |\Delta F - \delta F| + \|\delta F\| < [\varphi(\varepsilon) + n A \varepsilon]\eta_1 + \alpha\eta_1 < \beta\eta_1, \tag{8.3}$$

α et β désignant des constantes convenablement choisies, $\Phi(u)$ étant une fonction continûment différentiable de u, cherchons à majorer l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} \Phi(u)\, \delta x'^{\lambda}(u)\, du.$$

En intégrant par parties et en tenant compte de la nullité de $\delta x^{\lambda}(u)$ pour $u = u_0$ et pour $u = u_1$, il vient

$$\left| \int_{u_0}^{u_1} \Phi(u)\, \delta x'^{\lambda}(u)\, du \right| = \left| \int_{u_0}^{u_1} \Phi(u)\, \delta x^{\lambda}(u)\, du \right| < \gamma\varepsilon\eta_1, \tag{8.4}$$

γ désignant encore une constante.

Posons

$$\Delta H = H(F + \Delta F, x^{\lambda} + \delta x^{\lambda}, x'^{\lambda} + \delta x'^{\lambda}) - H(F, x^{\lambda}, x'^{\lambda})$$

et appliquons les majorations précédentes à la majoration de l'intégrale de

$$\Delta H - \left| \frac{\partial H(F)}{\partial F}\Delta F + \frac{\partial H(F)}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial H(F)}{\partial x'^i}\delta x'^i \right| = Q(\delta x'^i) - \delta x'^i L(\delta x^i, \Delta F) + Q(\delta x^i, \Delta F) + R,$$

où Q et Q désignent des formes quadratiques. L une forme linéaire par rapport aux variables indiquées et où R représente une fonction du troisième ordre au moins par rapport à ces variables. Nous n'avons fait figurer au premier membre que l'argument F de H. A l'aide des majorations (8.2), (8.3), (8.4), il vient

$$\left| \Delta J - \int_{u_0}^{u_1} \left| \frac{\partial H(F)}{\partial F}\Delta F + \frac{\partial H(F)}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial H(F)}{\partial x'^i}\delta x'^i \right| du \right| < (\gamma_1 \varepsilon + \gamma_2 \eta_1)\varepsilon\eta_1.$$

γ_1 et γ_2 désignant des constantes. Bornons $\frac{\partial H}{\partial F}$ et remplaçons ΔF par δF au premier membre en tenant compte de l'inégalité (7.2). On obtient ainsi

$$\left| \Delta J - \int_{u_0}^{u_1} \left| \frac{\partial H(F)}{\partial F}\delta F + \frac{\partial H(F)}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial H(F)}{\partial x'^i}\delta x'^i \right| du \right| < \gamma_3 |\varphi(\varepsilon) + h\varepsilon + h'\eta_1| \varepsilon\eta_1.$$

γ_3, h, h' représentant de nouvelles constantes. Conformément à la méthode classique du calcul des variations, intégrons, par parties, le dernier terme sous le signe $\int$. Par suite de la nullité de $\delta x^i(u)$ pour $u = u_0$ et pour $u = u_1$, il vient

$$(8.5) \qquad \left| \Delta J - \int_{u_0}^{u_1} \left| \frac{\partial H(F)}{\partial F} a_i + \frac{\partial H(F)}{\partial x^i} - \frac{d}{du}\frac{\partial H(F)}{\partial x'^i} \right| \delta x^i du \right| < \gamma_3 |\varphi(\varepsilon) + h\varepsilon + h'\eta_1| \varepsilon\eta_1.$$

Au premier membre de l'inégalité (8.5), la fonction H intervient pour la valeur F de son premier argument. Or, quand u tend vers u_0, F_{u0}^u tend vers zéro. Nous allons donc chercher à obtenir une inégalité de forme analogue où la fonction H intervienne pour l'argument F = o. Posons

$$\psi(\varepsilon) = \operatorname*{Max}_{u \in (u_0, u_1)} |F_{u_0}^u|.$$

On obtient immédiatement les inégalités

$$(8.6) \qquad \left| \frac{\partial H(F)}{\partial F} - \frac{\partial H(o)}{\partial F} \right| < K_1 \psi(\varepsilon),$$

$$(8.7) \qquad \left| \frac{\partial H(F)}{\partial x^i} - \frac{\partial H(o)}{\partial x^i} \right| < K_2 \psi(\varepsilon),$$

où K_1 et K_2 représentent des constantes. D'autre part il vient

$$\frac{\partial H(F)}{\partial x'^i} = \frac{\partial H(o)}{\partial x'^i} + \frac{\partial^2 H(\theta F)}{\partial x'^i \partial F} F \qquad (o < \theta < 1).$$

soit, en dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à u,

$$\frac{d}{du}\frac{\partial H(F)}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial^2 H(\theta F)}{\partial x'^{\lambda}\,\partial F}\frac{dF}{du} + F\frac{d}{du}\frac{\partial^2 H(\theta F)}{\partial x'^{\lambda}\,\partial F}.$$

Il en résulte l'inégalité

$$(8.8)\qquad \left|\frac{d}{du}\frac{\partial H(F)}{\partial x'^{\lambda}} - \left[\frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^{\lambda}\,\partial F}\frac{dF}{du}\right]\right| < K_3\,\psi(\varepsilon).$$

En utilisant les inégalités (8.6), (8.7), (8.8), on déduit de (8.5) l'inégalité

$$(8.9)\qquad \left|\Delta J - \int_{u_0}^{u_1}\left[\frac{\partial H(o)}{\partial F}\alpha_{\lambda} + \frac{\partial H(o)}{\partial x^{\lambda}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^{\lambda}} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^{\lambda}\,\partial F}\frac{dF}{du}\right]\delta x^{\lambda}\,du\right| < \chi(\varepsilon)\varepsilon\eta,$$

avec

$$\chi(\varepsilon) = \gamma_3[\varphi(\varepsilon) + h\varepsilon + h'\eta + K\psi(\varepsilon)].$$

K_3 et K représentant de nouvelles constantes. On a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\chi(\varepsilon) = 0.$$

Par suite, si nous posons

$$\delta J = \int_{u_0}^{u_1}\left[\frac{\partial H(o)}{\partial F}\alpha_{\lambda} + \frac{\partial H(o)}{\partial x^{\lambda}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^{\lambda}} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^{\lambda}\,\partial F}\frac{dF}{du}\right]\delta x^{\lambda}\,du,$$

soit en introduisant la fonction ω,

$$(8.10)\qquad \delta J = \int_{u_0}^{u_1}\left[\frac{\partial H(o)}{\partial F}\frac{\partial\omega}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial H(o)}{\partial x^{\lambda}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^{\lambda}} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^{\lambda}\,\partial F}\omega\right]\delta x^{\lambda}\,du;$$

il en résulte de l'inégalité (8.9) que l'intégrale $\bar{\delta}J$ satisfait à l'équation

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta J - \bar{\delta}J}{\varepsilon\eta} = 0.$$

L'expression (8.10) vérifie donc les postulats de la sous-variation d'une intégrale. Un raisonnement, identique à celui du paragraphe 7, montrerait que toute intégrale, qui vérifie les postulats du paragraphe 5 pour la sous-variation, coïncide nécessairement avec l'intégrale (8.10).

9. *Extrémales généralisées.* — Étant donnée une intégrale J telle que (6.5), nous appellerons *problème de calcul des variations non holonome*, défini par J, la recherche des courbes C le long desquelles la sous-variation

$$(9.1)\qquad \delta J = \int_{u_0}^{u_1}\left[\frac{\partial H(o)}{\partial F}\frac{\partial\omega}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial H(o)}{\partial x^{\lambda}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^{\lambda}} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^{\lambda}\,\partial F}\omega\right]\delta x^{\lambda}\,du$$

est identiquement nulle, quels que soient les accroissements δx^i définis par (3.2). Les courbes C correspondantes seront dites les *extrémales généralisées* de l'intégrale J. Un raisonnement classique du calcul des variations montre que ces extrémales sont les solutions du système différentiel

$$\frac{\partial H(o)}{\partial F}\frac{\partial \omega}{\partial x'^h}+\frac{\partial H(o)}{\partial x^h}-\frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^h}-\frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^h\,\partial F}\omega=0.$$

Étant donnée une fonction $\varphi(F, x^i, x'^i)$, nous conviendrons, afin d'alléger les notations, de désigner par φ' la dérivée partielle de φ par rapport à F. Avec cette notation, le système différentiel aux extrémales généralisées peut s'écrire

$$\frac{d}{du}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^h}-\frac{\partial H(o)}{\partial x^i}=H'(o)\frac{\partial \omega}{\partial x'^h}-\omega\frac{\partial H'(o)}{\partial x'^h}. \tag{9.2}$$

Ce système ne fait intervenir que les trois fonctions des variables x^i et x'^h

$$H(o, x^h, x'^h);\quad H'(o, x^h, x'^h);\quad \omega(x^h, x'^h).$$

On notera que le système différentiel (9.2), comme la sous-variation (9.1), demeurent invariants quand on change simultanément H′ en — H′ et ω en — ω, et aussi quand on change H′ en ω et ω en — H′.

10. *Exemple de problème de calcul des variations non holonome.* — L'exemple le plus simple de problème de calcul des variations de ce type est fourni par le principe de Hamilton pour les systèmes dynamiques *non conservatifs*, soumis à des forces ne dépendant que de la position du système. Si nous désignons par $x^i (i=1, 2, \ldots, n)$ les paramètres indépendants relatifs au système dynamique considéré, par 2T sa force vive et par $Q_i dx^i$ le travail virtuel élémentaire des forces données appliquées au système, les équations de Lagrange qui déterminent le mouvement s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'^i}-\frac{\partial T}{\partial x^i}=Q_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{10.1}$$

Si l'on pose

$$u=t:\qquad H(o)=T(x^i, x'^i);\qquad H'(o)=1;\qquad \omega=Q_i x'^i;$$

les équations (9.2) correspondant aux fonctions ainsi choisies coïncident avec les équations de Lagrange (10.1). Il en résulte que les équations de Lagrange définissent les extrémales généralisées associées à l'intégrale

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(T+\int_{t_0}^{t} Q_i\frac{dx^i}{d\tau}\,d\tau\right)dt,$$

où S représente l'action du système dynamique pour l'intervalle de temps (t_0, t_1).

III. — La première connexion euclidienne d'un espace variationnel.

11. *Les données fondamentales qui définissent un espace variationnel.* — Soit $\varphi(F, x^i, x'^i)$ une fonction des $(2n+1)$ arguments explicités. Comme dans les paragraphes précédents, nous utiliserons systématiquement les notations qui suivent :

$$\varphi(0) = \varphi(0, x^h, x'^h); \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial F}; \qquad \partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i}.$$

De plus nous poserons

$$\partial_{ij}\varphi \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i \partial x'^j}.$$

Ces conventions étant introduites, donnons-nous deux fonctions $\omega(x^i, x'^i)$ et $H(F, x^i, x'^i)$, toutes deux *homogènes et du premier degré* par rapport aux x'^i et considérons les deux intégrales

$$F = \int_{u_0}^{u_1} \omega[x^h(v), x'^h(v)]\, dv \tag{11.1}$$

et

$$J = \int_{u_0}^{u_1} H[F^u_{u_0}, x^h(u), x'^h(u)]\, du, \tag{11.2}$$

évaluées le long d'une courbe C. L'hypothèse d'homogénéité assure un caractère intrinsèque aux intégrales F et J : elles ne dépendent pas du paramètre u choisi le long de la courbe C, si bien que l'on peut poser

$$F = \int_{M_0}^{M} \omega(x^i, dx^i); \qquad J = \int_{M_0}^{M_1} H[F^M_{M_0}, x^i(M), dx^i],$$

M appartenant à l'intervalle M_0M_1 de C.

J'appelle *espace variationnel généralisé* un espace fondé sur un problème de calcul des variations non holonome relatif à une intégrale telle que (11.2). La théorie de ces espaces qui généralisent les espaces de Finsler peut être elle aussi intégrée dans la théorie générale des espaces de Cartan qui admettent pour élément générateur un élément linéaire et qui sont doués d'une connexion euclidienne. Dans la présente section nous définirons et étudierons une première connexion euclidienne qui peut être attachée d'une manière intrinsèque à la variété V et à l'intégrale J.

12. *L'espace de Finsler associé à* $H(o, x^i, dx^i)$. — Je désignerai par E l'espace de Finsler défini sur la variété V par la métrique

$$ds_0^2 = H^2(o, x^h, dx^h). \tag{12.1}$$

Cet espace admet le tenseur métrique fondamental

$$\mathring{g}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha'\beta'} \frac{1}{2} [\mathrm{H}^2(o)],$$

dont les composants sont homogènes et de degré zéro par rapport aux x'^{λ}. En vertu de l'homogénéité de H, elles satisfont effectivement à la relation

$$ds_0^2 = \mathring{g}_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}.$$

Étant donné un champ de vecteurs X^{ν}, c'est-à-dire une famille continûment différentiable de vecteurs X^{ν} attachés à chaque élément linéaire $(x^{\lambda}, x'^{\lambda})$, la différentielle absolue $\mathring{\nabla} X^{\nu}$ du vecteur X^{ν} dans l'espace de Finsler peut être représentée par la formule

$$\mathring{\nabla} X^{\nu} = dX^{\nu} + \mathring{C}^{\nu}_{\lambda\mu} X^{\lambda}\, dx'^{\mu} + \mathring{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\mu} X^{\lambda}\, dx^{\mu}; \tag{12.2}$$

quant aux géodésiques de l'espace de Finsler, elles sont définies par le système différentiel

$$\frac{d^2 x^{\nu}}{ds_0^2} + 2\mathring{G}^{\nu}\left(x^{\alpha}, \frac{dx^{\alpha}}{ds_0}\right) = 0, \tag{12.3}$$

où les $\mathring{G}^{\nu}$ sont les fonctions homogènes et du second degré par rapport aux x'^{α} qui sont telles que

$$2\mathring{G}^{\nu} = \mathring{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\mu} x'^{\lambda} x'^{\mu}. \tag{12.4}$$

D'après les résultats classiques de Cartan (1), la connexion de l'espace de Finsler peut être définie explicitement par les formules suivantes :

$$\mathring{C}_{\nu\rho\mu} = \frac{1}{2} \partial_{\mu'} \mathring{g}_{\nu\rho}; \qquad \mathring{C}^{\nu}_{\lambda\mu} = \mathring{g}^{\nu\rho} \partial_{\mu'} \mathring{g}_{\lambda\rho}; \tag{12.5}$$

$$\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho\mu} = \gamma_{\lambda\rho\mu} + \mathring{C}_{\lambda\mu\alpha}\, \partial_{\rho'} \mathring{G}^{\alpha} - \mathring{C}_{\rho\mu\alpha}\, \partial_{\lambda'} \mathring{G}^{\alpha}; \qquad \mathring{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\mu} = \mathring{g}^{\nu\rho} \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho\mu}; \tag{12.6}$$

$$2\mathring{G}_{\lambda} = \partial_{\lambda'\mu} \left| \frac{1}{2} \mathrm{H}^2(o) \right| x'^{\mu} - \partial_{\lambda} \left| \frac{1}{2} \mathrm{H}^2(o) \right|, \tag{12.7}$$

où les $\mathring{g}^{\nu\mu}$ désignent les mineurs réduits du déterminant $\| \mathring{g}_{\lambda\mu} \|$ et où $\gamma_{\lambda\rho\mu}$ représentent les symboles de Christoffel de première espèce relatifs aux $\mathring{g}_{\lambda\mu}$.

A noter que d'après la définition du tendeur fondamenlal, les $\mathring{C}_{\lambda\rho\mu}$ sont complètement symétriques par rapport à leurs trois indices.

13. *Définition de la connexion intermédiaire.* — Au voisinage de tout point M de V, menons par M un faisceau de courbes rectifiables joignant M à tout

(1) *Cf.* É. Cartan. *Les espaces de Finsler* (*Actual. scient. et ind.*, t. 79, Paris, 1934 : formules (5), p. 11 ; (11), p. 16 ; (20), p. 16.

oint m de ce voisinage. Nous donnerons ce voisinage de la métrique ds^2 définie
u point m par la relation

13.1) $$ds^2 = H^2(F, x^\lambda, dx^\lambda)$$

vec

$$F = \int_M^m \omega(x^\lambda, dx^\lambda),$$

intégrale étant évaluée le long de la courbe joignant M à m. Nous poserons

13.2) $$g_{\alpha\beta}(F, x^\lambda, x'^\lambda) = \partial_{x'^\alpha}\left[\frac{1}{2} H^2(F)\right]; \qquad K_\gamma = \partial_{x'^\gamma}\omega.$$

e telle sorte qu'en vertu de l'homogénéité de H, l'on a

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta.$$

uand m tend vers M le long de la courbe considérée, les $g_{\alpha\beta}$ tendent vers les $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$.
u point M les dérivées partielles $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ s'expriment à partir des dérivées
artielles correspondantes $\partial^0_\gamma g_{\alpha\beta}$, $\partial^0_\gamma g_{\alpha\beta}$ pour l'espace finslérien E, à l'aide des
elations

13.3) $$\partial_{x'^\gamma} g_{\alpha\beta} = \partial^0_{x'^\gamma} g_{\alpha\beta},$$

13.4) $$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \partial^0_\gamma g_{\alpha\beta} + g'_{\alpha\beta} K_\gamma.$$

Nous sommes ainsi conduits à faire correspondre à la métrique ds^2 une
onnexion admettant les éléments $\overline{C}^\nu_{\gamma\mu}$, $\overline{G}_\lambda$, $\overline{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$ que nous allons successivement
éterminer.

En vertu de (12.5) et (13.3), il vient tout d'abord au point M,

13.5) $$\overline{C}_{\lambda\gamma\mu} = \overset{0}{\overline{C}}_{\lambda\gamma\mu} = \frac{1}{2}\partial^0_{x'^\mu} g_{\gamma\rho} = \frac{1}{2}\partial_{x'^\mu}\overset{0}{g}_{\gamma\rho}$$

t par suite

$$\overline{C}^\nu_{\lambda\mu} = \overset{0}{\overline{C}}{}^\nu_{\lambda\mu}.$$

)e même des formules (12.7) et (13.14) on déduit au point M

$$2\overline{G}_\lambda = 2\overset{0}{\overline{G}}_\lambda + \partial_{\lambda'}[H(o)H'(o)]\, K_\mu x'^\mu + H(o)H'(o)(\partial_{\lambda'} K_\mu x'^\mu - K^\lambda).$$

)r, d'après les conditions d'homogénéité et la définition des $g_{\alpha\beta}$, on a les iden-
ités évidentes

$$H(o)H'(o) = \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta; \qquad \partial_{\lambda'} K_\mu x'^\mu = \partial_{\lambda'\mu'}\omega\, x'^\mu = 0$$

t

$$\partial_{\lambda'} g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = 0.$$

l en résulte pour les éléments $\overline{G}_\lambda$ l'expression

13.6) $$2\overline{G}_\lambda = 2\overset{0}{\overline{G}}_\lambda + g'_{\lambda\alpha} x'^\alpha K_\mu x'^\mu - \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta K_\lambda.$$

Enfin la formule (12.6) entraîne pour la métrique ds^2

$$\Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} = g^{\nu\rho}\left[\frac{1}{2}(\partial_{\lambda} g_{\mu\rho} + \partial_{\mu} g_{\lambda\rho} - \partial_{\rho} g_{\lambda\mu}) + C_{\lambda\mu\alpha}\,\partial_{\rho'} G^{\alpha} - C_{\rho\mu\alpha}\,\partial_{\lambda'} G^{\alpha}\right],$$

soit, en transformant le premier terme du second membre à l'aide des relations (13.4),

$$\Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} = \gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} + \frac{1}{2} g^{\nu\rho}(g'_{\lambda\rho}\,\mathrm{K}_{\mu} + g'_{\mu\rho}\,\mathrm{K}_{\lambda} - g'_{\lambda\mu}\,\mathrm{K}_{\rho}) + g^{\nu\rho}(C_{\lambda\mu\alpha}\,\partial_{\rho'} G^{\alpha} - C_{\rho\mu\alpha}\,\partial_{\lambda'} G^{\alpha}), \tag{13.7}$$

les $\gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu}$ désignant les symboles de Christoffel de seconde espèce associés aux coefficients $g_{\lambda\mu}$ de la métrique ds_0^2.

14. *La première connexion des espaces variationnels.* — Comme dans le cas de l'espace à connexion semi-symétrique (2.2), considérons au point m^2 deux vecteurs l^{ν} et l'^{ν}, strictement colinéaires, unitaires l'un dans ds_0^2, l'autre dans ds^2. Ces deux vecteurs sont manifestement liés par la relation

$$l'^{\nu} = \frac{\mathrm{H}(o)}{\mathrm{H}(\mathrm{F})}\, l^{\nu}.$$

Quand m tend vers M le long de la courbe considérée, le vecteur l'^{ν} et le vecteur l^{ν} viennent se confondre et au point M les dérivées $\partial_{\mu'} l'^{\nu}$, $\partial_{\mu} l^{\nu}$ s'expriment en fonction des dérivées correspondantes $\partial^{o}_{\mu'} l^{\nu}$, $\partial^{o}_{\mu} l^{\nu}$ pour l'espace finslérien E, par les formules

$$\partial_{\mu'} l'^{\nu} = \partial^{o}_{\mu'} l^{\nu} \tag{14.1}$$

et

$$\partial_{\mu} l^{\nu} = \partial^{o}_{\mu} l^{\nu} - \frac{\mathrm{H}(o)\,\mathrm{H}'(o)}{\mathrm{H}^2(o)}\,\mathrm{K}_{\mu}\, l^{\nu},$$

soit

$$\partial_{\mu} l^{\nu} = \partial^{o}_{\mu} l^{\nu} - \frac{1}{2}\,\frac{g'_{\gamma\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}\,\mathrm{K}_{\mu}\, l^{\nu}, \tag{14.2}$$

où les notations sont identiques à celles du paragraphe 2.

Considérons alors l'espace d'éléments linéaires formé par le raccordement des voisinages des différents points M de V selon la connexion $\overline{\mathrm{C}}_{\lambda\mu}^{\nu}$, $\overline{\mathrm{G}}_{\lambda}$, $\overline{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$, le vecteur unitaire adopté au point M étant l^{ν}. Si ∇ désigne l'opérateur de différentiation absolue correspondant, il vient

$$\nabla l^{\nu} = dl^{\nu} + \overline{\mathrm{C}}_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu}\, l^{\lambda}\, dx'^{\mu} + \Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu}\, l^{\lambda}\, dx^{\mu},$$

où, d'après (14.2),

$$\nabla l^{\nu} = dl^{\nu} + \overline{\mathrm{C}}_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu}\, l^{\lambda}\, dx'^{\mu} + \left(\Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\frac{g'_{\gamma\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}\,\mathrm{K}_{\mu}\, g^{\nu}{}_{\lambda}\right) l^{\lambda}\, dx^{\mu}.$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire la connexion ayant pour éléments

$$C_{ij}^{\gamma}=\overline{C}_{ij}^{\gamma}; \qquad \Gamma_{ij}^{\gamma}=\overline{\Gamma}_{ij}^{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}{\varepsilon_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}\mathbf{k}_{\mu}g^{\gamma\mu}.$$

Les éléments de cette connexion s'expriment ainsi explicitement à partir des données fondamentales de l'espace au moyen des formules

$$C_{ij}^{\gamma}=g^{\gamma\rho}C_{ij\rho}; \qquad C_{ij\rho}=\frac{1}{2}\partial_{\rho}g_{ij}; \tag{14.3}$$

$$\Gamma_{ij}^{\gamma}=\gamma_{ij}^{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}{\varepsilon_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}\mathbf{k}_{\mu}g^{\gamma\mu}+\frac{1}{2}g^{\gamma\rho}(g'_{i\rho}\mathbf{k}_{\mu}+g'_{\rho\mu}\mathbf{k}_{i}-g'_{i\mu}\mathbf{k}_{\rho}) \tag{14.4}$$
$$g^{\gamma\rho}(C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}G^{\alpha}-C_{\rho\mu\alpha}\partial_{i}G^{\alpha}).$$

On en déduit

$$2G^{\gamma}=\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}x'^{\mu}x'^{\nu}=2\overline{G}^{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}{\varepsilon_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}\omega x'^{\gamma}. \tag{14.5}$$

Si l'on transforme cette formule à l'aide des relations (13.6), il vient

$$2G_{i}=2\overline{G}_{i}-\frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}{\varepsilon_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}\omega g_{i\rho}x'^{\rho}-\omega g_{i\alpha}x'^{\alpha}-\frac{1}{2}g'_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}\mathbf{k}_{i}, \tag{14.6}$$

formule qui, jointe à (12.7), fournit explicitement les éléments G_i à partir des données fondamentales.

15. *Substitution des éléments* G^{α} *aux éléments* $\overline{G}^{\alpha}$. — Les formules (14.4), qui donnent l'expression des coefficients Γ_{ij}^{γ} de la connexion adoptée, font intervenir les éléments $\overline{G}^{\alpha}$ relatifs à la connexion intermédiaire. Les formules restent encore valables si l'on substitue purement et simplement aux $\overline{G}^{\alpha}$ les éléments G^{α} définis par (14.5) et (14.6).

En effet, si l'on forme à partir des relations (14.5) les quantités $C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}G^{\alpha}$, il vient

$$C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}G^{\alpha}=C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}\overline{G}^{\alpha}-\frac{1}{2}\partial_{\rho}\left(\frac{g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}{\varepsilon_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}\omega\right)x'^{\alpha}C_{i\mu\alpha}-\frac{1}{2}\frac{g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}{\varepsilon_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}\omega g^{\alpha}{}_{\rho}C_{i\mu\alpha}.$$

or, d'après les conditions d'homogénéité,

$$x'^{\alpha}C_{i\mu\alpha}=\frac{1}{2}x'^{\alpha}\partial_{\alpha}g_{i\mu}=0. \tag{15.1}$$

On en déduit

$$C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}G^{\alpha}=C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}\overline{G}^{\alpha}-\frac{1}{2}\frac{g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}{\varepsilon_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}\omega C_{i\mu\rho} \tag{15.2}$$

le deuxième terme du second membre étant symétrique par rapport aux indices λ et ρ. Il vient ainsi

$$C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}G^{\alpha}-C_{\rho\mu\alpha}\partial_{i}G^{\alpha}=C_{i\mu\alpha}\partial_{\rho}\overline{G}^{\alpha}-C_{\rho\mu\alpha}\partial_{i}\overline{G}^{\alpha}, \tag{15.3}$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

16. *Les géodésiques de l'espace variationnel et les extrémales généralisées.* — Étant donnée une courbe C, prenons momentanément pour vecteur l^ν le vecteur unitaire tangent à la courbe

$$l^\nu = \frac{dx^\nu}{ds_0}. \tag{16.1}$$

Sa direction coïncidera avec celle de l'élément d'appui x'^ν.

Pour que la courbe C soit une géodésique de l'espace variationnel considéré, il faut et il suffit que la différentielle absolue du vecteur l^ν soit identiquement nulle le long de la courbe, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\nabla l^\nu}{ds_0} \equiv \frac{dl^\nu}{ds_0} + C_{\lambda\ \mu}^{\ \nu}\, l^\lambda \frac{dx'^\mu}{ds_0} + \Gamma_{\lambda\ \mu}^{\ \nu}\, l^\lambda \frac{dx^\mu}{ds_0} = 0.$$

Il résulte alors de l'équation (15.1) que le système différentiel aux géodésiques de l'espace peut s'écrire

$$\frac{d^2x^\nu}{ds_0^2} + \Gamma_{\lambda\ \mu}^{\ \nu} \frac{dx^\lambda}{ds_0} \frac{dx^\mu}{ds_0} = 0,$$

soit

$$\frac{d^2x^\nu}{ds_0^2} + 2\,G^\nu\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds_0}\right) = 0. \tag{16.2}$$

Nous nous proposons de montrer que ces géodésiques coïncident avec les extrémales généralisées de l'intégrale J. En effet, en vertu de l'équation (14.6), on a, pour le vecteur l^ν défini par (16.1),

$$2\,G_\lambda(x^\alpha, l^\alpha) = 2\,\hat{G}_\lambda(x^\alpha, l^\alpha) - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau \omega_{l\lambda} + \omega g'_{\lambda\sigma} l^\sigma - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau K_\lambda.$$

Le système différentiel (16.2) aux géodésiques peut ainsi être mis sous la forme

$$g'_{\lambda\rho}\frac{d^2x^\rho}{ds_0^2} + 2\,\hat{G}_\lambda\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds_0}\right) = \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau K_\lambda - \omega\left(g'_{\lambda\sigma} l^\sigma - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau l_\lambda\right). \tag{16.3}$$

Or, d'après un résultat classique de la théorie des espaces de Finsler, on a manifestement dans l'espace E

$$g'_{\lambda\rho}\frac{d^2x^\rho}{ds_0^2} + 2\,\hat{G}_\lambda\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds_0}\right) = \frac{d}{ds_0}\frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial H(o)}{\partial x^\lambda} \qquad \left(\text{avec } x'^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds_0}\right). \tag{16.4}$$

D'autre part, quels que soient les x'^λ de l'identité

$$H(o)\,H'(o) = \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau,$$

on déduit par dérivation

$$H(o)\,\partial_{\lambda'} H'(o) + H'(o)\,\partial_{\lambda'} H(o) = g'_{\lambda\sigma} x'^\sigma,$$

soit

$$H(o)\,\partial_{\lambda'} H'(o) = g'_{\lambda\sigma} x'^\sigma - \frac{1}{2H^2(o)} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau g_{\lambda\rho} x'^\rho.$$

En appliquant les identités précédentes aux quantités l^ν définies par (16.1), il vient

$$H'(o) = \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau, \tag{16.5}$$

$$\partial_{l'} H'(o) = g'_{\lambda\sigma} l^\sigma - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau l_\lambda. \tag{16.6}$$

Substituons (16.4), (16.5), (16.6) dans (16.3). Le système différentiel aux géodésiques est transformé en le système différentiel

$$\frac{d}{ds_0} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial H(o)}{\partial x^\lambda} = H'(o) \frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda} - \omega \frac{\partial H'(o)}{\partial x'^\lambda} \qquad \left(\text{avec } x'^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds_0}\right), \tag{16.7}$$

qui coïncide avec le système (9.2) aux extrémales généralisées, le paramètre choisi étant $u = s_0$. Dans les hypothèses d'homogénéité faites, il est à noter d'ailleurs que le paramètre u peut être choisi arbitrairement dans le système (9.2). Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Les géodésiques de l'espace variationnel généralisé attaché à une intégrale* (11.2) *coïncident avec les extrémales généralisées de cette intégrale.*

Ainsi, à l'aide de la connexion $C^\nu_{\lambda\mu}$, $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, les extrémales généralisées de l'intégrale donnée se développent sur l'espace euclidien selon les droites.

17. *Le parallélisme relativement à la connexion de l'espace et à la connexion intermédiaire.* — Le parallélisme d'une famille de vecteurs $X^\nu(v)$, le long d'une courbe C, relativement à la connexion d'éléments linéaires $C^\nu_{\lambda\mu}$, $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, est défini par le système différentiel (1)

$$\begin{aligned} &X^\rho\left(\frac{dX^\nu}{dv} + C_\lambda{}^\nu{}_\mu X^\lambda \frac{dx'^\mu}{dv} + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu X^\lambda \frac{dx^\mu}{dv}\right) \\ &- X^\nu\left(\frac{dX^\rho}{dv} + C_\lambda{}^\rho{}_\mu X^\lambda \frac{dx'^\mu}{dv} + \Gamma_\lambda{}^\rho{}_\mu X^\lambda \frac{dx^\mu}{dv}\right) = 0. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Il est aisé de vérifier que *le parallélisme est le même pour toute courbe relativement à la connexion* $C^\nu_{\lambda\mu}$, $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ *de l'espace variationnel et à la connexion intermédiaire* $\overline{C}^\nu_{\lambda\mu}$, $\overline{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$. On a, en effet, entre ces deux connexions les relations

$$C_\lambda{}^\nu{}_\mu = \overline{C}_\lambda{}^\nu{}_\mu; \qquad \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu = \overline{\Gamma}_\lambda{}^\nu{}_\mu - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} K_\mu g^\nu{}_\lambda. \tag{17.2}$$

En retranchant les équations de parallélisme correspondant à la connexion intermédiaire des équations (17.1), il vient

$$(g^\nu{}_\alpha a_\lambda{}^\rho{}_\mu - g^\rho{}_\alpha a_\lambda{}^\nu{}_\mu) X^\alpha X^\lambda \frac{dx^\mu}{dv} = 0, \tag{17.3}$$

avec

$$a_\lambda{}^\nu{}_\mu = \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu - \overline{\Gamma}_\lambda{}^\nu{}_\mu.$$

(1) *Cf.* E. EISENHART, *Non-riemannian geometry* (*loc. cit.*, p. 12-14 et p. 30-31).

équations qui sont identiquement vérifiées, quel que soit le vecteur X^ν et quelle que soit la courbe pour

$$\omega_\gamma{}^\nu{}_\mu = \frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}\mathrm{K}_\mu g^\nu{}_\gamma.$$

ce qui démontre la propriété. En particulier les géodésiques relatives à la connexion intermédiaire, c'est-à-dire les lignes dont les tangentes sont parallèles à elles-mêmes par rapport à ces lignes, *coïncident avec les géodésiques de l'espace variationnel*, donc avec les extrémales généralisées de l'intégrale fondamentale.

18. *Les espaces variationnels ponctuels.* — Nous nous proposons de rechercher tous les espaces variationnels qui peuvent être envisagés comme espaces ponctuels. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit :

a. que les coefficients $C_{\gamma\mu\alpha}$ *soient nuls*, ce qui entraîne que les coefficients $g_{\gamma\mu}(o)$ de la métrique soient indépendants des x'^α;

b. que les coefficients $\Gamma^\nu_{\gamma\mu}$ *soient indépendants des* x'^ρ.

D'après la condition *a*, les coefficients $\Gamma^\nu_{\gamma\mu}$ se réduisent nécessairement à la forme

$$\Gamma_\gamma{}^\nu{}_\mu = \gamma_\gamma{}^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}\mathrm{K}_\mu g^\nu{}_\gamma + \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(g'_{\lambda\rho}\mathrm{K}_\mu + g'_{\rho\mu}\mathrm{K}_\gamma - g'_{\gamma\mu}\mathrm{K}_\rho). \tag{18.1}$$

Si les éléments (18.1) sont indépendants des x'^ρ, il en est nécessairement de même des quantités

$$\Gamma_\gamma{}^\nu{}_\mu - \Gamma_\mu{}^\nu{}_\gamma = \frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}(\mathrm{K}_\gamma g^\nu{}_\mu - \mathrm{K}_\mu g^\nu{}_\gamma).$$

Posons

$$\mathrm{Q}_\mu = \frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta}\mathrm{K}_\mu. \tag{18.2}$$

Les quantités $\mathrm{Q}_\gamma g^\nu_\mu - \mathrm{Q}_\mu g^\nu_\mu$ seront indépendantes des x'^ρ, si, quel que soit l'indice ρ, on a

$$\partial_\rho \mathrm{Q}_\gamma g^\nu{}_\mu - \partial_\rho \mathrm{Q}_\mu g^\nu{}_\gamma = 0. \tag{18.3}$$

Choisissons arbitrairement les valeurs des deux indices ρ et λ et donnons dans (18.3) à l'indice γ une valeur différente de λ, à l'indice ν la valeur μ. Il vient ainsi

$$\partial_\rho \mathrm{Q}_\gamma - \partial_\rho \mathrm{Q}_\mu g^\mu{}_\gamma = 0 \qquad \text{(sans sommation en } \mu\text{)},$$

soit

$$\partial_\rho \mathrm{Q}_\gamma = 0.$$

et les quantités Q_γ définies par (18.2) doivent être indépendantes des x'^ρ.

Ainsi, pour que les coefficients $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ soient indépendants des x'^{ρ}, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour les Q_μ et pour les coefficients

$$\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu = \gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu + \frac{1}{2} g^{\nu\rho}(g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\rho\mu} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho)$$

de la connexion intermédiaire.

Examinons séparément ces deux conditions. Si les $\overline{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\mu}$ sont indépendants des x'^{ρ}, il en sera de même des $\overline{\Gamma}_{\lambda\nu\mu}$ et par suite des quantités

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} + g'_{\lambda\mu}(0) K_\nu.$$

Il en résulte qu'il existe une fonction ψ des variables x^ρ et x'^ρ et des fonctions $h_{\lambda\mu}$ et J_ν ne dépendant que des variables x^σ telles que l'on ait

$$g'_{\lambda\mu}(0) = \psi h_{\lambda\mu}(x^\sigma), \qquad K_\nu = \frac{1}{\psi} J_\nu(x^\sigma).$$

On en déduit, d'après (18.2),

$$Q_\mu = \frac{1}{2} \frac{h_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} J_\mu.$$

Par suite, pour que les Q_μ soient indépendants des x'^ρ, il faut et il suffit qu'il existe une fonction φ ne dépendant que des variables x^σ telle que

$$h_{\alpha\beta}(x^\sigma) = \varphi(x^\sigma) g_{\alpha\beta}(0).$$

Lorsqu'il en est ainsi, les coefficients (18.1) sont donnés par les formules

$$\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu = \gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\varphi J_\mu g^\nu{}_\lambda - \frac{1}{2}\varphi g^{\nu\rho}(g_{\lambda\rho} J_\mu + g_{\rho\mu} J_\lambda - g_{\lambda\mu} J_\rho),$$

soit

$$\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu = \gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\varphi g^{\nu\rho}(g_{\lambda\rho} J_\mu - g_{\lambda\mu} J_\rho). \tag{18.4}$$

La connexion ainsi obtenue n'est autre que la connexion semi-symétrique (2.2), associée au vecteur covariant φJ_λ. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — *Les seuls espaces variationnels généralisés qui puissent être considérés comme espaces ponctuels sont les espaces admettant la connexion semi-symétrique* (2.2).

IV. — Différentielle absolue et dérivées covariantes.

19. *Différentielle absolue du vecteur unitaire l^ν.* — Il est clair que les quantités dx^ν constituent les composants contravariants d'un vecteur. Il n'en est évidemment pas de même pour les quantités dx'^ν, et il est par suite peu indiqué de les utiliser pour la construction de tenseurs se déduisant par dérivation d'un

tenseur donné. Nous leur substituerons à cet effet les n composants Π^ν de la différentielle absolue du vecteur unitaire l^ν. On a

$$\Pi^\nu = \nabla l^\nu = d l^\nu + C_\lambda{}^\nu{}_\mu l^\lambda dx'^\mu + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu l^\lambda dx^\mu.$$

Or, d'après les conditions d'homogénéité,

$$C_\lambda{}^\nu{}_\mu x'^\lambda = 0; \qquad C_\lambda{}^\nu{}_\mu l^\lambda = C_\lambda{}^\nu{}_\mu \frac{x'^\lambda}{H(0)} = 0. \tag{19.1}$$

Par suite

$$\Pi^\nu = d l^\nu + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu l^\lambda dx^\mu,$$

soit, en explicitant les composants l^ν du vecteur unitaire,

$$\Pi^\nu = d\left|\frac{x'^\nu}{H(0)}\right| + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu \frac{x'^\lambda}{H(0)} dx^\mu = \frac{dx'^\nu}{H(0)} - x'^\nu \frac{d H(0)}{H^2(0)} + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu \frac{x'^\lambda}{H(0)} dx^\mu. \tag{19.2}$$

Inversement des formules (19.2) on peut tirer nne expression des dx'^ν à partir des Π^ν et des dx^ν. Il vient ainsi

$$dx'^\nu = H(0)\Pi^\nu + x'^\nu \frac{d H(0)}{H(0)} - \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu x'^\lambda dx^\mu. \tag{19.3}$$

formules que nous utiliserons fréquemment dans la suite.

20. *Les formes de Pfaff fondamentales.* — Étant donné un champ de vecteurs X^ν, la différentielle absolue ∇X^ν du vecteur X^ν dans l'espace variationnel généralisé peut s'écrire

$$\nabla X^\nu = dX^\nu + (C_\lambda{}^\nu{}_\mu dx'^\mu + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu dx^\mu) X^\lambda.$$

Nous sommes ainsi conduits avec E. Cartan (1) à introduire les formes de Pfaff

$$\omega^\nu{}_\lambda = C_\lambda{}^\nu{}_\mu dx'^\mu + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu dx^\mu \tag{20.1}$$

et à poser

$$\nabla X^\nu = dX^\nu + \omega^\nu{}_\lambda X^\lambda. \tag{20.2}$$

Les formes ω^ν_λ s'expriment aisément à partir des Π^μ et des dx^μ. Des formules (19.3) et (20.1), on déduit

$$\omega^\nu{}_\lambda = C_\lambda{}^\nu{}_\mu \left| H(0)\Pi^\mu + x'^\mu \frac{d H(0)}{H(0)} - \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\rho x'^\alpha dx^\rho \right| + \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu dx^\mu,$$

soit, en vertu des formules (19.1),

$$\omega^\nu{}_\lambda = H(0) C_\lambda{}^\nu{}_\mu \Pi^\mu + (\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu - C_\lambda{}^\nu{}_\rho \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\mu x'^\alpha) dx^\mu.$$

(1) *Cf.* E. Cartan, *Les espaces de Finsler* (*Actual. scient. et ind.*, t. 79, p. 14).

Nous poserons dans la suite

$$A_\lambda{}^\nu{}_\mu = H(o)\, C_\lambda{}^\nu{}_\mu. \tag{20.3}$$

$$\Gamma^*_\lambda{}^\nu{}_\mu = \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu - C_\lambda{}^\nu{}_\rho \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\mu x'^\alpha \tag{20.4}$$

et les formules ω^ν_λ pourront s'écrire

$$\omega^\nu{}_\lambda = A_\lambda{}^\nu{}_\mu \Pi^\mu + \Gamma^*_\lambda{}^\nu{}_\mu \, dx^\mu. \tag{20.5}$$

A noter que, d'après les formules (19.1), on a les identités importantes

$$\Gamma^*_\lambda{}^\nu{}_\mu x'^\lambda = \Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu x'^\lambda. \tag{20.6}$$

21. *Différentielle absolue et dérivées covariantes d'un tenseur.* — Considérons un champ de tenseurs, par exemple covariants à deux indices, et soient $T_{\alpha\beta}(x^\rho, x'^\rho)$ les fonctions, homogènes et de degré zéro par rapport aux variables x'^ρ, qui constituent les composantes de ces tenseurs. La différentielle absolue correspondante s'exprime à l'aide des formes de Pfaff fondamentales par la formule

$$\nabla T_{\alpha\beta} = dT_{\alpha\beta} - \omega^\lambda{}_\alpha T_{\lambda\beta} - \omega^\lambda{}_\beta T_{\alpha\lambda}. \tag{21.1}$$

Or,

$$dT_{\alpha\beta} = \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta}\, dx'^\rho + \partial_\rho T_{\alpha\beta}\, dx^\rho.$$

soit, en remplaçant dx'^ρ par son expression tirée de (19.3) et en tenant compte des identités (19.1) et (20.6)

$$dT_{\alpha\beta} = \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} [\, H(o)\, \Pi^\rho - \Gamma^*_\lambda{}^\rho{}_\mu x'^\lambda \, dx^\mu \,] + \partial_\rho T_{\alpha\beta}\, dx^\rho. \tag{21.2}$$

En substituant (21.2) dans (21.1) et en introduisant les expressions (20.5) des formes de Pfaff fondamentales, il vient

$$\begin{aligned} \nabla T_{\alpha\beta} = {} & [\partial_\rho T_{\alpha\beta} - \Gamma^*_\lambda{}^\sigma{}_\rho x'^\lambda \partial_{\sigma'} T_{\alpha\beta} - \Gamma^*_\alpha{}^\lambda{}_\rho T_{\lambda\beta} - \Gamma^*_\beta{}^\lambda{}_\rho T_{\alpha\lambda}]\, dx^\rho \\ & + [\, H(o)\, \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} - A_\alpha{}^\lambda{}_\rho T_{\lambda\beta} - A_\beta{}^\lambda{}_\rho T_{\alpha\lambda}]\, \Pi^\rho. \end{aligned}$$

De cette expression de la différentielle absolue, il résulte que les systèmes de quantité

$$\nabla_\rho T_{\alpha\beta} = \partial_\rho T_{\alpha\beta} - \Gamma^*_\lambda{}^\sigma{}_\rho x'^\lambda \partial_{\sigma'} T_{\alpha\beta} - \Gamma^*_\alpha{}^\lambda{}_\rho T_{\lambda\beta} - \Gamma^*_\beta{}^\lambda{}_\rho T_{\alpha\lambda}. \tag{21.3}$$

$$\nabla_{\pi^\rho} T_{\alpha\beta} = H(o)\, \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} - A_\alpha{}^\lambda{}_\rho T_{\lambda\beta} - A_\beta{}^\lambda{}_\rho T_{\alpha\lambda} \tag{21.4}$$

définissent respectivement deux tenseurs déduits du tenseur $T_{\alpha\beta}$ par dérivation.

Nous démontrerons ultérieurement que les $A^\nu_{\lambda\mu}$ constituent les composantes d'un tenseur. Il en résulte, d'après (21.4), que le système des quantités

$$\nabla_{\rho'} T_{\alpha\beta} = H(o)\, \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} \tag{21.5}$$

définit lui aussi un tenseur. On a en particulier

$$\nabla_{\rho'} \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) = H(o)\, C_{\alpha\beta\rho} = A_{\alpha\beta}.$$

Les deux tenseurs (21.3) et (21.5) constituent les deux systèmes de dérivées covariantes du tenseur donné $T_{\alpha\beta}$.

V. — La connexion de Varga.

22. *Les espaces à torsion finslérienne nulle.* — Dans cette section, nous nous proposons d'adapter à la théorie des espaces variationnels généralisés une méthode donnée par Varga (1) pour la construction de la connexion euclidienne attachée à un espace de Finsler. La connexion que nous obtiendrons ainsi et qui diffère légèrement de la connexion construite à la section III sera dite, pour abréger, *connexion de Varga*.

Considérons les espaces variationnels admettant une métrique telle que les $g_{\alpha\beta}$ soient indépendants des x'^{α}, c'est-à-dire telle que

$$ds_0^2 = H^2(0, x^{\alpha}, x'^{\alpha})$$

soit une forme quadratique par rapport aux x'^{α}. Pour de tels espaces, les composantes $C^{\gamma}_{\lambda\mu}$ et par suite les composantes $A^{\gamma}_{\lambda\mu}$ sont identiquement nulles. Or, nous démontrerons ultérieurement que le tenseur $A^{\gamma}_{\lambda\mu}$ n'est autre que le tenseur de torsion finslérienne de l'espace. Les espaces variationnels considérés sont donc *les espaces à torsion finslérienne nulle;* ils admettent en vertu de (14.3) et (14.4), la connexion d'éléments

$$(22.1)\quad C^{\gamma}_{\lambda\mu} = 0: \quad \Gamma^{\gamma}_{\lambda\mu} = \gamma^{\gamma}_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\frac{g'_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}} h_{\mu} g^{\gamma}{}_{\lambda} + \frac{1}{2} g^{\gamma\rho}(g'_{\lambda\rho} h_{\mu} + g'_{\mu\rho} h_{\lambda} - g'_{\lambda\mu} h_{\rho}).$$

C'est à partir de cette connexion des espaces à torsion finslérienne nulle, supposée obtenue d'une manière autonome, que nous allons chercher à construire la connexion de l'espace variationnel le plus général.

23. *Définition de la connexion de Varga.* — Sur la variété V, donnons-nous une suite S continûment différentiable à un paramètre d'éléments linéaires

$$(S)\qquad x^{\lambda} = x^{\lambda}(t); \qquad x'^{\lambda} = x'^{\lambda}(t) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

L'intégrale J étant donnée, à chaque élément linéaire de la suite C correspond une extrémale généralisée C de l'intégrale J. La famille à un paramètre d'extrémales généralisées ainsi obtenue sera supposée plongée dans une famille d'extrémales qui recouvre une fois un domaine D n-dimensionnel de V. A chaque point M de D correspond ainsi une direction bien déterminée tangente à l'extrémale passant par ce point. Si nous normons à l'aide de ds_0^2 le

(1) *Cf.* VARGA. *Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen* (*Mon. Math. und. Phys.*, t. 50, 1941, p. 165-175).

vecteur définissant cette direction, nous obtenons un champ de vecteurs défini dans D

$$r^\lambda = r^\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Dans les fonctions $g_{\alpha\beta}(\mathrm{F}, x^\nu, x'^\nu)$, substituons aux x'^ν les composantes r^ν. Nous obtenons ainsi les fonctions

$$g^*_{\alpha\beta}(\mathrm{F}, x^\lambda) \equiv g_{\alpha\beta}(\mathrm{F}, x^\lambda, r^\lambda).$$

La métrique $g_{\alpha\beta}(\mathrm{F}, x^\nu)\,dx^\alpha\,dx^\beta$ et l'intégrale F donnée par (11.1) définissent un espace à torsion finslérienne nulle admettant la connexion d'éléments

$$(23.1)\quad \underset{(V)}{\Gamma^*}{}^\nu_{\lambda\mu} = \gamma^\nu_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\frac{g^{\nu\sigma}x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}\mathrm{K}_\mu g^\nu{}_\lambda + \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(g'_{\lambda\rho}\mathrm{K}_\mu + g'_{\mu\rho}\mathrm{K}_\lambda - g'_{\lambda\mu}\mathrm{K}_\rho)$$
$$+ \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial r^\alpha}\partial_\mu r^\alpha + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial r^\alpha}\partial_\lambda r^\alpha - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial r^\alpha}\partial_\rho r^\alpha\right),$$

où les dérivées $\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial r^\alpha}$ sont les dérivées $\partial_{x'} g_{\lambda\rho}$ évaluées pour les composantes r^α.

Toute géodésique de la connexion (23.1) qui admet comme élément linéaire l'un des éléments linéaires de S est osculatrice à l'extrémale C admettant le même élément linéaire (1). *C'est pourquoi nous dirons que l'espace à torsion finslérienne nulle* (23.1) *est osculateur le long de* S *à l'espace variationnel considéré.*

De l'ensemble des espaces à torsion finslérienne nulle osculateurs à l'espace variationnel le long de S, on peut extraire (2) un sous-ensemble d'espaces tels que, le long de S, soit satisfaite la condition de parallélisme

$$(23.2)\quad \partial_\mu r^\nu + \underset{(V)}{\Gamma^*}{}^\nu_{\lambda\mu} r^\lambda = 0;$$

dont la signification géométrique est évidente. Tout espace (23.1) osculateur le long de S et tel que la relation (23.2) soit satisfaite sera dit *surosculateur* à l'espace variationnel le long de S.

Supposons attaché à chaque élément linéaire de S un vecteur $\vec{X}(t)$. *Par définition la différentielle absolue du vecteur* $\vec{X}$, *dans la connexion de Varga attachée à l'espace variationnel, sera égale à la différentielle absolue du vecteur* $\vec{X}$ *dans tout espace à torsion finslérienne nulle surosculateur le long de S.*

24. *Calcul de la connexion de Varga.* — Proposons-nous de calculer explicitement les éléments de la connexion de Varga ainsi définie. A cet effet cherchons à évaluer les quantités $\overset{*}{\underset{(V)}{\Gamma}}{}^\nu_{\lambda\rho\mu}$ qui s'introduisent naturellement dans

(1) La démonstration donnée par Nazim pour les espaces de Finsler (*Ueber Finslersche Räume Diss. München.* 1936) est encore valable ici.

(2) *Cf.* VARGA, *Monatsh. Math. und Phys.*, t. 50, 1941, p. 171 et 173.

la condition de parallélisme. Compte tenu des identités (19.1) et de la relation classique

$$r^\lambda \gamma_{\lambda\rho\mu} = \frac{\partial \mathring{G}_\rho(x^\alpha, r^\beta)}{\partial r^\mu},$$

on déduit de la formule (23.1), la formule

$$(24.1)\qquad r^\lambda \underset{(V)}{\Gamma^*}_{\lambda\rho\mu} = \frac{\partial \mathring{G}_\rho}{\partial r^\mu} - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau K_\mu r_\rho + \frac{1}{2}(g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\mu\rho} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho) r^\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial r^\alpha} r^\lambda \partial_\lambda r^\alpha.$$

Or, d'après la condition de parallélisme (23.2), on a

$$(24.2)\qquad r^\lambda \partial_\lambda r^\alpha = - \underset{(V)}{\Gamma^*}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\mu} r^\lambda r^\mu.$$

Cherchons à évaluer cette quantité en multipliant par r^μ les deux membres de (24.1). Il vient

$$r^\lambda r^\mu \underset{(V)}{\Gamma^*}_{\lambda\rho\mu} = 2\mathring{G}_\rho - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau \omega r_\rho + \omega g'_{\rho\lambda} r^\lambda - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau K_\rho,$$

soit, en vertu de (14.6),

$$(24.3)\qquad r^\lambda r^\mu \underset{(V)}{\Gamma^*}_{\lambda\rho\mu} = 2 G_\rho(x^\alpha, r^\beta);$$

formule qui nous assure de l'existence des espaces surosculateurs (¹). De (24.1), (24.2), (24.3) on déduit

$$(24.4)\qquad r^\lambda \underset{(V)}{\Gamma^*}_{\lambda\rho\mu} = \frac{\partial \mathring{G}_\rho}{\partial r^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial r^\mu} G^\alpha - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau K_\mu r_\rho + \frac{1}{2}(g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\mu\rho} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho) r^\lambda.$$

Afin d'évaluer $\frac{\partial \mathring{G}_\rho}{\partial r^\mu}$ en fonction de $\frac{\partial G_\rho}{\partial r^\mu}$, dérivons par rapport à x'^μ les deux membres de l'équation (14.6). Il vient ainsi

$$(24.5)\qquad \partial_{\mu'} G_\rho = \partial_{\mu'} \mathring{G}_\rho - \frac{1}{4} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} (\omega g_{\rho\mu} + K_\mu g_{\rho\alpha} x'^\alpha) - \frac{1}{2} \frac{\omega g_{\rho\alpha} x'^\alpha}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} \left(g'_{\mu\sigma} x'^\sigma - \frac{g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} g_{\mu\sigma} x'^\sigma \right) + \frac{1}{2}(g'_{\rho\mu} K_\lambda + g'_{\rho\lambda} K_\mu - g'_{\lambda\mu} K_\rho) x'^\lambda - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau \partial_{\mu'} K_\rho.$$

On en déduit en substituant aux x'^α les r^α

$$(24.6)\qquad \frac{\partial G_\rho}{\partial r^\mu} = \frac{\partial \mathring{G}_\rho}{\partial r^\mu} - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau (\omega g_{\rho\mu} + K_\mu r_\rho) - \frac{1}{2} \omega r_\rho (g'_{\mu\sigma} r^\sigma - g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau r_\mu) + \frac{1}{2}(g'_{\rho\mu} K_\lambda + g'_{\rho\lambda} K_\mu - g'_{\lambda\mu} K_\rho) r^\lambda - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau \frac{\partial K_\rho}{\partial r^\mu}.$$

(¹) *Cf.* VARGA, *Monatsh. Math. und Phys.*, t. 50, 1941, p. 175.

Si l'on tire $\frac{\partial G_\rho}{\partial r^\mu}$ de la formule (24.6) et reporte dans la formule (24.4), on obtient, après simplification,

$$(24.7)\qquad r^\nu \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}^*_{\lambda\rho\mu} = g_{\rho\nu}\frac{\partial G^\nu}{\partial r^\mu} + \frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}r^\sigma r^\tau(\omega g_{\rho\mu} - k_\mu r_\rho) + \frac{1}{2}\omega r_\rho(g'_{\mu\sigma}r^\sigma - g'_{\sigma\tau}r^\sigma r^\tau r_\mu) + \frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}r^\sigma r^\tau\frac{\partial k}{\partial r^\mu},$$

et par suite, en vertu de (23.2),

$$(24.8)\qquad \partial_\mu r^\nu = -\frac{\partial G^\nu}{\partial r^\mu} - \frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}r^\sigma r^\tau(\omega g^\nu{}_\mu - k_\mu r^\nu) + \frac{1}{2}\omega r^\nu(g'_{\sigma\tau}r^\sigma r^\tau r_\mu - g'_{\mu\sigma}r^\sigma) - \frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}r^\sigma r^\tau g^{\nu\rho}\frac{\partial k_\rho}{\partial r^\mu}.$$

Substituons cette expression de $\partial_\mu r^\nu$ dans la formule (23.1) donnant les éléments $\overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$ de la connexion et posons

$$C_{\alpha\mu\lambda} = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\lambda\mu}; \qquad k_{\rho\mu} = \partial_\rho k_\mu = \partial_\mu k_\rho; \qquad k^\nu{}_\mu = g^{\nu\rho}k_{\rho\mu}.$$

En tenant compte de l'homogénéité des différents termes, il vient

$$(24.9)\qquad \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}^*_{\lambda}{}^\nu{}_\mu = \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}_\lambda{}^\nu{}_\mu + \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial r^\alpha}\partial_\mu r^\alpha,$$

avec

$$(24.10)\qquad \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}_\lambda{}^\nu{}_\mu = \gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\frac{g'_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}k_\mu g_\lambda{}^\nu + \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(g'_{\lambda\rho}k_\mu + g'_{\mu\rho}k_\lambda - g'_{\lambda\mu}k_\rho) + g^{\nu\rho}(C_{\alpha\mu\lambda}\partial_\rho G^\alpha - C_{\alpha\mu\rho}\partial_\lambda G^\alpha) + \frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau g^{\nu\rho}(C_{\alpha\mu\lambda}k^\alpha{}_\rho - C_{\alpha\mu\rho}k^\alpha{}_\lambda).$$

Cela étant posé, évaluons dans la connexion de Varga la différentielle absolue du vecteur $X^\nu(t)$. On a

$$\frac{\overset{\mathrm{V}}{\nabla}X^\nu}{dt} = \frac{dX^\nu}{dt} + \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}^*_{\lambda}{}^\nu{}_\mu X^\lambda\frac{dx^\mu}{dt},$$

soit, d'après la formule (24.9) et les théorèmes sur les dérivées des fonctions composées,

$$(24.11)\qquad \frac{\overset{\mathrm{V}}{\nabla}X^\nu}{dt} = \frac{dX^\nu}{dt} + C_\lambda{}^\nu{}_\alpha X^\lambda\frac{dr^\alpha}{dt} + \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}_\lambda{}^\nu{}_\mu X^\lambda\frac{dx^\mu}{dt}.$$

Il en résulte que *la connexion de Varga admet pour éléments les* $C^\nu_{\lambda\mu}$ *et les* $\overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$ *définis par les formules* (24.10)

En vertu de (23.2) et de l'homogénéité des $C^\nu_{\lambda\mu}$, les relations (24.9) peuvent se mettre sous la forme

$$(24.12)\qquad \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}^*_{\lambda}{}^\nu{}_\mu = \overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}_\lambda{}^\nu{}_\mu - C_\lambda{}^\nu{}_\rho\overset{\mathrm{V}}{\Gamma}{}^*_{\alpha}{}^\rho{}_\mu r^\alpha.$$

Multiplions les deux membres de (24.12) par x'^{ν}. Il vient, d'après les identités (19.1),

$$\Gamma^{*\nu}_{(V)\lambda\mu} x'^{\lambda} = \Gamma^{\nu}_{(V)\lambda\mu} x'^{\lambda}. \tag{24.13}$$

Il en résulte que l'on a

$$\Gamma^{*\nu}_{(V)\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{(V)\lambda\mu} - C_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\rho} \Gamma^{\rho}_{(V)\mu\alpha} x'^{\alpha}, \tag{24.14}$$

formules qui sont à rapprocher de (20.4)

25. *Comparaison de la connexion de Varga avec la première connexion.* — Il est facile de comparer la connexion définie par les formules (24.10) avec celle définie par les formules (14.4). On a manifestement

$$\Gamma^{\nu}_{(V)\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{1}{4} g'^{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} g^{\nu\rho} (C_{\alpha\mu\lambda} K^{\alpha}_{\rho} - C_{\alpha\mu\rho} K^{\alpha}_{\lambda}). \tag{25.1}$$

Or, d'après la définition des quantités $K_{\lambda\beta}$, on a les relations

$$x'^{\lambda} K^{\alpha}_{\lambda} = g^{\alpha\beta} x'^{\lambda} K_{\lambda\alpha} = 0.$$

En multipliant les deux membres de (25.1) par x'^{λ}, il vient, par suite,

$$\Gamma^{\nu}_{(V)\lambda\mu} x'^{\lambda} = \Gamma^{\nu}_{(V)\lambda\mu} x'^{\lambda}. \tag{25.2}$$

Il en résulte qu'entre les éléments $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ et $\Gamma^{*\nu}_{(V)\lambda\mu}$ définis respectivement par les formules (20.4) et (24.14), il existe les mêmes relations qu'entre les éléments $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ et $\Gamma^{\nu}_{(V)\lambda\mu}$

$$\Gamma^{*\nu}_{(V)\lambda\mu} = \Gamma^{*\nu}_{\lambda\mu} + \frac{1}{4} g'^{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} g^{\nu\rho} (C_{\alpha\mu\lambda} K^{\alpha}_{\rho} - C_{\alpha\mu\rho} K^{\alpha}_{\lambda}). \tag{25.3}$$

Des formules (25.2), il résulte que les géodésiques des deux connexions coïncident. Les géodésiques de la connexion de Varga coïncident donc bien, elles aussi, avec les extrémales généralisées de l'intégrale J.

D'une manière générale, la théorie des espaces variationnels peut être construite en utilisant indifféremment l'une ou l'autre connexion. En particulier on pourra introduire les composantes $\Pi^{\nu}_{(V)}$ de la différentielle absolue du vecteur unitaire dans la connexion de Varga, ainsi que les formes de Pfaff fondamentales $\omega^{\nu}_{(V)\lambda}$ relatives à cette connexion

$$\omega^{\nu}_{(V)\lambda} = C_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} dx'^{\mu} + \Gamma^{\nu}_{(V)\lambda\mu} dx^{\mu},$$

soit en vertu des formules (24.14),

$$\omega^{\nu}_{(V)\lambda} = N_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} \Pi^{\mu}_{(V)} + \Gamma^{*\nu}_{(V)\lambda\mu} dx^{\mu}.$$

C'est au moyen de ces formes que l'on construira les dérivées covariantes d'un tenseur relativement à la connexion de Varga.

Il est facile de donner explicitement la valeur commune des quantités (24.13) et (25.2) qui interviennent dans l'expression de l'une des dérivées covariantes d'un tenseur. On a, en effet, d'après (24.7),

$$(25.4)\quad \Gamma^{*}_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu}x'^{\lambda} = \frac{\partial G^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} + \frac{1}{4}\frac{g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}{g_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}(\omega g^{\nu}{}_{\mu} - K_{\mu}x'^{\nu}) + \frac{1}{2}\frac{\omega\lambda'^{\nu}}{g_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}\left(g'_{\mu\alpha}x'^{\alpha} - \frac{g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}{g_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}}g_{\mu\alpha}x'^{\alpha}\right) + \frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}K^{\nu}{}_{\mu}.$$

Nous terminerons cette comparaison des deux connexions par le théorème suivant :

THEORÈME. — *La connexion de Varga* (24.10) *ne fait intervenir que les dérivées du premier ordre de la fonction* ω *par rapport aux variables* x'^{ρ}.

Des formules (14.4), (15.3) et (24.5), il résulte manifestement que les éléments $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ de la première connexion font intervenir les dérivées du second ordre de la fonction ω. Dans $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ ces dérivées figurent dans les termes

$$D_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} = -\frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}g^{\nu\rho}(C_{\alpha\mu\lambda}\partial_{\rho'}K^{\alpha} - C_{\alpha\mu\rho}\partial_{\lambda'}K^{\alpha}).$$

Dans les éléments de la connexion de Varga les termes qui pourraient contenir de telles dérivées sont de la forme

$$E_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} = D_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} + \frac{1}{4}g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}g^{\nu\rho}(C_{\alpha\mu\lambda}K^{\alpha}{}_{\rho} - C_{\alpha\mu\rho}K^{\alpha}{}_{\lambda}).$$

Or il est clair que l'on a

$$K^{\alpha}{}_{\rho} = \partial_{\rho'}K^{\alpha} + 2C_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\beta}K^{\beta}.$$

Il en résulte

$$E_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}g'_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}g^{\nu\rho}(C_{\alpha\mu\lambda}C_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\beta} - C_{\alpha\mu\rho}C_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\beta})K^{\beta},$$

ce qui démontre le théorème.

VI. — Les tenseurs de courbure et de torsion.

26. *Définition des formes extérieures de courbure et de torsion.* — D'une manière analogue à ce qui se passe en géométrie finslérienne, l'introduction des tenseurs de courbure et de torsion s'effectue par l'étude des cycles d'éléments linéaires tracés dans l'espace variationnel envisagé. Considérons un cycle infinitésimal d'éléments linéaires, partant de l'élément e_1 et y revenant, et adjoignons à chaque élément linéaire du cycle le corps C des vecteurs issus du centre de l'élément. Nous pouvons développer le cycle ainsi complété sur l'espace euclidien à n dimensions. A l'élément e_1 correspondra initialement dans le développement un élément E_1 et un corps de vecteurs C_1 ; après avoir parcouru le cycle, le développement s'achèvera par un élément E_2 et un corps de

vecteurs C_2. Nous appellerons *déplacement associé au cycle* le déplacement qui amène (E_2, C_2) sur (E_1, C_1). Si nous décomposons ce déplacement en une translation amenant le centre de E_2 sur le centre de E_1 et une rotation autour du centre de E_1, la translation traduira la *torsion* de l'espace et la rotation sa *courbure*.

Le développement pourra s'effectuer selon l'une ou l'autre des deux connexions introduites et les résultats obtenus pour les tenseurs de courbure et de torsion différeront légèrement. Nous n'expliciterons les calculs que dans le cas où la connexion utilisée est la connexion (14.4).

A l'aide des formules de Frenet généralisées qui introduisent les dx^α et les formes de Pfaff fondamentales, on voit immédiatement que la torsion peut être caractérisée par les formes quadratiques extérieures

$$\Omega^\beta = dx^\alpha \wedge \omega^\beta{}_\alpha - D(dx^\alpha) = dx^\alpha \wedge \omega^\beta{}_\alpha \tag{26.1}$$

et la courbure par les formes quadratiques extérieures

$$\Omega^\beta{}_\alpha = \omega^\rho{}_\alpha \wedge \omega^\beta{}_\rho - D(\omega^\beta{}_\alpha), \tag{26.2}$$

où $\wedge$ et D indiquent respectivement les opérations de multiplication et de différentiation extérieure.

27. *Les tenseurs de torsion.* — Cherchons à expliciter les formes Ω^β. D'après l'expression (20.5) des formes de Pfaff fondamentales, il vient

$$\Omega^\beta = A_\alpha{}^\beta{}_\mu \, dx^\alpha \wedge \Pi^\mu + \Gamma^*{}_\alpha{}^\beta{}_\mu \, dx^\alpha \wedge dx^\mu. \tag{27.1}$$

Or, en vertu des formules (20.4), (25.2) et (25.4) les $\Gamma^*{}^\beta_{\alpha\mu}$ peuvent se mettre sous la forme

$$\Gamma^*{}_\alpha{}^\beta{}_\mu = \Sigma_\alpha{}^\beta{}_\mu - \frac{1}{2}\frac{g'_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau} K_\mu g^\beta{}_\alpha - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau C_\alpha{}^\beta{}_\rho K^\rho{}_\mu,$$

où les $\Sigma^\beta_{\alpha\mu}$ sont symétriques par rapport aux indices α et μ. Par suite de l'antisymétrie de $dx^\sigma \wedge dx^\mu$, ces coefficients s'éliminent de (27.1) et l'on a

$$\Omega^\beta = A_\alpha{}^\beta{}_\mu \, dx^\alpha \wedge \Pi^\mu + B_\alpha{}^\beta{}_\mu \, dx^\alpha \wedge dx^\mu, \tag{27.2}$$

avec

$$B_\alpha{}^\beta{}_\mu = -\frac{1}{4}\frac{g'_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}(2K_\mu g^\beta{}_\alpha + A_\alpha{}^\beta{}_\rho \nabla_{\rho'} K_\mu). \tag{27.3}$$

Les coefficients des formes quadratiques extérieures Ω^β sont ainsi définis à l'aide des deux tenseurs $A^\beta_{\alpha\mu}$ et $B^\beta_{\alpha\mu}$ auxquels nous donnerons le nom de *tenseurs de torsion;* $A^\beta_{\alpha\mu}$ sera le tenseur de *torsion finslérienne* de l'espace et $B^\beta_{\alpha\mu}$ le second tenseur de torsion. Pour un espace de Finsler, ce second tenseur est identiquement nul. On voit qu'il s'exprime d'une manière simple à l'aide du tenseur de torsion finslérienne, du vecteur K_μ et de ses dérivées covariantes.

28. *Définition des tenseurs de courbure.* — Les formes quadratiques extérieures Ω_β^α peuvent être mises, d'une infinité de manières, sous la forme (¹)

$$\Omega_\beta^\alpha = S_\beta^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\,\Pi^\lambda \wedge \Pi^\mu + P_\beta^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\,dx^\lambda \wedge \Pi^\mu + R_\beta^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\,dx^\lambda \wedge dx^\mu. \tag{28.1}$$

les formes Π^μ n'étant pas linéairement indépendantes, mais satisfaisant à la relation

$$l_\mu \Pi^\mu = 0.$$

La forme (28.1) sera unique pour les Ω_β^α, si l'on astreint les $S_{\alpha\beta\mu}^\gamma$ et $P_{\alpha\beta\mu}^\gamma$ à satisfaire aux identités

$$l^\mu P_\beta^{\alpha}{}_{\lambda\mu} = 0, \tag{28.2}$$

$$l^\mu S_\beta^{\alpha}{}_{\lambda\mu} = 0. \tag{28.3}$$

Dans ces conditions les $S_{\alpha\beta\mu}^\gamma$, $P_{\alpha\beta\mu}^\gamma$, $R_{\alpha\beta\mu}^\gamma$ sont respectivement les composantes de trois tenseurs qui seront dits *les tenseurs de courbure* de l'espace variationnel généralisé. Il est clair que ces trois tenseurs de courbure peuvent être obtenus séparément en utilisant, pour définir les rotations correspondantes, trois types de cycles infinitésimaux distincts.

29. *Calcul des tenseurs de courbure.* — Nous nous proposons d'expliciter ces trois tenseurs de courbure en fonction des composantes de la connexion. A cet effet, il sera commode de raisonner sur les formes quadratiques extérieures covariantes

$$\Omega_{\alpha\beta} = g_{\beta\rho}\Omega_\alpha^\rho = \omega^\rho{}_\beta \wedge \omega_{\alpha\rho} - D(\omega_{\alpha\beta}), \tag{29.1}$$

qui admettent pour coefficients les composantes covariantes $S_{\alpha\beta\lambda\mu}$, $P_{\alpha\beta\lambda\mu}$, $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ des trois tenseurs.

En utilisant les expressions (20.1) et (20.5) des formes de Pfaff fondamentales, il vient

$$\Omega_{\alpha\beta} = (A_{\beta\rho\lambda}\Pi^\lambda + \Gamma^*_{\beta\rho\lambda}\,dx^\lambda) \wedge (A_{\alpha\rho\mu}\Pi^\mu + \Gamma^*_{\alpha\rho\mu}\,dx^\mu) - D(\omega_{\alpha\beta}). \tag{29.2}$$

Or, d'après la définition de la différentiation extérieure,

$$D(\omega_{\alpha\beta}) = D(C_{\alpha\beta\lambda}\,dx'^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta\lambda}\,dx^\lambda) = dC_{\alpha\beta\lambda} \wedge dx'^\lambda + d\Gamma_{\alpha\beta\lambda} \wedge dx^\lambda.$$

Soit en développant les produits extérieurs et en notant que, par raison de symétrie, les termes en $dx'^\lambda \wedge dx^\mu$ s'éliminent

$$D(\omega_{\alpha\beta}) = \partial_\mu C_{\alpha\beta\lambda}\,dx^\mu \wedge dx'^\lambda + \partial_{\mu'}\Gamma_{\alpha\beta\lambda}\,dx'^\mu \wedge dx^\lambda + d_\mu\Gamma_{\alpha\beta\lambda}\,dx^\mu \wedge dx^\lambda. \tag{29.3}$$

En remplaçant dans (29.2) les $D(\omega_{\alpha\beta})$ par leurs valeurs tirées de (29.3) et en exprimant les dx'^λ au moyen des Π^λ et des dx^μ, on obtient la décomposition

(¹) *Cf.* É. Cartan, *Les espaces de Finsler* (*Actual. scient. et ind.*, t. 79, p. 33).

cherchée des $\Omega_{\alpha\beta}$ en somme de trois termes relatifs aux trois tenseurs de courbure. Les $D(\omega_{\alpha\beta})$ ne contenant aucun terme en $\Pi^\lambda \wedge \Pi^\mu$, on obtient, pour les $S_{\alpha\beta\lambda\mu}$, les expressions

$$S_{\alpha\beta\lambda\mu} = A_{\beta\rho_1} A_{\alpha\rho\mu} - A_{\beta\rho_\mu} A_{\alpha\rho_1}, \tag{29.4}$$

qui satisfont manifestement aux identités (28.3).

De même, pour les $P_{\alpha\beta\lambda\mu}$, il vient les expressions

$$P_{\alpha\beta\lambda\mu} = \Gamma^*_{\beta\rho_1} A_{\alpha\rho\mu} - \Gamma^*_{\alpha\rho_1} A_{\beta\rho\mu} - H(o)\,\partial_\lambda C_{\alpha\beta\mu} + H(o)\,\partial_{\mu'}\Gamma_{\alpha\beta_1}, \tag{29.5}$$

qui, en vertu des relations évidentes

$$x'^\mu \partial_\lambda C_{\alpha\beta\mu} = o,$$

satisfont aux identités (28.2).

Quant au troisième tenseur de courbure, il est fourni par les équations

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\lambda\mu} = {} & \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta_1} - \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta\mu} - (\partial_{\rho'}\Gamma_{\alpha\beta_1}\Gamma^*_{\sigma\rho\mu}x'^\sigma - \partial_{\rho'}\Gamma_{\alpha\beta\mu}\Gamma^*_{\sigma\rho_1}x'^\sigma) \\ & - \partial_\mu C_{\alpha\beta\rho}\Gamma^*_{\sigma\rho_1}x'^\sigma + \partial_\lambda C_{\alpha\beta\rho}\Gamma^*_{\sigma\rho\mu}x'^\sigma + \Gamma^*_{\alpha\rho_1}\Gamma^*_{\alpha\rho\mu} - \Gamma^*_{\beta\rho\mu}\Gamma^*_{\alpha\rho_1}. \end{aligned} \tag{29.6}$$

Aux quantités $\Gamma^*_{\sigma\mu}x'^\sigma$ qui y figurent, on peut substituer les quantités

$$\partial_{\mu'} G^\rho + \frac{1}{4}\frac{g'_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau}\left[\overset{\circ}{\omega} g^\rho{}_\mu + H(o) g^{\rho\nu}\nabla_\nu K_\mu\right],$$

qui se déduisent des seconds membres des équations (25.4) en y négligeant les termes en x'^ρ, qui ne peuvent donner naissance, dans (29.6), qu'à des termes identiqnement nuls.

VII. — Les espaces variationnels généralisés et la metric geometry of paths de Douglas.

30. *Les systèmes de paths.* — Dans un Mémoire bien connu (1), J. Douglas a défini et étudié une géométrie générale des systèmes de paths. L'une des géométries particulières qui découlent de cette géométrie générale est la « géométrie métrique » des systèmes de paths, dont Douglas a étudié les rapports avec la géométrie des espaces de Finsler. Par l'introduction des espaces variationnels généralisés, cette étude est susceptible de certaines précisions intéressantes.

On appelle système de paths sur V_n un système de courbes qui peut être défini par les équations de la forme

$$x^\lambda = f^\lambda(t, a) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n), \tag{30.1}$$

où t est un paramètre variant le long de chaque courbe et où a représente un ensemble de $(2n-2)$ paramètres essentiels variant d'une courbe à l'autre.

(1) J. Douglas, *The general geometry of paths* (*Ann. of Math.*, t. 29, 1928, p. 142-168).

Le système de courbes (30.1) est tel qu'il existe une courbe et une seule du système passant par un point donné et tangent à une direction arbitrairement donnée ou encore passant par deux points donnés suffisamment voisins l'un de l'autre. Les fonctions f^i seront supposées analytiques par rapport à leurs divers arguments, de telle sorte que les courbes introduites soient analytiquement distribuées.

31. *Les géométries des systèmes de paths.* — Les équations (30.1) définissent le système de paths dans un certain système de coordonnées et avec un certain choix du paramètre représentatif. Indépendamment des changements sans intérêt portant sur les a, on peut transformer les équations (30.1) :

a. en effectuant une transformation de coordonnées dans la variété V_n

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^k); \tag{31.1}$$

b. en effectuant une transformation du paramètre représentatif sur tous les paths

$$t = \varphi(\tau, a). \tag{31.2}$$

Soit G un groupe de transformations (31.1) de coordonnées et Γ un groupe de transformations (31.2) du paramètre. Selon Douglas on appelle géométrie (G, Γ) du système de paths la théorie invariante des équations (30.1) pour les transformations du groupe G combinées avec celles de Γ.

Prenons par exemple pour groupe G le groupe descriptif, c'est-à-dire le groupe de toutes les transformations analytiques et pour Γ le groupe des transformations

$$t = \tau + \beta. \tag{31.3}$$

La géométrie ainsi obtenue sera dite *la géométrie descriptivo-métrique des systèmes de paths* ou plus simplement la *géométrie métrique des systèmes de paths*. C'est elle que nous allons étudier ici.

32. *Le résultat fondamental de Douglas pour la géométrie métrique.* Supposons que l'espace V_n qui contient le système de paths considéré soit pourvu d'une méthode riemanienne ou finslérienne et que le paramètre t introduit soit la longueur de l'arc de path évalué dans cette métrique et compte à partir d'une origine arbitraire. Il est clair que ce paramètre sera susceptible des transformations (31.3). Inversement, Douglas a pu montrer qu'à toute géométrie métrique d'un système de paths défini sur V_n, on peut associer un espace de Finsler bien déterminé, porté par V_n, relativement auquel le paramètre t peut être interprété comme une longueur d'arc.

A cet effet Douglas établit (¹) que tout système de paths pour lequel le paramètre est déterminé à une transformation (31.3) près, peut être défini d'une manière et d'une seule comme solution d'un système différentiel de la forme

$$H^2(x^\alpha, l^\alpha) = 1, \qquad \text{avec } l^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \tag{32.1}$$

$$\frac{d^2x^\rho}{dt^2} = Q^\rho(x^\alpha, l^\alpha). \tag{32.2}$$

où H^2 et les Q^ρ sont des fonctions homogènes et du second degré par rapport aux l^α, déterminées d'une manière unique.

Cela étant posé, considérons l'espace de Finsler porté par V_n et admettant la métrique

$$ds_0^2 = H^2(x^\alpha, dx^\alpha). \tag{32.3}$$

D'après (32.1), on a

$$dt^2 = H^2(x^\alpha, dx^\alpha),$$

de telle sorte que

$$s_0 = \pm t + \beta.$$

Ainsi, dans cette métrique, le paramètre t est bien l'arc de paths évalué dans l'un ou l'autre sens à partir d'une origine arbitraire.

33. *Représentation des paths dans l'espace de Finsler.* — Il est clair que les systèmes de géodésiques de l'espace de Finsler (32.3) ou de tout espace variationnel associé à (32.3) fournissent des exemples de géométries métriques de systèmes de paths. Il est donc naturel de représenter le système de paths donné à l'aide des éléments géométriques de l'espace de Finsler (32.3)

En introduisant les composants $g_{\gamma\rho}$ de cette métrique finslérienne, le système différentiel (32.1), (32.2) qui définit les paths peut être mis sous la forme

$$g_{\gamma\rho}\frac{d^2x^\rho}{ds_0^2} + 2\tilde{G}_\gamma(x^\alpha, l^\alpha) = C_\gamma(x^\alpha, l^\alpha), \tag{33.1}$$

où le paramètre s_0 satisfait à

$$ds_0^2 = H^2(x^\alpha, dx^\alpha).$$

Le vecteur C_γ est homogène et du second degré par rapport aux l^α et s'exprime à partir des Q^ρ par les relations

$$C_\gamma = 2G_\gamma + g_{\gamma\rho}Q^\rho. \tag{33.2}$$

Il est facile de vérifier directement que le vecteur C_γ est orthogonal à l^γ, c'est-à-dire que l'on a

$$l^\gamma C_\gamma = 0. \tag{33.3}$$

(¹) *Annals of Math.*, t. 29, 1928, p. 150-151.

Il vient en effet, d'après (12.7),

$$2P_\nu C_\nu = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\nu} P_\nu$$

et par suite, d'après (33.2),

$$P_\nu C_\nu = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\nu} P_\nu - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial P_\nu} Q^\nu.$$

Or, si l'on dérive l'équation (32.1) et si l'on tient compte du système (32.2), il vient

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\nu} P_\nu + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial P_\nu} Q^\nu = 0,$$

ce qui démontre (33.3). Dans l'espace de Finsler (32.3), l'équation (33.1) joue le rôle de première équation de Frenet relative à une courbe : le vecteur C_ν définit la normale principale des courbes considérées et a pour longueur la courbure de ces courbes. Pour $C_\nu = 0$, les paths coïncident avec les géodésiques de l'espace.

34. *Les paths et les géodésiques des espaces variationnels.* — Cherchons à quelle condition le système de paths donné peut être considéré comme le système des géodésiques d'un espace variationnel attaché à l'espace de Finsler (32.3).

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après les équations (9.2) et (16.4), qu'on puisse trouver deux fonctions $H'(x^\alpha, x'^\alpha)$ et $\omega(x^\alpha, x'^\alpha)$, homogènes et du premier degré par rapport aux x'^α, telles que l'on ait

$$C_\nu(x^\alpha, x'^\alpha) = H[H'\partial_\nu\omega - \omega\partial_\nu H']. \tag{34.1}$$

Il est clair que, s'il en est ainsi, la forme différentielle

$$C_\nu dx^\nu \tag{34.2}$$

admet le facteur intégrant, homogène et de degré -3, par rapport aux x'^α,

$$\mu = \frac{1}{HH'^2}.$$

Inversement, si la forme différentielle (34.2) admet un facteur intégrant μ, celui-ci satisfait au système aux dérivées partielles

$$\mu(\partial_\nu C_\lambda - \partial_\lambda C_\nu) + C_\nu\partial_\lambda\mu - C_\lambda\partial_\nu\mu = 0.$$

Par multiplication par x'^λ et sommation, il vient, compte tenu de (33.3),

$$\mu(2C_\nu - x'^\lambda\partial_\nu C_\lambda) + C_\nu x'^\lambda\partial_\lambda\mu = 0. \tag{34.3}$$

Or, toujours d'après (33.3),

$$x'^{\lambda}\partial_{\nu}C_{\lambda}=\partial_{\nu}(x'^{\lambda}C_{\lambda})-C_{\lambda}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}=-C_{\nu}.$$

Il en résulte que (34.3) peut s'écrire

$$x'^{\lambda}\partial_{\lambda}\cdot\mu=-3\mu,$$

et le facteur intégrant μ est nécessairement homogène et de degré -3. Il en résulte immédiatement que les C_{ν} peuvent être mis sous la forme (34.1). Ainsi pour que le système de paths considéré soit le système des géodésiques d'un espace variationnel généralisé attaché à (32.3), il faut et il suffit que la forme différentielle $C_{\nu}dx'^{\nu}$ admette un facteur intégrant. Nous énoncerons :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une géométrie métrique de système de paths coïncide avec celle du système des géodésiques d'un espace variationnel généralisé est que les vecteurs de courbure* C_{ν} *des paths admettent pour trajectoires, dans l'espace* x', *une congruence de normales.*

Analytiquement cette condition se traduit par les relations

$$C_{\alpha}(\partial_{\beta}C_{\gamma}-\partial_{\gamma}C_{\beta})\,dx'^{\alpha}\wedge dx'^{\beta}\wedge dx'^{\gamma}=0, \tag{34.4}$$

qui résultent du théorème de Fröbenius.

VIII. — Applications à la dynamique.

35. *Forme invariante des équations de la dynamique classique.* — Les équations de Lagrange permettent de donner aux lois de la dynamique classique une forme indépendante du repérage adopté pour l'espace de configuration du système dynamique étudié. Mais le temps y garde encore une situation privilégiée. Dans ses *Leçons sur les invariants intégraux* (1), E. Cartan a donné explicitement pour la première fois, aux lois de la dynamique, une forme indépendante de tout repérage particulier adopté ponr l'*espace-temps de configuration*. De ses résultats, on déduit deux énoncés équivalents dont l'un fait intervenir l'invariant intégral complet de Cartan, l'autre un espace de Finsler introduit par le principe de Hamilton. Cependant la méthode de Cartan ne s'applique qu'à des systèmes dynamiques conservatifs, c'est-à-dire pour lesquels les forces données dérivent d'une fonction de forces. Dans ce cas elle permet d'effectuer les changements de variables les plus généraux portant à la fois sur les paramètres de position du système et sur le temps.

Par l'introduction des espaces variationnels généralisés et des relations intégrales d'invariance (2), j'ai pu étendre dans une large mesure les résultats de

(1) E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann. 1922.

(2) *Cf.* Lichnerowicz, *C. R. Acad. Sc.*, t. 217, 1943, p. 660, et un Mémoire en préparation.

Cartan à des systèmes dynamiques non conservatifs. A cet effet je commencerai par rappeler les résultats de Cartan.

36, *Les résultats de Cartan.* — Considérons un système dynamique conservatif à liaisons holonomes, parfaites. Nous désignerons par x^i (i et tout indice latin $= 1, 2, \ldots, n$) ses paramètres de position, par $x'^i = \frac{dx^i}{dt}$ ses paramètres de vitesse, par T son énergie cinétique, par U sa fonction de forces et par $\mathcal{H}$ son hamiltonien. Le lagrangien du système

$$L = T + U$$

sera supposé exprimé à partir des variables x^i, x'^i et t.

Les équations différentielles entre les paramètres de position, de vitesse et le temps qui définissent le mouvement du système peuvent alors être caractérisées :

a. soit par l'existence de l'invariant intégral relatif de Cartan

$$\int \omega = \int \frac{\partial L}{\partial x'^i} dx^i - \mathcal{H}\, dt ; \tag{36.1}$$

ou de l'invariant intégral absolu correspondant

$$\iint D\omega = \iint d\frac{\partial L}{\partial x'^i} \wedge dx^i - d\mathcal{H} \wedge dt ; \tag{36.2}$$

b. soit par l'existence du principe variationnel de Hamilton qui s'exprime à l'aide de l'intégrale d'action

$$W = \int L\, dt. \tag{36.3}$$

Nous allons donner à ces deux énoncés une forme indépendante de tout repérage particulier de l'espace-temps de configuration (x^i, t). A cet effet nous introduirons dans les dérivations au lieu de t un paramètre auxiliaire arbitraire u et nous poserons

$$x^{n+1} = t ; \qquad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \qquad (\alpha \text{ et tout indice grec} = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Évaluons dans le système des variables $\dot{x}^\alpha$ les coefficients de l'invariant intégral de Cartan. On a d'abord

$$\frac{\partial L}{\partial x'^i} = \dot{x}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L\left(x^i, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}, t\right).$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la fonction

$$\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \dot{x}^{n+1} L\left(x^i, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}, t\right), \tag{36.4}$$

fonction qui est manifestement homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^\alpha$. Il vient ainsi

$$(36.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x'^i} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}, \\ -\mathcal{H} = L - x'^i \dfrac{\partial L}{\partial x'^i} = L - \dfrac{1}{\dot{x}^{n+1}}\left(\mathcal{L} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{n+1}}\dot{x}^{n+1}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{n+1}}. \end{cases}$$

Il en résulte que la forme ω de Cartan peut s'écrire

$$\omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} dx^\alpha.$$

D'autre part l'intégrale d'action (36.3) peut, par l'introduction du paramètre u, être mise sous la forme

$$W = \int \mathcal{L}\, du.$$

On en déduit que les équations différentielles définissant le mouvement du système peuvent être caractérisées :

a. soit par l'existence de l'invariant intégral relatif

$$\int \omega = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} dx^\alpha,$$

ou de l'invariant intégral absolu correspondant

$$\iint \Omega = \iint d\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \wedge dx^\alpha;$$

b. soit par l'existence du principe de Hamilton exprimé à l'aide de l'intégrale

$$W = \int \mathcal{L}\, du.$$

En vertu de l'homogénéité de $\mathcal{L}$, cette intégrale définit sur l'espace-temps de configuration une métrique finslérienne intrinsèquement attachée au système dynamique. L'espace de Finsler à $(n+1)$ dimensions ainsi défini est tel que ses géodésiques assurent, en vertu du principe de Hamilton, la représentation des trajectoires du système.

37. *La relation intégrale d'invariance de la dynamique.* — Considérons un système dynamique S *non conservatif* à liaisons holonomes, parfaites Sous leur forme lagrangienne les équations de la dynamique du système S peuvent s'écrire

$$(37.1)\qquad \frac{dx^i}{dt} = x'^i; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i.$$

où L désigne un lagrangien pouvant éventuellement se réduire à la demi-force vive T du système S et où les Q_i sont des fonctions déterminées des x^i, des x'^i et du temps t. $\mathcal{H}$ représentera l'hamiltonien associé au lagrangien L.

Les mouvements du système S étant régis par des équations différentielles du premier ordre entre les paramètres de position, de vitesse et le temps, j'ai démontré (¹) que ces équations peuvent être caractérisées par la condition suivante : *étant donnée une suite fermée d'états* $(^i, x'^i, t)$ *du système, si l'on déplace arbitrairement ces états le long de leurs trajectoires respectives, l'intégrale*

$$\iint d\frac{\partial L}{\partial x'^i} \wedge dx^i - d\mathcal{H} \wedge dt + Q_i dx^i \wedge dt,$$

étendue à la surface ainsi balayée est toujours nulle. Autrement dit le système différentiel de la dynamique peut être caractérisé dans ce cas général par *la relation intégrale d'invariance*

$$\iint_{\mathfrak{T}} d\frac{\partial L}{\partial x'^i} \wedge dx^i - d\mathcal{H} \wedge dt + Q_i dx^i \wedge dt = 0. \tag{37.2}$$

où $\mathfrak{T}$ désigne une portion d'un tube de trajectoires.

A quelle condition cet énoncé peut-il être mis sous une forme indépendante du mode de repérage de l'espace-temps de configuration? Lorsqu'il en est ainsi, la forme quadratique extérieure

$$Q_i dx^i \wedge dt$$

doit donner naissance à une forme quadratique extérieure complète à $(n+1)$ variables

$$S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

où les $S_{\alpha\beta}$ forment un tenseur covariant symétrique. Nous sommes par suite amenés à étudier les systèmes matériels pour lesquels les Q_i admettent la forme

$$Q_i = R_i(x^i, t) + S_{ij}(x^i, t)x'^j \qquad (\text{avec } S_{ij} = -S_{ji}), \tag{37.3}$$

ce qui est en plein accord avec les considérations classiques relatives aux forces centrifuges.

38. *Les équations de Lagrange dans l'espace-temps de configuration.* — Considérons donc un système matériel S tel que les Q_i satisfassent aux hypothèses du paragraphe précédent, et cherchons à mettre les équations différentielles de son mouvement sous une forme indépendante du repérage de l'espace-temps de configuration. A cet effet nous utiliserons, comme au paragraphe 36, un paramètre auxiliaire arbitraire u et avec des notations identiques, nous poserons :

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}; \qquad \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \dot{x}^{n+1} L\left(x^i, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}, t\right).$$

(¹) *Cf.* Lichnerowicz, *C. R. Acad. Sc.*, t. 217, 1943, p. 660-661.

Nous introduirons d'autre part le tenseur antisymétrique $S_{\alpha\beta}$ défini par

$$(38.1)\qquad \begin{cases} S_{\alpha\beta} = S_{ij} & \text{pour } \alpha = i, \quad \beta = j, \\ S_{\alpha\beta} = R_i & \text{pour } \alpha = i, \quad \beta = n+1. \end{cases}$$

Si nous posons

$$(38.2)\qquad \Xi_\alpha = S_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta,$$

il est clair que l'on a

$$(38.3)\qquad \Xi_i \equiv R_i\dot{x}^{n+1} + S_{ij}\dot{x}^j = Q_i\dot{x}^{n+1}.$$

Avec les notations ainsi définies, le mouvement du système matériel S peut être défini par les $(n+1)$ équations de Lagrange généralisées

$$(38.4)\qquad \frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = \Xi_\alpha.$$

En effet pour $\alpha = i$, les équations (38.4) peuvent s'écrire, d'après (36.5),

$$\frac{dt}{du}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \dot{x}^{n+1}\frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i\dot{x}^{n+1},$$

soit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i,$$

équations qui coïncident avec les équations (37.1).

Pour $\alpha = n+1$, il vient, toujours d'après (36.5),

$$\frac{d}{du}(-\mathcal{H}) - \dot{x}^{n+1}\frac{\partial L}{\partial t} = -R_i\dot{x},$$

soit, en divisant par $\dot{x}^{n+1}$ et en tenant compte de (37.5),

$$(38.5)\qquad \frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = Q_i x'^i.$$

Cette équation est une conséquence des équations (37.1), puisqu'elle n'est autre que la traduction du théorème bien connu de Painlevé.

39. *Forme invariante de la relation intégrale.* — Pour un système matériel satisfaisant aux hypothèses des paragraphes 37 et 38, on peut mettre la relation intégrale d'invariance de la dynamique sous une forme indépendante du mode de repérage de l'espace-temps de configuration. A cet effet on peut soit établir directement une telle relation à partir des équations de Lagrange généralisées (38.4), soit transformer la relation intégrale d'invariance (37.2) établie antérieurement. Nous utiliserons cette seconde méthode.

Dans les hypothèses faites, la forme quadratique extérieure $Q_i dx^i \wedge dt$ peut s'écrire

$$Q_i dx^i \wedge dt = R_i dx^i \wedge dt + S_{ij}x'^i dx^i \wedge dt.$$

Or la surface $\mathfrak{T}$ étant engendrée par des trajectoires, on peut considérer que l'on a adopté, afin d'évaluer la valeur de la forme quadratique pour un élément superficiel de $\mathfrak{T}$, un bivecteur dont l'un des vecteurs $x'^i = \frac{dx^i}{dt}$ est tangent aux trajectoires. Il vient ainsi sur $\mathfrak{T}$

$$Q_i\, dx^i \wedge dt = R_i\, dx^i \wedge dt + S_{ij}\, dx^i \wedge dx^j,$$

soit

$$Q_i\, dx^i \wedge dt = S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta. \tag{39.1}$$

Il en résulte que les équations différentielles du mouvement de S peuvent être caractérisées par l'existence de la relation intégrale d'invariance

$$\iint_{\mathfrak{T}} \left[d\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \wedge dx^\alpha + S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \right] = 0, \tag{39.2}$$

où $\mathfrak{T}$ désigne une portion de tube engendré par des trajectoires.

40. *Les équations de Lagrange* (38.4) *et les géodésiques des espaces variationnels.* — Cherchons à quelle condition les équations de Lagrange (38.4) peuvent définir les géodésiques d'un espace variationnel généralisé attaché à la fonction

$$\Pi(0, x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha).$$

A cet effet, il nous faut trouver à quelle condition il existe des fonctions ω et Π' telles que l'on ait

$$\Pi' \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\alpha} - \omega \frac{\partial \Pi'}{\partial \dot{x}^\alpha} = S_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta. \tag{40.1}$$

En dérivant les deux membres de (40.1) par rapport à x^β, et en tenant compte de l'antisymétrie de $S_{\alpha\beta}$, il vient

$$S_{\alpha\beta}(x^\lambda) = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial \Pi'}{\partial \dot{x}^\beta} - \frac{\partial \Pi'}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\beta}, \tag{40.2}$$

avec

$$\Pi' \frac{\partial^2 \omega}{\partial \dot{x}^\alpha\, \partial \dot{x}^\beta} = \omega \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \dot{x}^\alpha\, \partial \dot{x}^\beta}. \tag{40.3}$$

Si l'on adopte pour ω et Π' des fonctions linéaires par rapport aux $\dot{x}^\alpha$,

$$\omega = \lambda_\alpha \dot{x}^\alpha,$$
$$\Pi' = \mu_\alpha \dot{x}^\alpha,$$

l'identité (40.3) se trouve vérifiée et l'on a

$$S_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \mu_\beta - \mu_\alpha \lambda_\beta, \tag{40.4}$$

ce qui entraîne que le tenseur antisymétrique $S_{\alpha\beta}$ se réduit à un bivecteur.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que les équations (34.4) relatives au problème général correspondant de la « geometry of paths » se réduisent dans ce cas aux conditions bien connues pour que les $S_{\alpha\beta}$ définissent un bivecteur.

Supposons donc que *le tenseur* $S_{\alpha\beta}$ *définisse un bivecteur.* Dans ces conditions, on peut attacher au système dynamique envisagé une classe d'espaces variationnels généralisés dont l'espace ponctuel associé est l'espace-temps de configuration. La réduction de la classe s'effectuera par la considération simultanée du complexe linéaire spécial défini par $S_{\alpha\beta}$ et de l'hyperquadrique définie par la forme quadratique

$$\dot{x}^{n+1}\,\varphi(x^\alpha, \dot{x}^\alpha).$$

41. *La variété riemannienne d'Eisenhart.* — Pour géométriser les mouvements des systèmes dynamiques conservatifs les plus généraux, on connaît une méthode autre que la méthode de Cartan qui introduit un espace de Finsler à $(n+1)$ dimensions. Cette seconde méthode développée par Eisenhart (1), fait intervenir un espace de Riemann à $(n+2)$ dimensions.

Considérons donc un système dynamique *conservatif* quelconque, à liaisons holonomes parfaites et à n degrés de liberté. Soient x^i (i et tout indice latin $= 1, 2, \ldots, n$) les paramètres indépendants déterminant la position du système, $x^{i'}$ leurs dérivées par rapport au temps t et

$$2T = g_{ij}x^{i'}x^{j'} + 2g_{i,n+1}x^{i'} + g_{n+1,n+1} \qquad (41.1)$$

la force vive du système. Si U désigne la fonction de forces d'où dérivent les forces données appliquées au système,

$$L = T + U$$

sera le lagrangien de ce système. Nous poserons comme précédemment

$$x^{n+1} = t$$

et introduirons un paramètre supplémentaire

$$x^{n+2} = u,$$

qui se trouvera lié d'une manière simple à l'action hamiltonienne (2).

Si v désigne une variable auxiliaire arbitraire, nous poserons

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dv} \qquad (\alpha \text{ et tout indice grec } = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Avec ces notations, la fonction

$$V(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 2(\dot{x}^{n+1})^2 L\left(x^\alpha, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}\right)$$

---

(1) Eisenhart. *Dynamical trajectories and geodesics* (*Annals of Math.*, t. 30, 1929, p. 591-606). *Cf.* Eisenhart, *op. cit.*, p. 594.

représente une forme quadratique par rapport aux $\dot{x}^\alpha$

$$(41.2)\qquad \Lambda(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + 2g_{i,n+1}\dot{x}^i\dot{x}^{n+1} + (g_{n+1,n+1} + 2U)(\dot{x}^{n+1})^2.$$

Considérons une variété à $(n+2)$ dimensions qui soit le produit topologique par une droite de l'espace-temps de configuration, et soit E_{n+2} l'espace de Riemann porté par cette variété et admettant pour élément linéaire

$$(41.3)\qquad ds^2 = \Lambda(x^\alpha, dx^\alpha) + 2B\,dt\,du,$$

où B désigne une constante arbitraire non nulle. Il existe une correspondance biunivoque entre les trajectoires du système dynamique et les géodésiques de l'espace E_{n+2} telle que, dans les deux cas, les x^i soient les mêmes fonctions de la variable t. La variable u est dans le cas général une fonction linéaire de t et de l'action hamiltonienne

42. *L'espace variationnel généralisé attaché à l'espace d'Eisenhart.* — Considérons maintenant un système dynamique S non conservatif et supposons que, sous leur forme lagrangienne, les équations de la dynamique du système S puissent s'écrire

$$(42.1)\qquad \frac{dx^i}{dt} = x'^i; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i,$$

où L désigne un lagrangien identique à celui du paragraphe précédent et où les Q_i *dépendent seulement des* x^i *et du temps* t; $\mathcal{H}$ représentera encore l'hamiltonien associé au lagrangien L.

Considérons l'espace variationnel généralisé défini par les trois fonctions fondamentales (1)

$$(42.2)\qquad \begin{cases} H^2 = \Lambda(x^\alpha; \dot{x}^\alpha) + 2B\dot{t}^{\,u}, \\ H\,H' = \dot{t}^2, \\ \omega = Q_i\dot{x}^i, \end{cases}$$

où les notations sont identiques à celles du paragraphe précédent. Le système différentiel aux géodésiques d'un espace variationnel

$$(42.3)\qquad \frac{d}{dv}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{\partial H}{\partial x^\lambda} = H'\frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\lambda} - \omega\frac{\partial H'}{\partial \dot{x}^\lambda}$$

peut être transformé en multipliant les deux membres de (42.3) par H et en intégrant certains termes par parties. On montre ainsi aisément que le système différentiel (43.2) est équivalent au système

$$(42.4)\qquad \frac{d}{dv}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\lambda} = HH'\frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\lambda} - \omega\frac{\partial(HH')}{\partial \dot{x}^\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}^\lambda}\left(\frac{dH}{dv} + \omega H'\right).$$

(1) Afin d'alléger les notations, nous avons supprimé l'argument zéro figurant dans les fonctions H et H'

Or les conditions d'homogénéité étant remplies, on peut adopter dans (42.3) ou (42.4) une variable indépendante arbitraire. Nous choisirons $v = t$.

Dans ces conditions l'équation (42.4) correspondant à $\lambda = n + 2$ s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(B\frac{dx^{n+1}}{dt}\right) = \frac{\partial H}{\partial u'}\left(\frac{dH}{dt} + \omega H'\right);$$

soit, comme le premier membre est identiquement nul et le facteur $\frac{\partial H}{\partial u'}$ différent de zéro,

$$\frac{dH}{dt} + \omega H' = 0. \tag{42.5}$$

Compte tenu de (42.2), l'équation (42.5) est équivalente à l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}H^2\right) + \omega = 0,$$

soit explicitement

$$\frac{d}{dt}(Bu' + L) + \omega = 0. \tag{42.6}$$

On déduit enfin de l'équation (42.5) que, lorsque la variable indépendante choisie est t, le système différentiel (42.4) se réduit au système

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial\dot{x}^\lambda} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\lambda} = HH'\frac{\partial\omega}{\partial\dot{x}^\lambda} - \omega\frac{\partial(HH')}{\partial\dot{x}^\lambda}. \tag{42.7}$$

En faisant $\lambda = n + 1$ dans ce système, il vient avec des notations classiques,

$$\frac{d}{dt}(Bu' + T_1 + 2T_0 + 2U) - \frac{\partial L}{\partial t} = -2\omega. \tag{42.8}$$

De même pour $\lambda = i$ on obtient à partir du système différentiel (42.7), les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i,$$

identiques à (42.1). On peut remplacer l'une ou l'autre des équations (42.6) et (42.8) par l'équation déduite de celles-ci par soustraction

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0 - U) + \frac{\partial L}{\partial t} = \omega,$$

soit

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \omega. \tag{42.9}$$

L'équation ainsi obtenue qui traduit le théorème de Painlevé est une conséquence des équations (42.1). L'équation subsistante parmi les équations (42.6) et (42.8) servira à définir dynamiquement la variable u.

Il en résulte immédiatement qu'il existe entre les trajectoires du système dynamique non conservatif considéré et les géodésiques de l'espace variationnel défini par (42.2), une correspondance biunivoque telle que, dans les deux cas, les x^i soient les mêmes fonctions de la variable t. Il apparaît ainsi que l'introduction des espaces variationnels généralisés est de quelque utilité pour l'étude des systèmes dynamiques non conservatifs.

43. *Dynamique relativiste et espaces variationnels.* — Nous terminerons cette étude de quelques-unes des applications des espaces variationnels par une application à la dynamique de la Relativité générale.

Considérons, en dynamique relativiste, un domaine d'espace-temps qui soit balayé par une distribution matérielle et soit $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie associé à cette distribution. Quelle que soit la manière dont cette distribution est schématisée, le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sera de la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho(x^\lambda) u_\alpha u_\beta - \theta_{\alpha\beta}(x^\lambda, u^\lambda). \tag{43.1}$$

où ρ désigne un scalaire positif ne dépendant que des coordonnnées x^i de l'espace-temps, où $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ est le vecteur-vitesse unitaire et $\theta_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique. Si ∇_α désigne l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

les conditions de conservation relatives au tenseur d'impulsion-énergie

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$$

donnent naissance d'une part à l'équation de continuité de la distribution matérielle, d'autre part au système différentiel définissant *les lignes de courant*, partout tangentes au vecteur-vitesse unitaire. Si nous posons

$$\nabla_\alpha \theta^\alpha{}_\beta = \rho K_\beta, \tag{43.2}$$

où, dans la dérivation qui figure au premier membre, u^i est considéré comme fonction des x^α, le vecteur K_β ainsi défini est homogène et de degré zéro par rapport aux x'^α et le système différentiel aux lignes de courant peut être mis sous la forme (1)

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = (g^{\alpha\beta} - u^\beta u^\alpha) K_\alpha. \tag{43.3}$$

De ce système différentiel, Eisenhart (2) a donné une interprétation géométrique simple dans le cas où la distribution matérielle considérée correspond à

(1) *Cf.* par exemple LICHNEROWICZ, *Ann. Éc. Norm. sup.*, fasc. IV, 1943, p. 257-278.
(2) *Cf.* EISENHART, *Trans. of the Americ. Math. Soc.*, 1924, p. 206.

un fluide parfait admettant une équation d'état. Si p désigne la pression du fluide, on a, dans ce cas,

$$K_\beta = \frac{\partial_\beta p}{\rho} \qquad [\text{avec } \rho = \varphi(p)].$$

Posons ici

$$F = \int_{M_0}^{M} \frac{\partial_\beta p}{\rho} dx^\beta = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varphi(p)}.$$

Les lignes de courant sont alors géodésiques de l'espace de Riemann conforme à l'espace-temps admettant la métrique

$$\overline{ds}^2 = e^{2F} ds^2. \tag{43.4}$$

Il est aisé, à l'aide des espaces variationnels, d'interpréter géométriquement les équations (43.3) dans le cas le plus général. Considérons en effet l'espace variationnel généralisé qui admet les données fondamentales

$$H^2(F, x^\alpha, x'^\alpha) = e^{2F} g_{\alpha\beta}(x^\lambda) x'^\alpha x'^\beta, \tag{43.5}$$

$$F = \int_{M_0}^{M} K_\beta dx^\beta. \tag{43.6}$$

Cet espace, qui est manifestement sans torsion finslérienne, engendre la connexion euclidienne d'éléments

$$\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu = \gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu + g^{\nu\rho}(g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\mu} K_\rho). \tag{43.7}$$

Par suite, en désignant par l^ν le vecteur unitaire tangent à une géodésique, le système différentiel aux géodésiques peut s'écrire

$$l^\mu \nabla_\mu l^\nu = l^\mu \mathring{\nabla}_\mu l^\nu + g^{\nu\rho}(g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\mu} K_\rho) l^\lambda l^\mu = 0,$$

soit

$$l^\mu \mathring{\nabla}_\mu l^\nu = (g^{\lambda\nu} - l^\lambda l^\nu) K_\lambda, \tag{43.8}$$

équations qui coïncident aux notations près avec les équations (43.3). Il en résulte qu'en dynamique relativiste, les lignes de courant de toute distribution matérielle peuvent être considérées comme *géodésiques d'un espace variationnel généralisé* défini, à partir de la métrique d'univers, par les formules (43.5) et (43.6).

Il en est en particulier ainsi dans le cas où le tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ comporte un tenseur d'impulsion-énergie d'origine électromagnétique.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES ANALLAGMATIQUES

DES

CYCLIQUES

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

Dans un Mémoire antérieur [1] j'ai proposé une métrique anallagmatique différente de la géométrie non euclidienne classique, construite de manière aussi logique que possible à partir de la distance covariante (ou puissance réduite) du point de la sphère, comme les distances euclidiennes peuvent se déduire de la distance du point au plan. Lorsqu'on applique cette métrique à la figure formée par trois cercles [2], les analogies avec les théorèmes euclidiens du triangle sont remarquables et donnent un certain intérêt à cette construction synthétique. Un tel tricercle peut être considéré comme orthogonal à un cercle, réel ou imaginaire, servant de base à une géométrie non euclidienne, ou, pour utiliser le langage du Mémoire cité, servant de base à un champ cocyclique de bipoints [3]. Les côtés sont alors les équivalents des droites en géométrie euclidienne, et sont représentés par des équations linéaires en coordonnées tétracycliques. Lorsqu'on passe au second degré, on obtient les quartiques bicirculaires ou cycliques planes, dont certaines analogies avec les coniques sont bien connues. Dans le Mémoire cité, la métrique en question a déjà servi à définir la polaire d'un bipoint par rapport à une cyclique, dans un champ cocyclique, et à montrer que c'est un cercle du champ, donc l'équivalent d'une droite euclidienne.

---

(1) *Définitions et théorèmes de métrique anallagmatique* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. LIX, fasc. 1, 1942, p. 1-42].

(2) *Loc. cit.*, p. 34.

(3) C'est un champ de bipoints (couples de points) tel que deux bipoints quelconques du champ soient cocycliques; c'est encore un champ de bipoints invariants dans une certaine inversion.

Le présent travail se propose de poursuivre l'analogie avec les coniques, et l'on verra que celle-ci va très loin, ce qui confirme l'intérêt que peut offrir cette métrique.

Lorsqu'on reste dans le plan, les deux définitions des coniques communes aux trois genres sont : 1° celle où la conique est le lieu du centre d'un cercle passant par un foyer et tangent à un cercle (ou droite) directeur; 2° celle où c'est le lieu des points dont le rapport des distances à un foyer et une directrice est constant. Or, une cyclique plane Q peut toujours être considérée comme appartenant à un champ cocyclique dont le cercle de base est un cercle directeur ω de Q. On peut même supposer que ω est réel, car deux au moins des quatre cercles directeurs d'une cyclique sont réels. On peut alors définir Q, soit comme le lieu des bicentres (1) des bicercles qui passent par un bipoint focal de Q et sont tangents à un bicercle donné, soit comme le lieu des bipoints dont le rapport des distances anallagmatiques à un bipoint focal et à un cercle du champ est constant. Par contre la définition bifocale qui résulte, pour les coniques, du parallélisme des deux directrices, n'a pas d'équivalent ici.

L'examen des relations entre les éléments de ces deux définitions, bifoyers, directrices, bicercles directeurs, excentricité conduit à distinguer trois genres de cycliques; tout d'abord, la distinction en deux classes suivant que les quatre foyers réels sont ou non cocycliques est bien connue; un exemple bien particulier examiné au paragraphe 5 nous fait préférer dire que Q est de première ou de deuxième classe suivant que son tétracycle directeur est lui-même de première ou de deuxième classe, c'est-à-dire qu'il a trois ou deux cercles réels. Nous partageons ensuite la première classe en deux genres, suivant que la valeur absolue de l'excentricité est inférieure à 1 (genre elliptique) ou supérieure à 1 (genre hyperbolique); le genre parabolique comprend toutes les cycliques de deuxième classe. Il est bien remarquable que cette distinction, appuyée sur l'excentricité, correspond à des différences de formes dont la traduction rappelle les trois genres de coniques. C'est ainsi que, dans le champ cocyclique qui a pour base un cercle directeur réel d'une cyclique Q, celle-ci n'admet un bicentre anallagmatique réel que si elle appartient aux deux premiers genres; on appelle *bicentre anallagmatique* un bipoint autour duquel la transposition anallagmatique conserve Q; c'est le bipoint commun aux deux cercles directeurs réels de Q qui sont distincts du cercle de base. Les cercles du champ qui passent par ce bicentre, ou diamètres de Q, rencontrent tous Q lorsqu'elle est elliptique, de sorte qu'elle est alors constituée par deux ovales séparés par la base du champ, chacun d'eux entourant un point du bicentre; Q n'a aucun point réel à l'infini au sens de la géométrie non euclidienne, c'est-à-dire sur la base du champ. Par contre, une cyclique hyperbolique n'est

(1) Pour la définition, cf. *loc. cit.*, p. 32. Nous y revenons d'ailleurs dans ce travail, pour les besoins du calcul.

coupée que par les diamètres qui sont intérieurs à un certain angle, de sorte qu'elle est formée de deux ovales intérieurs l'un à l'autre, rencontrant tous deux la base du champ, et de manière que le bicentre soit dans la couronne. Par tout point M du plan, il est bien connu qu'il passe deux cycliques homofocales orthogonales; s'il s'agit de cycliques de première classe, l'une est elliptique et l'autre hyperbolique. Si A et B sont les deux foyers réels situés du même côté que M de la base du champ, les tangentes aux deux cycliques bissectent le tricercle AMB comme font les tangentes à une ellipse et une hyperbole, c'est-à-dire extérieurement pour la cyclique elliptique et intérieurement pour l'autre.

L'analogie se poursuit avec les distances du bicentre aux extrémités des diamètres et celles d'un bifoyer aux cercles du champ tangents (ou tangentes de la cyclique). C'est ainsi qu'il existe une relation involutive entre les carrés des distances du bicentre aux extrémités de deux diamètres conjugués (par rapport aux deux diamètres tangents à la cyclique), ce qui est l'extension de l'énoncé d'Apollonius. La distance du bicentre à l'extrémité du diamètre focal ne dépend que du rayon du bicercle directeur et non des foyers eux-mêmes, ce qui est le cas des coniques à centre. Enfin, le produit des distances des deux bifoyers aux tangentes de Q est constant, et ce théorème admet une réciproque.

Telles sont les propriétés les plus importantes que nous démontrons dans ce travail, et qui sont évidemment vraies des cycliques de l'espace, par suite de leur caractère anallagmatique. Il est fait naturellement usage des coordonnées tétracycliques, avec quelques démonstrations géométriques dans le dernier Chapitre. Les premiers paragraphes sont consacrés au rappel des définitions des distances anallagmatiques d'un bipoint à un cercle, et de deux bipoints cocycliques, et à leur expression en coordonnées tétracycliques.

CHAPITRE I.

QUELQUES FORMULES DE MÉTRIQUE ANALLAGMATIQUE PLANE.

1. Étant donné, dans le plan, un couple de points, ou bipoint, (BB') et le cercle α, la distance anallagmatique $[(BB')\alpha]$ est définie par (1)

$$[(BB')\alpha] = \frac{2}{BB'}\sqrt{B\alpha \cdot B'\alpha},$$

où $B\alpha$ représente la distance de B au cercle α, égale à celle de B à la sphère de

(1) *Loc. cit.*, p. 8, formule (2).

grand cercle α; cette distance n'est rien autre que la puissance réduite, de sorte que, si r désigne le rayon de α, on a

$$(1) \qquad [(BB')\alpha]^2 = \frac{\mathcal{P}_\alpha B \times \mathcal{P}_\alpha B'}{r^2 . \overline{BB'}^2} = \frac{\left(\overline{BA}^2 - r^2\right)\left(\overline{B'A}^2 - r^2\right)}{r^2 . \overline{BB'}^2},$$

où A est le centre de α. Quand α devient rectiligne, Bα devient la distance euclidienne de B à α, donc (1) se réduit à

$$[(BB')\alpha]^2 = 4\,\frac{\overline{(\text{dist. B à } \alpha)}^2 \cdot \overline{(\text{dist. B' à } \alpha)}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

En particulier, si α est une droite parallèle à la droite BB', à la distance d de celle-ci, il vient

$$(2) \qquad [(BB')\alpha] = \frac{2d}{\overline{BB'}}.$$

Rapportons la figure au tétracycle dont un cercle ω_1 est α lui-même; prenons pour cercles ω_3 et ω_4 les diamètres de α respectivement parallèle et perpendiculaire à BB'; le quatrième cercle ω_2 du tétracycle est le cercle imaginaire pur concentrique à α, et de rayon ir. En coordonnées cartésiennes dont les axes Ox, Oy sont ω_3 et ω_4, les équations des cercles du tétracycle sont

$$(\omega_1) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0, \qquad (\omega_2) \quad x^2 + y^2 + r^2 = 0, \qquad (\omega_3) \quad x = 0, \qquad (\omega_4) \quad y = 0;$$

de sorte que si les coordonnées cartésiennes de B, B' sont

$$(B) \quad x, y; \qquad (B') \quad x', y',$$

leurs coordonnées tétracycliques sont, par exemple,

$$(B) \qquad b_1 = \frac{x^2 + y^2 - r^2}{-2r}, \qquad b_2 = \frac{x^2 + y^2 + r^2}{-2ir}, \qquad b_3 = x, \qquad b_4 = y,$$

$$(B') \qquad b'_1 = \frac{x'^2 + y'^2 - r^2}{-2r}, \qquad b'_2 = \frac{x'^2 + y'^2 + r^2}{-2ir}, \qquad b'_3 = x', \qquad b'_4 = y';$$

celles de α sont

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_4 = 0.$$

L'expression (1) s'écrit alors

$$[(BB')\alpha]^2 = \frac{(x^2 + y^2 - r^2)(x'^2 + y'^2 - r^2)}{r^2(y' - y)^2} = \frac{-2b_1 b'_1}{\Sigma b_i b'_i},$$

ou encore, sous une forme anallagmatiquement invariante,

$$(3) \qquad [(BB')\alpha]^2 = -2\,\frac{(\Sigma b_i \alpha_i)(\Sigma b'_i \alpha_i)}{\Sigma b_i b'_i}.$$

Ceci représente donc la distance d'un bipoint à un cercle du plan rapporté à un tétracycle quelconque. Un cas particulier important pour nos applications est celui où (BB′) et α appartiennent à un champ cocyclique dont la base est le cercle ω_4 du tétracycle; B et B′ sont inverses par rapport à ω_4, ce qui permet de prendre

$$b'_4 = -b_4, \qquad b'_j = b_j \qquad (j = 1, 2, 3);$$

en outre, $\alpha_4 = 0$, car α est orthogonal à ω_4; compte tenu de $\sum_{j=1}^{3} b_j^2 = -b_4^2$, (3) se réduit alors à

$$[(BB')\alpha]^2 = \frac{(\Sigma' b_j \alpha_j)^2}{b_4^2}, \tag{4}$$

où le symbole Σ′ a la signification $\sum_{j=1}^{3}$.

Remarque. — Avant de poursuivre, observons que nous aurons l'occasion d'adopter le tétracycle simple suivant, semblable à celui que nous venons d'utiliser, et que nous appellerons tétracycle T_0. Il s'agit des quatre cercles d'équations

$$(T_0) \quad (\omega_1) \quad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0, \qquad (\omega_2) \quad x^2 + y^2 + \rho^2 = 0, \qquad (\omega_3) \quad x = 0, \qquad (\omega_4) \quad y = 0,$$

où ρ^2 peut être positif ou imaginaire pur (¹). Si ρ^2 est positif, T_0 est dit de *première classe;* s'il est imaginaire pur, T_0 est dit de *deuxième classe*. Au point de vue réel, ces deux formes de tétracycle sont anallagmatiquement équivalentes aux deux formes de tétracycles que constituent les quatre cercles directeurs d'une cyclique plane réelle dont les quatre foyers réels sont cocycliques (1re classe) ou non (2e classe).

Les coordonnées tétracycliques correspondantes d'un point de coordonnées cartésiennes x, y sont

$$x_1 = \frac{x^2 + y^2 - \rho^2}{-2\rho}, \qquad x_2 = \frac{x^2 + y^2 + \rho^2}{-2i\rho}, \qquad x_3 = x, \qquad x_4 = y,$$

avec $x_1 - ix_2 = \rho$, et celles d'un cercle de centre x, y et rayon r,

$$\xi_1 = \frac{x^2 + y^2 - r^2 - \rho^2}{-2r\rho}, \qquad \xi_2 = \frac{x^2 + y^2 - r^2 + \rho^2}{-2ir\rho}, \qquad \xi_3 = \frac{x}{r}, \qquad \xi_4 = \frac{y}{r}.$$

2. Considérons maintenant deux bipoints cocycliques (AA′), (BB′) de coordonnées tétracycliques a_i, a'_i, b_i, b'_i, $i = 1, 2, 3, 4$ respectivement.

(¹) T_0 coïncide toujours avec son imaginaire conjugué.

La condition de cocyclisme est

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

La distance anallagmatique est alors définie par (1)

$$(\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'})|^2 = 4\frac{\overline{\mathrm{AB}}.\overline{\mathrm{AB'}}.\overline{\mathrm{A'B}}.\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}^2.\overline{\mathrm{BB'}}^2},$$

et est réelle ou imaginaire pure suivant que les deux arcs AA′ et BB′ du cercle ne sont pas ou sont empiétants. En coordonnées tétracycliques, où ρ_i sont les rayons des quatre cercles ω_i du tétracycle, on sait que (2)

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = -2\frac{\Sigma a_i b_i}{\left(\Sigma\frac{a_i}{\rho_i}\right)\left(\Sigma\frac{b_i}{\rho_i}\right)},$$

donc

$$(6)\qquad |(\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'})|^2 = 4\left|\frac{\sqrt{(\Sigma a_i b_i)(\Sigma a_i b'_i)(\Sigma a'_i b_i)(\Sigma a'_i b'_i)}}{(\Sigma a_i a'_i)(\Sigma b_i b'_i)}\right|.$$

En particulier, pour deux bipoints d'un champ cocyclique de base ω_4, (6) se réduit à

$$(7)\qquad (\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'})^2 = 4\left|\frac{(\Sigma a_i b_i)(\Sigma a_i b'_i)}{(\Sigma a_i a'_i)(\Sigma b_i b'_i)}\right| = \left|\frac{(\Sigma' a_j b_j)^2 - a_4^2 b_4^2}{a_4^2 b_4^2}\right|,$$

si l'on prend $a'_j = a_j$, $b'_j = b_j$ $(j = 1, 2, 3)$, $a'_4 = -a_4$, $b'_4 = -b_4$. Plus précisément, avec le tétracycle T_0, on peut écrire

$$(8)\qquad |(\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'})|^2 = \frac{(\Sigma a_i b_i)(\Sigma a_i b'_i)}{a_4^2 b_4^2},$$

où les deux membres sont positifs lorsque les deux bipoints sont réels, et négatifs lorsqu'un seul bipoint est réel, l'autre étant d'abscisse réelle et d'ordonnées imaginaires pures.

Remarque. — Le carré du déterminant nul (5) donne

$$[(\Sigma a_i b_i)(\Sigma a'_i b'_i) + (\Sigma a_i b'_i)(\Sigma a'_i b_i) - (\Sigma a_i a'_i)(\Sigma b_i b'_i)]^2 = 4(\Sigma a_i b_i)(\Sigma a_i b'_i)(\Sigma a'_i b_i)(\Sigma a'_i b'_i),$$

donc (6) s'écrit encore

$$(6')\qquad |(\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'})|^2 = 2\left|\frac{(\Sigma a_i b_i)(\Sigma a'_i b'_i) + (\Sigma a_i b'_i)(\Sigma a'_i b_i)}{(\Sigma a_i a'_i)(\Sigma b_i b'_i)} - 1\right|.$$

---

(1) *Loc. cit.*, p. 16.

(2) On choisit souvent les coordonnées a_i de manière que $\Sigma\frac{a_i}{\rho_i} = 1$.

CHAPITRE II.

LES DEUX DÉFINITIONS MÉTRIQUES DES CYCLIQUES.

3. La première des deux définitions repose sur le

THÉORÈME. — *Dans un champ cocyclique plan, le lieu des bipoints dont le rapport des distances à un bipoint* (AA′) *et à un cercle* γ *fixes est constant est une cyclique* Q *de ce champ.*

On ne restreint pas les données en supposant que le cercle de base du champ est le quatrième cercle $\omega = \omega_4$ du tétracycle des coordonnées. Les coordonnées de (AA′) sont par exemple $(a_j, \pm a_4)(j = 1, 2, 3)$, et celles du bipoint courant (MM′) $(x_j, \pm x_4)$. Les coordonnées du cercle γ, réel ou imaginaire pur (c'est-à-dire de centre réel et rayon imaginaire pur), sont d'autre part $(\gamma_j, 0)$. En vertu de (4) et (7), l'équation du lieu est de la forme

$$(1) \qquad (\Sigma' a_j x_j)^2 - a_4^2 x_4^2 - e^2 a_4^2 (\Sigma' \gamma_j x_j)^2 = 0,$$

où e^2 est une certaine constante. Par exemple, si le champ est lobatchewskien, ω_4 peut être supposé rectiligne, et le tétracycle des coordonnées identifié avec T_0. D'après (4) et (8), e^2 représente alors effectivement le carré du rapport des distances de l'énoncé, et est positif ou négatif suivant que (AA′) et γ sont ou non de même nature (réels ou imaginaires purs). Par analogie avec les coniques, c'est le coefficient e de (1) que nous appelons l'*excentricité* du lieu Q. Ce lieu est bien une quartique bicirculaire de cercle directeur ω. Son équation s'écrit encore

$$(2) \qquad 2(\Sigma a_i x_i)(\Sigma a'_i x_i) + e^2 (\Sigma a_i a'_i)(\Sigma \gamma_i x_i)^2 = 0,$$

dont la forme est anallagmatiquement invariante, et représente donc Q dans un système quelconque de coordonnées tétracycliques, où les a'_i sont les coordonnées de A′. (2) montre également que les cercles points A, A′ sont bitangents à Q aux points de rencontre avec γ; A, A′ sont deux foyers de Q et γ est la polaire anallagmatique (1) du bipoint (AA′) par rapport à la cyclique. Nous appellerons γ la *directrice* de Q associée au *bifoyer* (AA′).

La cyclique Q ainsi obtenue est la plus générale, car elle dépend essentiellement de 8 paramètres, qui sont les 3 paramètres du cercle directeur ω, les 4 paramètres de (AA′) et γ dans le champ cocyclique de base ω, et l'excentricité e. Plus précisément, soit ω un cercle directeur réel d'une cyclique quel-

(1) Pour la définition, cf. *loc. cit.*, p. 29.

conque Q, A et A′ deux foyers de Q inverses par rapport à ω, et γ la polaire anallagmatique de ce bifoyer; si (AA′) est réel, γ est réel ou imaginaire pur; soit enfin (MM′) un bipoint de Q dans le champ de base ω, et e la valeur du rapport $\frac{[(MM')(AA')]}{[(MM')\gamma]}$. La cyclique définie par l'énoncé du théorème actuel et les éléments A, A′, γ, e est tangente à Q aux 4 points de rencontre avec γ, ce qui fait, avec M et M′, 10 points communs outre les points cycliques; elle coïncide donc avec elle.

Lorsque (AA′) est sur γ, chaque cercle B passant par (AA′) est un lieu de bipoints (MM′) tels que (1)

$$[(MM')\gamma] = [(MM')(AA')]\left|\sin\widehat{\beta,\gamma}\right|,$$

donc Q se décompose en deux cercles passant par (AA′) et également inclinés sur γ. Q n'est réel en même temps que (AA′) et γ que si $e^2 \geq 1$. On peut prendre γ pour ω_3, donc $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0$, $\gamma_3 = 1$ et $a_3 = 0$. (1) s'écrit

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - e^2a_4^2x_3^2 = 0$$

ou

$$(a_2x_1 - a_1x_2)^2 + (e^2 - 1)a_4^2x_3^2 = 0.$$

Par exemple, si T_0 est de première classe, a_2 et x_2 sont imaginaires purs si Q est réel, d'où les deux équations

$$i(a_2x_1 - a_1x_2) \pm \sqrt{e^2 - 1}\, a_4x_3 = 0.$$

4. Par analogie avec les coniques en géométrie euclidienne, les cycliques peuvent être considérées comme les lieux des bicentres des bicercles passant par un bipoint donné et tangents à un bicercle donné. Les couples de cercles (bicercles) dont il s'agit ici sont anallagmatiquement symétriques par rapport à la base du champ cocyclique, et sont les lieux d'égale distance anallagmatique à un bipoint donné, qu'on appelle le bicentre (2).

Le quatrième cercle ω_4 du tétracycle T étant toujours le cercle ω du champ, supposé réel, désignons par $(a_j, \pm a_4)$ les coordonnées du bipoint (AA′), et par $|k|$ la valeur absolue de la distance anallagmatique donnée; le lieu des bipoints (MM′) de coordonnées $(x_j, \pm x_4)$ situés à la distance donnée de (AA′) est déterminé par la formule [(7); I] où la lettre x remplace b, donc par une équation de la forme

$$(\Sigma' a_jx_j)^2 - a_4^2x_4^2 = k^2a_4^2x_4^2$$

ou

$$\Sigma' a_jx_j + \varepsilon\sqrt{k^2+1}\, a_4x_4 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

(1) *Loc. cit.*, p. 19.
(2) *Loc. cit.*, p. 32.

Pour discuter la réalité de ce bicercle, même lorsque (AA′) et k cessent d'être réels, on peut supposer, sans restriction d'ordre anallagmatique, que T est le tétracycle T_0. Les coordonnées tétracycliques de chaque cercle (3) sont proportionnelles aux coefficients des x_i, donc de la forme sa_j, $\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,sa_4$, avec

$$s^2[\Sigma' a_j^2+(k^2+1)a_4^2]=s^2k^2a_4^2=1,$$

donc

$$s=\frac{\varepsilon'}{ka_4},$$

le double signe ε' influant seulement sur le signe donné au rayon. Les coordonnées euclidiennes x, y du centre euclidien et le rayon r sont donnés par

$$s(a_1-ia_2)=\frac{\rho}{r},\qquad x=rsa_3,\qquad y=\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,rsa_4,$$

donc

$$r=\varepsilon' ka_4,\qquad x=a_3,\qquad y=\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,a_4. \tag{4}$$

(3) est donc réel lorsque (AA′) est réel, c'est-à-dire a_3 et a_4 réels, ainsi que k: il l'est aussi lorsque (AA′) est imaginaire, mais d'abscisse réelle, pourvu que ka_4 et $\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ soient réels; a_4 et k sont alors imaginaires, avec $\frac{k^2+1}{k^2}>0$, c'est-à-dire $\frac{1}{k^2}$ réel et ≥ -1; k est imaginaire pur, soit $k=i|k|$ avec $|k|\geq 1$: a_4 est donc imaginaire pur. En résumé, un lieu d'égale distance au bipoint (AA′) est réel pourvu que (AA′) et le rayon k soient eux-mêmes réels, ou que A, A′ soient imaginaires conjugués, k étant imaginaire pur et de module ≥ 1. Dans le premier cas, on sait que (3) ne coupe pas ω, ce qui se voit d'ailleurs tout de suite en choisissant T_0 de manière que $a_1=0$, $a_2=i\rho$, $a_3=0$, $a_4=\rho$ réel: (3) se réduit à

$$ix_2-\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,x_4=0.$$

et rencontre Ox aux mêmes points que ω_2, qui sont imaginaires. Dans le deuxième cas, on choisit T_0 de sorte que $a_1=\rho$ réel, $a_2=a_3=0$, $a_4=i\rho$, et (3) devient

$$x_1+i\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,x_4=0,\qquad x_1-\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,x_4=0,$$

qui coupe Ox aux mêmes points que ω_1, qui sont réels. Enfin le bicercle devient un cercle double du champ pour $k^2=-1$.

5. Ceci établi, considérons un deuxième bipoint (BB′) réel, de coordonnées $(b_j, \pm b_4)$ et formons le lieu des bipoints (MM′) $(\xi_j, \pm\xi_4)$ tels que le bicercle (γ, γ') de bicentre (MM′), qui passe par (BB′), soit tangent au bicercle (α, α') d'équation (3). Si m est le rayon anallagmatique de (α, α'),

réel en même temps que (MM'), car ce bicercle est essentiellement réel, les coordonnées tétracycliques des cercles α et μ sont respectivement

$$(\alpha)\ \frac{a_j}{ka_4},\quad \frac{\varepsilon\sqrt{k^2+1}}{k};\qquad (\mu)\ \frac{\xi_j}{m\xi_4},\quad \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}.$$

La condition de tangence entre eux est

$$\frac{1}{mk}\left(\frac{1}{a_4\xi_4}\Sigma' a_j\xi_j+\varepsilon\sqrt{k^2+1}\sqrt{m^2+1}\right)=-1.$$

c'est-à-dire

$$\Sigma' a_j\xi_j+\varepsilon\sqrt{k^2+1}\sqrt{m^2+1}\,a_4\xi_4=-km a_4\xi_4. \tag{5}$$

En outre, l'équation

$$\Sigma' b_j\xi_j+\sqrt{m^2+1}\,b_4\xi_4=0 \tag{6}$$

exprime que μ passe par le point B.

Si (AA') et k sont réels, on peut supposer $a_4>0$, $b_4>0$, $k>0$, $m>0$, et μ ne peut être tangent qu'au cercle α correspondant à $\varepsilon=1$: l'élimination de m entre (5) et (6) donne une seule quartique réelle. Si (AA') est imaginaire, ($\alpha\alpha'$) restant réel, k est imaginaire pur, tandis qu'on peut encore supposer $b_4>0$, $m>0$; μ peut alors être tangent à α ou à α', et, l'ambiguïté subsistant pour ε, on obtient deux quartiques réelles. Après substitution de x_i à ξ_i pour les coordonnées courantes, l'équation du lieu Q est alors

$$(b_4\Sigma' a_j x_j-\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,a_4\Sigma' b_j x_j)^2-k^2a_4^2[(\Sigma' b_j x_j)^2-b_4^2x_4^2]=0, \tag{7}$$

ou, sous forme développée,

$$b_4^2(\Sigma' a_j x_j)^2+a_4^2(\Sigma' b_j x_j)^2-2\varepsilon\sqrt{k^2+1}\,a_4b_4(\Sigma' a_j x_j)(\Sigma' b_j x_j)+k^2a_4^2b_4^2x_4^2=0. \tag{8}$$

L'équation (7) met en évidence que les cercles points $\Sigma' b_j x_j\pm b_4x_4=0$ sont tangents à la quartique, donc (BB') est un bifoyer, et la symétrie de (8) en les deux bipoints (AA'), (BB') montre que (AA') est un autre bifoyer.

Si (AA') et (BB') sont réels, $\varepsilon=1$, et l'on a une seule cyclique réelle Q, ayant quatre foyers réels cocycliques, donc de première classe; trois de ses cercles directeurs sont réels. Si (AA') est imaginaire, ω étant Ox, les points de Poncelet correspondants sont réels et sur Ox, et foyers de Q; donc les deux cycliques obtenues sont de deuxième classe, c'est-à-dire que deux de leurs cercles directeurs sont imaginaires. Les quatre foyers réels ne sont pas cocycliques, en général, mais il y a exception si AA' et BB' sont sur la même perpendiculaire à Ox, avec $AA'=BB'$ (par contre la distinction des deux classes de cycliques par la réalité des cercles directeurs n'appelle aucune réserve).

En effet, T_0 étant de première classe, soient $x=0$, $y=\pm i\rho$ les coordonnées cartésiennes de (AA'), et $x=0$, $y=\pm\rho$ celles de (BB'); l'équation cartésienne de Q est

$$\varepsilon\sqrt{|k|^2-1}\,(x^2+y^2)^2+2\rho^2(x^2+y^2)-2|k|^2\rho^2y^2-\varepsilon\rho^4\sqrt{k^2-1}=0,$$

car $k=i|k|$ avec $|k|>1$. Les affixes ζ des foyers réels sont les racines de $\zeta^4=\rho^4$, donc $\zeta=\pm\rho$, $\zeta=\pm i\rho$. Les 16 foyers se répartissent sur Ox ($y=0$, $x=\pm\rho$ et $x=\pm i\rho$), sur Oy ($x=0$, $y=\pm\rho$ et $y=\pm i\rho$), sur la première bissectrice $\left(x=y=\pm\rho\frac{1-i}{2},\ x=y=\pm\rho\frac{1+i}{2}\right)$, et enfin sur la deuxième bissectrice $\left(x=-y=\pm\rho\frac{1-i}{2},\ x=-y=\pm\rho\frac{1+i}{2}\right)$. Ils se répartissent donc par quatre sur plus de quatre cercles ou droites, mais les seuls cercles directeurs sont $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=\rho^2\frac{1\pm i}{2}$, qui forment bien un tétracycle de deuxième classe.

Lorsqu'on obtient deux cycliques de deuxième classe, on les distingue en spécifiant le cercle α auquel doit être tangent le cercle μ, ce qui détermine la valeur de ε.

Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME. — *Le lieu des bicentres* (MM') *des bicercles* (μ, μ') *passant par un bipoint réel donné* (BB'), *et tangents à un bicercle réel donné* (α, α') *d'un champ lobatchewskien* (μ *étant tangent à* α *et* μ' *à* α'), *est une cyclique* Q *ayant pour bifoyers* (BB') *et le bicentre* (AA') *du bicercle directeur* (α, α'). Q *est de première ou de deuxième classe selon que* (AA') *est réel ou non.*

Lorsque (AA') est réel, Q peut être également définie en permutant les deux bifoyers et en remplaçant (α, α') par le bicercle (β, β') de bicentre (BB') et de même rayon anallagmatique k que (α, α'). (α, α') et (β, β') seront appelés les *bicercles directeurs* de Q. Lorsque Q est de deuxième classe, le bicercle directeur de bicentre (BB') n'est pas réel, puisque k est imaginaire pur, tandis que (BB') est réel.

6. *Relations entre les bifoyers, les directrices et les bicercles directeurs.* — Identifions les équations obtenues à l'aide des deux définitions. En supposant que (AA') est un bifoyer réel, écrivons (7) sous la forme symétrique équivalente

$$(a_i\Sigma' b_jx_j-\sqrt{k^2+1}\,b_i\Sigma' a_jx_j)^2-k^2b_i^2[(\Sigma' a_jx_j)^2-a_i^2x_i^2]=0, \tag{9}$$

où $\sqrt{k^2+1}$ est essentiellement positif lorsque $k^2>0$, et a la signification $\varepsilon i\sqrt{|k|^2-1}$ pour $k^2<-1$, avec une valeur choisie de ε. L'identification avec (1) donne alors

$$a_i^2b_i^2k^2c^2(\Sigma' c_jx_j)^2=(a_i\Sigma' b_jx_j-\sqrt{k^2+1}\,b_i\Sigma' a_jx_j)^2,$$

donc

$$a_1 b_1 k e\gamma_j = (a_1 b_j - \sqrt{k^2+1}\, b_1 a_j) \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Si (AA'), (BB') et k sont donnés, e s'obtient en écrivant que $\Sigma' \gamma_j^2 = 1$, ce qui donne

$$e^2 = -\frac{1}{k^2}\left(k^2 + 2 + 2\sqrt{k^2+1}\,\frac{\Sigma' a_j b_j}{a_1 b_1}\right); \tag{10}$$

en faisant abstraction du signe $\pm$, qui est inutile pour définir γ, et se retrouve d'ailleurs dans l'indétermination de k, on a ensuite

$$\gamma_j = \frac{a_1 b_j - \sqrt{k^2+1}\, b_1 a_j}{a_1 b_1 k e}. \tag{11}$$

Avec le tétracycle T_0, on vérifie aisément que e^2 est bien réel, et l'on peut discuter la réalité de e, donc celle de γ, en fonction de k, lorsque les deux bifoyers sont donnés; on voit ainsi que le centre de γ est toujours réel; l'abscisse ξ de ce centre et le rayon r de γ sont donnés en effet par

$$\gamma_1 - i\gamma_2 = \frac{\varrho}{r}, \qquad \gamma_3 = \frac{\xi}{r},$$

donc

$$\frac{1}{r} = \frac{a_1 - \sqrt{k^2+1}\, b_1}{a_1 b_1 k e}, \qquad \xi = \frac{a_1 b_3 - \sqrt{k^2+1}\, b_1 a_3}{a_1 - \sqrt{k^2+1}\, b_1}. \tag{12}$$

La forme symétrique de (10) montre, comme il se doit par raison de symétrie anallagmatique, que l'excentricité est la même avec le bifoyer (BB') et la directrice correspondante δ, de coordonnées

$$\delta_j = \frac{b_1 a_j - \sqrt{k^2+1}\, a_1 b_j}{a_1 b_1 k e}, \qquad \delta_4 = 0, \tag{13}$$

où $\sqrt{k^2+1}$ a la même détermination que dans (11).

On voit également que, *si* (AA') *et* (BB') *sont réels*, γ *et* δ *sont simultanément réels ou imaginaires purs; mais, si* (AA') *est réel et* (BB') *imaginaire, les deux directrices sont aussi de natures différentes.* Le premier résultat est évident d'après (12), puisque la réalité de γ équivaut à celle de e. Pour démontrer la deuxième partie, on peut supposer que T_0 est choisi de manière que

$$\begin{cases} a_1 = 0, & a_2 = i\varrho, & a_3 = 0, & a_4 = \varrho, \\ b_1 \text{ réel}, & b_2 = ib'_2, & b_3 \text{ réel}, & b_4 = ib'_4, \end{cases} \tag{11'}$$

où ϱ, b'_2, b'_4 sont réels; on suppose en outre que $k = i|k|$ avec $\sqrt{k^2+1} = i\nu$, où $\nu = \varepsilon\sqrt{|k|^2 - 1}$ est réel. Les éléments euclidiens de γ s'écrivent alors

$$\xi = \frac{\varrho b_3}{\varrho + \nu b'_4} \text{ réel}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\varrho + \nu b'_4}{-\varrho b'_4 |k| e},$$

tandis que ceux de δ sont

$$\xi' = \frac{b_1 a_3 - \sqrt{k^2+1}\, a_3 b_3}{b_4 - \sqrt{k^2+1}\, a_4} = \frac{-\nu\rho b_3}{b'_4 - \nu\rho} \text{ réel}, \qquad \frac{1}{r'} = \frac{b_4 - \sqrt{k^2+1}\, a_4}{a_3 b_4 ke} = \frac{i(b'_4 - \nu\rho)}{-\rho b'_4 \cdot k \cdot e}.$$

Discutons maintenant la réalité de e; lorsque les deux bifoyers sont réels, donc lorsque k est réel, elle équivaut à la condition

$$(k^2-1) + 2\sqrt{k^2+1}\,\frac{\Sigma' a_j b_j}{a_3 b_4} + 1 < 0,$$

inéquation du second degré en $\sqrt{k^2+1}$; avec le tétracycle T_0 tel que $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = i\rho$. $a_4 = \rho$, elle se réduit à

$$(k^2-1) + 2\frac{ib_2}{b_4}\sqrt{k^2+1} + 1 < 0,$$

où b_2 est imaginaire pur, et b_4 réel; le discriminant réduit vaut

$$-b_2^2 - b_4^2 = b_1^2 + b_3^2 > 0,$$

donc e est réel pourvu que

$$\frac{-ib_2}{b_4} - \frac{\sqrt{b_1^2+b_3^2}}{|b_4|} < \sqrt{k^2+1} < \frac{-ib_2}{b_4} + \frac{\sqrt{b_1^2+b_3^2}}{|b_4|}; \tag{15}$$

n'oublions pas que A et B étant du même côté de Ox, b_4 et $-ib_2$ sont tous les deux du signe de ρ, et les membres extrêmes de (15) sont bien positifs.

Si (BB′) est imaginaire, les hypothèses représentées par (14) donnent

$$e^2 = \frac{-1}{k^2}\left(\nu^2 + 2\frac{b'_2}{b'_4}\nu - 1\right),$$

qui est positif pourvu que

$$\frac{-b'_2}{b'_4} - \frac{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_4}}{|b'_4|} < \nu < \frac{-b'_2}{b'_4} + \frac{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_4}}{|b'_4|}$$

ou

$$\frac{b_2}{b_4} - \frac{\sqrt{b_1^2+b_3^2}}{|b_4|} < \nu < \frac{-b_2}{b_4} + \frac{\sqrt{b_1^2+b_3^2}}{|b_4|}, \tag{16}$$

de forme analogue à (15).

7. Inversement, supposons que soient donnés (AA′), γ et e. Supposons, par exemple, que (AA′) soit réel, γ étant réel ou imaginaire pur en même temps que e. k est déterminé par l'équation (10), dans laquelle $\frac{\Sigma' a_j b_j}{b_4}$ est calculé à l'aide de (11); cette équation donne en effet

$$ke\,\Sigma' a_j \gamma_j = \frac{1}{b_4}\Sigma' a_j b_j + \sqrt{k^2+1}\, a_4,$$

d'où résulte pour l'équation (10) la nouvelle forme

$$a_4 k(e^2-1)+2e\sqrt{k^2+1}\,\Sigma' a_j\gamma_j=0, \tag{17}$$

qui fournit l'expression cherchée

$$k^2=\frac{4e^2(\Sigma' a_j\gamma_j)^2}{(e^2-1)^2a_4^2-4e^2(\Sigma' a_j\gamma_j)^2}. \tag{18}$$

Il vient ensuite, à l'aide de (11) et (17),

$$b_j=b_4\left(ke\gamma_j+\sqrt{k^2+1}\,\frac{a_j}{a_4}\right)=kb_4\left(e\gamma_j+\frac{1-e^2}{2e}\,\frac{a_j}{\Sigma' a_j\gamma_j}\right); \tag{19}$$

b_4 s'en déduit en écrivant que $b_1-ib_2=\rho$, compte tenu de $\gamma_1-i\gamma_2=\frac{\rho}{r}$, où r est le rayon de γ, ce qui donne

$$\frac{1}{b_4}=k\left[\frac{e}{r}+\frac{1-e^2}{2e\,\Sigma' a_j\gamma_j}\right]. \tag{20}$$

On sait que $e\Sigma' a_j\gamma_j\neq 0$ pour une vraie cyclique. Il résulte de ces formules que (BB') est réel en même temps que k; c'est immédiat si γ est réel: si γ est imaginaire pur, supposons toujours $a_1=a_3=0$, $a_2=i\rho$, $a_4=\rho$; e, r, γ_1, γ_3 étant imaginaires purs et γ_2 réel, $\Sigma' a_j\gamma_j=i\rho\gamma_2$ est imaginaire pur, et la vérification n'est pas moins aisée.

k est réel pourvu que le dénominateur au second membre de (18)

$$(e^2-1)^2a_4^2-4e^2(\Sigma' a_j\gamma_j)^2>0,$$

car $e^2(\Sigma' a_j\gamma_j)^2$ est toujours positif. Si γ est réel, $\Sigma' a_j\gamma_j$ est réel, et l'inégalité se décompose suivant le signe de e^2-1. Si $e^2>1$, il vient

$$|a_4|e^2-2|\Sigma' a_j\gamma_j|.|e|-|a_4|>0,$$

d'où

$$|e|>\frac{|\Sigma' a_j\gamma_j|+\sqrt{(\Sigma' a_j\gamma_j)^2+a_4^2}}{|a_4|}, \tag{21}$$

tandis que, si $e^2<1$, on a

$$|a_4|e^2+2|\Sigma' a_j\gamma_j|.|e|-|a_4|<0,$$

c'est-à-dire

$$|e|<\frac{-|\Sigma' a_j\gamma_j|+\sqrt{(\Sigma' a_j\gamma_j)^2+a_4^2}}{|a_4|}. \tag{22}$$

Par conséquent, lorsque (AA') et γ sont réels, la cyclique Q est de première classe si l'excentricité $|e|$ est extérieure à l'intervalle

$$\left(\frac{-|\Sigma' a_j\gamma_j|+\sqrt{(\Sigma' a_j\gamma_j)^2+a_4^2}}{|a_4|},\ \frac{|\Sigma' a_j\gamma_j|+\sqrt{(\Sigma' a_j\gamma_j)^2+a_4^2}}{|a_4|}\right), \tag{23}$$

et de deuxième classe si $|e|$ est dans cet intervalle.

Si γ est imaginaire pur, il en est de même pour $\Sigma' a_j\gamma_j$; en posant $e = i|e|$, la condition de réalité de k est la même que plus haut et s'écrit

$$(|e|^2+1)^2 a_4^2 - 4|e|^2|\Sigma' a_j\gamma_j|^2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$|a_4|\cdot|e|^2 - 2|\Sigma' a_j\gamma_j|\cdot|e| + |a_4| > 0.$$

Le discriminant réduit de ce trinome en $|e|$ est

$$|\Sigma' a_j\gamma_j|^2 - a_4^2 = \Sigma' a_j^2 \Sigma' \gamma_j^2 - (\Sigma' a_j\gamma_j)^2 = \sum_{j,k=1}^{3} (a_j\gamma_k - a_k\gamma_j)^2,$$

et se réduit, avec le tétracycle particulier Γ_0 généralement considéré, à $-\rho^2(\gamma_1^2+\gamma_3^2)$, où γ_1 et γ_3 sont imaginaires purs; il est donc positif, et k est réel pourvu que $|e|$ soit hors de l'intervalle

$$\left(\frac{|\Sigma' a_j\gamma_j| - \sqrt{-(\Sigma' a_j\gamma_j)^2 - a_4^2}}{|a_4|},\ \frac{|\Sigma' a_j\gamma_j| + \sqrt{-(\Sigma' a_j\gamma_j)^2 - a_4^2}}{|a_4|}\right). \tag{24}$$

Par conséquent, lorsque (AA') est réel et γ imaginaire pur, Q est de première ou de deuxième classe suivant que $|e|$ est extérieur ou intérieur à l'intervalle (24).

On vérifie sur (17) que k^2 ne peut être compris entre -1 et 0, car

$$\frac{1}{k^2} + 1 = \frac{(e^2-1)^2 a_4^2}{4e^2(\Sigma' a_j\gamma_j)^2}$$

est toujours positif.

Il est commode de distinguer trois genres de cycliques à l'aide de la discussion que nous venons de faire : le genre hyperbolique comprenant les cycliques de première classe pour lesquelles $|e|>1$, le genre elliptique comprenant celles de première classe pour lesquelles $|e|<1$, et le genre parabolique formé par les cycliques de deuxième classe.

Supposons par exemple $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = i\rho$, $a_4 = \rho$ réel. γ étant réel, la variation de e de 0 à ∞ donne le tableau

e	0	$-\gamma_2 + \sqrt{1+\gamma_2^2}$	1	$\gamma_2 + \sqrt{1+\gamma_2^2}$	∞
genre	elliptique	parabolique			hyperbolique

tandis que si γ est imaginaire pur, ainsi que e, on a le tableau

e	0	$\lvert\gamma_2\rvert - \sqrt{\gamma_2^2-1}$	1	$\lvert\gamma_2\rvert + \sqrt{\gamma_2^2-1}$	∞
genre	elliptique	parabolique			hyperbolique

Lorsque e varie, (AA') et γ étant fixes, le bifoyer (BB') se déplace sur le cercle orthogonal à γ qui passe par (AA'). Ce cercle est un cercle directeur fixe de la

cyclique Q. Avec les coordonnées particulières de (AA'), on a effectivement $b_1 = keb_4\gamma_1$, $b_3 = keb_4\gamma_3$, donc $\gamma_3 b_1 - \gamma_1 b_3 = 0$. La variation de (BB'), sur ce cercle

$$\gamma_3 x_1 - \gamma_1 x_3 = 0, \tag{25}$$

est déterminée par celle de l'abscisse b_3 de (BB') en fonction de e, donnée (19) et (20) fournissent la valeur

$$b_3 = \frac{\gamma_3 e^2}{\frac{e^2}{r} + \frac{1 - e^2}{2i\rho\gamma_2}};$$

c'est une fonction homographique de e^2. Q change de genre lorsque la droite BB' passe par l'un des points où Ox rencontre le cercle (25). Ce cercle est toujours réel, et γ est réel ou imaginaire suivant que son centre est extérieur ou intérieur à (25), Pour $|e| = 0$, $b_3 = 0$ et (BB') coïncide avec (AA'), et Q se réduit aux deux cercles points A, A'; puis (BB') se déplace dans un sens constant, déterminé par le signe de $\frac{\gamma_3}{2i\rho\gamma_2}$, qui est essentiellement réel.

CHAPITRE III.

ÉQUATION RÉDUITE. CYCLIQUES HOMOFOCALES.

8. Les cercles directeurs d'une cyclique Q sont des axes de symétrie anallagmatique, et deux d'entre eux sont toujours réels. Il est naturel de rapporter Q au tétracycle orthogonal formé par ces cercles, qui est de la même classe que Q. On peut ainsi supposer que ω_3 et ω_4 sont réels, et même que ω_4 est rectiligne, et pris pour axe Ox, sans que ce soit une restriction anallagmatique. ω_1 est réel et ω_2 imaginaire pur pour un tétracycle de première classe, tandis qu'ils sont imaginaires conjugués l'un de l'autre pour un tétracycle de deuxième classe. L'équation de Q est paire par rapport aux 4 variables homogènes x_i, donc de la forme $\sum_{i=1}^{4} a_i x_i^2 = 0$, ou, compte tenu de $\sum_i x_i^2 = 0$, de la forme réduite

$$\sum' q_j x_j^2 = 0. \tag{1}$$

Les q_j sont réels si Q est réel et de première classe; q_3 est réel et q_1, q_2 imaginaires conjugués si Q est réel et de deuxième classe, et cela à un facteur près, bien entendu. On peut également supposer que ω_3 contient un bifoyer réel (AA') et un deuxième bifoyer (BB'), réel ou non suivant que Q est de première ou de deuxième classe, dans le champ cocyclique de base ω_4.

k désignant le rayon du bicycle directeur de bicentre (BB'), l'équation de Q est encore donnée par [(9); II] où l'on fait $a_3 = b_3 = 0$ et où l'on tient compte des relations $\frac{b_1}{-a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_4}{a_4}$ qui expriment que (AA') et (BB') sont symétriques par raport à ω_4; il vient ainsi

$$(a_1x_1 - a_2x_2)^2 + (a_1x_1 + a_2x_2)^2 + 2\sqrt{k^2+1}(a_1^2x_1^2 - a_2^2x_2^2) + k^2a_4^2x_4^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$2(1+\sqrt{k^2+1})a_1^2x_1^2 + 2(1-\sqrt{k^2+1})a_2^2x_2^2 + k^2a_4^2x_4^2 = 0, \tag{2}$$

ou encore, avec x_1, x_2, x_3 seuls, compte tenu de $a_4^2 = -a_1^2 - a_2^2$,

$$[(\sqrt{k^2+1}+1)^2a_1^2 + k^2a_2^2]x_1^2 + [(\sqrt{k^2+1}-1)^2a_2^2 + k^2a_1^2]x_2^2 - k^2a_1^2x_3^2 = 0. \tag{3}$$

C'est de la forme (1) avec les coefficients

$$\begin{cases} q_1 = (\sqrt{k^2+1}+1)[(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2], \\ q_2 = (\sqrt{k^2+1}-1)[(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2], \\ q_3 = -k^2a_1^2 = (\sqrt{k^2+1}+1)(\sqrt{k^2+1}-1)(a_1^2+a_2^2). \end{cases} \tag{4}$$

En particulier, on a

$$\begin{cases} q_1 - q_3 = 2(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2, \\ q_2 - q_3 = -2(\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2, \\ q_1 - q_2 = 2[(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2]. \end{cases} \tag{5}$$

On déduit de ces relations

$$\sqrt{k^2+1}+1 = \frac{2q_1}{q_1-q_2}, \qquad \sqrt{k^2+1}-1 = \frac{2q_2}{q_1-q_2}, \tag{6}$$

donc

$$k^2 = \frac{4q_1q_2}{(q_1-q_2)^2}, \tag{7}$$

puis

$$\begin{cases} a_1^2 = \dfrac{(q_1-q_3)(q_1-q_2)}{4q_1}, & a_2^2 = \dfrac{(q_2-q_3)(q_2-q_1)}{4q_2}, \\ a_3 = 0, & a_4^2 = \dfrac{-q_3(q_1-q_2)^2}{4q_1q_2}. \end{cases} \tag{8}$$

Ces formules font connaître k, (A, A') et (B, B') en fonction des coefficients q_j, pourvu que le facteur arbitraire dont dépendent ceux-ci dans l'équation générale (1) soit convenablement choisi si l'on veut que $a_1 - ia_2 = \rho$. En tout cas, ces formules représentent les coordonnées tétracycliques homogènes.

L'excentricité e correspondant à ces deux bifoyers est donnée par |(10); II|, qui s'écrit ici

$$k^2a_4^2e^2=\cdots(k^2+2)a_4^2+2\sqrt{k^2+1}(a_1^2-a_2^2)$$
$$=(\sqrt{k^2+1}+1)^2a_1^2+(\sqrt{k^2+1}-1)^2a_2^2,$$

c'est-à-dire

$$q_3e^2=q_3-q_1-q_2.$$

donc

$$e^2=1-\frac{q_1+q_2}{q_3},\tag{9}$$

pour les deux bifoyers situés sur ω_3, dans le champ de base ω_4. La directrice γ associée à (AA′) est $\Sigma'\gamma_jx_j=0$, où, par exemple, d'après |(11); II|,

$$\gamma_j=\frac{\frac{a_4}{b_4}b_j-\sqrt{k^2+1}a_j}{kea_4}=\frac{\frac{a_4}{b_4}b_j-\sqrt{k^2+1}a_j}{\sqrt{q_1+q_2-q_3}},$$

donc

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{-(\sqrt{k^2+1}+1)a_1}{\sqrt{q_1+q_2-q_3}}=\dfrac{-2q_1a_1}{(q_1-q_2)\sqrt{q_1+q_2-q_3}},\\ \gamma_2=\dfrac{-(\sqrt{k^2+1}-1)a_2}{\sqrt{q_1+q_2-q_3}}=\dfrac{-2q_2a_2}{(q_1-q_2)\sqrt{q_1+q_2-q_3}},\\ \gamma_3=\gamma_4=0.\end{cases}\tag{10}$$

On en déduit encore, grâce à (8),

$$\gamma_1^2=\frac{(q_1-q_3)q_1}{(q_1-q_2)(q_1+q_2-q_3)},\qquad \gamma_2^2=\frac{(q_2-q_3)q_2}{(q_2-q_1)(q_1+q_2-q_3)},\qquad \gamma_3=\gamma_4=0.\tag{11}$$

qui donnent les deux directrices associées aux deux bifoyers (AA′), (BB′), en fonction des coefficients généraux de (1).

Toutes ces formules permettent de déterminer tous les bifoyers, directrices, excentricités et bicercles directeurs de la cyclique (1), en choisissant de toutes les manières possibles trois des quatre cercles de symétrie ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. En permutant q_1 et q_3 dans (1), on obtient de même les bifoyers situés sur ω_1 et les éléments correspondants, dans le champ de base ω_4; en permutant q_2 et q_3 dans (1), on obtient de même les bifoyers situés sur ω_2, dans le champ de base ω_4, et les éléments correspondants. Les foyers situés sur ω_4 s'obtiendront en exprimant l'équation de Q en fonction de x_4 et deux autres coordonnées. Ainsi, les coordonnées tétracycliques homogènes des deux bifoyers (AA′), (BB′) situés sur ω_3 sont, d'après (8),

$$x_1=\sqrt{q_2(q_3-q_1)},\qquad x_2=\pm\sqrt{q_1(q_2-q_3)},\qquad x_3=0,\qquad x_4=\pm\sqrt{q_3(q_1-q_2)};$$

celles des deux bifoyers situés sur ω_1 sont

$$x_1=0,\qquad x_2=\sqrt{q_3(q_1-q_2)},\qquad x_3=\pm\sqrt{q_2(q_3-q_1)},\qquad x_4=\pm\sqrt{q_1(q_2-q_3)},$$

et les deux bifoyers situés sur ω_2 sont déterminés par

$$x_1=\sqrt{q_3(q_1-q_2)},\quad x_2=0,\quad x_3=\pm\sqrt{q_1(q_2-q_3)},\quad x_4=\pm\sqrt{q_2(q_3-q_1)}.$$

Les trois couples ont les mêmes coordonnées, à l'ordre près.

9. *Cycliques homofocales.* — Les cycliques dont les bifoyers (AA′) et (BB′) sont fixés sont coaxiales et représentées par l'équation (2), où k joue le rôle de paramètre. En posant $\sqrt{k^2+1}=\nu$, elle s'écrit encore

$$2(\nu+1)a_1^2x_1^2-2(\nu-1)a_2^2x_2^2+(\nu^2-1)a_4^2x_4^2=0, \tag{12}$$

ou

$$f(\nu)\equiv\frac{2}{\nu-1}a_1^2x_1^2-\frac{2}{\nu+1}a_2^2x_2^2+a_4^2x_4^2=0, \tag{13}$$

sous une forme analogue à l'équation des coniques homofocales. Il est bien connu que par chaque point du plan passent deux de ces cycliques, et qu'elles sont orthogonales. La démonstration géométrique ou analytique en est aisée. Nous allons cependant en faire ici la vérification analytique afin d'établir un résultat supplémentaire intéressant. Une démonstration géométrique sera donnée au dernier chapitre.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de cycliques de première classe, (AA′) et (BB′) étant réels, et ν réel ≥ 1. Dans l'intervalle de variation de ν,

$$f'(\nu)=\frac{-2a_1^2x_1^2}{(\nu-1)^2}+\frac{2a_2^2x_2^2}{(\nu+1)^2}$$

s'annule pour une valeur ν_1 telle que l'on ait

$$\frac{\nu_1-1}{|a_1x_1|}=\frac{\nu_1+1}{|a_2x_2|}=\frac{2}{|a_2x_2|-|a_1x_1|};$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées du point où doivent passer les cycliques considérées; a_2 et x_2 sont imaginaires purs, avec

$$-a_2^2=a_1^2+a_4^2>a_1^2,\qquad -x_2^2=x_1^2+x_3^2+x_4^2>x_1^2,$$

donc $|a_2x_2|^2>|a_1x_1|^2$, de sorte que ν_1 est bien >1. Lorsque ν croît de 1 à l'infini, $f(\nu)$ décroît de l'infini à $f(\nu_1)$, puis recroît de $f(\nu_1)$ à $a_1^2x_1^2>0$. D'autre part, une valeur prise par ν est

$$1+\frac{2a_1^2}{a_4^2}=\frac{a_1^2-a_2^2}{a_4^2}=-1-\frac{2a_2^2}{a_4^2},$$

pour laquelle

$$f\left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_4^2}\right)=a_4^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=-a_4^2x_3^2<0,$$

donc le minimum $f(\nu_1)$ est négatif, et l'équation $f(\nu)=0$ a deux racines.

Avec les seules coordonnées x_1, x_2, x_3, l'équation (13) s'écrit

$$\left(\frac{2a_1^2}{\nu-1}-a_4^2\right)x_1^2-\left(\frac{2a_2^2}{\nu+1}+a_4^2\right)x_2^2-a_4^2x_3^2=0; \tag{14}$$

donc, si ν' et ν'' sont les deux racines de (13), la condition d'orthogonalité des deux cycliques correspondantes au point considéré est

$$\left(\frac{2a_1^2}{\nu'-1}-a_4^2\right)\left(\frac{2a_1^2}{\nu''-1}-a_4^2\right)x_1^2+\left(\frac{2a_2^2}{\nu'+1}+a_4^2\right)\left(\frac{2a_2^2}{\nu''+1}+a_4^2\right)x_2^2+a_4^4x_3^2=0;$$

en revenant aux variables x_1, x_2, x_4, il vient

$$\frac{4a_1^4x_1^2}{(\nu'-1)(\nu''-1)}+\frac{4a_2^4x_2^2}{(\nu'+1)(\nu''+1)}-a_4^2\left(\frac{2a_1^2x_1^2}{\nu'-1}-\frac{2a_2^2x_2^2}{\nu'+1}\right)$$
$$-a_4^2\left(\frac{2a_1^2x_1^2}{\nu''-1}-\frac{2a_2^2x_2^2}{\nu''+1}\right)-a_4^4x_4^2=0;$$

compte tenu de $f(\nu')=f(\nu'')=0$, d'où résulte en particulier

$$\frac{a_1^2x_1^2}{(\nu'-1)(\nu''-1)}=\frac{a_2^2x_2^2}{(\nu'+1)(\nu''+1)},$$

cette condition s'écrit enfin

$$4a_1^2x_1^2-a_4^2x_4^2(\nu'-1)(\nu''-1)=0.$$

et la vérification est immédiate.

L'excentricité e est déterminée par la formule (9) appliquée à l'équation (14),

$$e^2-1=\frac{\left(\frac{2a_1^2}{\nu-1}-a_4^2\right)-\left(\frac{2a_2^2}{\nu+1}+a_4^2\right)}{a_4^2}=\frac{a_1^2-a_2^2-\nu a_4^2}{a_4^2}\left(\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{\nu+1}\right),$$

du signe de $\frac{a_1^2-a_2^2}{a_4^2}-\nu$; le premier terme de cette différence est entre ν' et ν'', comme on l'a vu plus haut, donc les carrés des excentricités des deux cycliques sont de part et d'autre de 1.

Pour des cycliques de deuxième classe, le paramètre ν de l'équation (12) est de la forme $\nu=i\mu$, où μ est réel, ce qui donne l'équation

$$g(\mu)\equiv a_4^2x_4^2(\mu^2+1)-2i(a_1^2x_1^2-a_2^2x_2^2)\mu-2(a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2)=0,$$

où a_4x_4 est réel, et a_1x_1, a_2x_2 sont imaginaires conjugués. Le fait que

$$g\left(\frac{a_1^2-a_2^2}{ia_4^2}\right)=\frac{4a_1^2a_2^2}{a_4^2}(x_1^2+x_2^2+x_4^2)=\frac{-4a_1^2a_2^2x_3^2}{a_4^2}$$

est négatif montre qu'il passe également deux cycliques réelles par chaque point du plan, leur orthogonalité résultant du calcul fait avec ν.

Pour les cycliques de première classe, on a, de plus,

$$e^2+1=2+\frac{2\nu}{\nu^2-1}\,\frac{a_1^2-a_2^2-\nu a_4^2}{a_4^2}=\frac{2}{\nu^2-1}\left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_4^2}\nu-1\right)>0,$$

puisque ν et $\frac{a_1^2-a_2^2}{a_4^2}$ sont tous deux supérieurs à 1. Les carrés e'^2 et e''^2 des excentricités des deux cycliques vérifient donc les inégalités $-1<e'^2<1<e''^2$, c'est-à-dire $|e'^2|<1<e''^2$. On peut donc énoncer un théorème dont la similitude avec celui concernant les coniques homofocales à centre est bien remarquable.

THÉORÈME. — *Les deux quartiques homofocales de première classe qui passent par un point du plan sont l'une de genre elliptique et l'autre de genre hyperbolique.*

CHAPITRE IV.

POLES ET POLAIRES. DIAMÈTRES. TANGENTES.

10. Soit (PP′) un bipoint du champ cocyclique de base réelle ω, qu'on peut supposer rectiligne, et de coordonnées $(\xi_j, \pm\xi_4)$ par rapport à un tétracycle T dont le cercle ω_4 est ω. Soit d'autre part une cyclique Q du champ, dont l'équation en x_1, x_2, x_3 est

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv\sum_{j,k=1}^{3} q_{jk}x_jx_k=0. \tag{1}$$

La définition de la polaire de (PP′) par rapport à Q est calquée sur la théorie des coniques, et cette polaire est un cercle du champ (¹). Soit (MM′) un bipoint variable de coordonnées $(x_j, \pm x_4)$. Le cercle PP′MM′ a l'équation

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}=0,$$

où les X_i sont les coordonnées du bipoint courant, ce qui donne la représentation paramétrique

$$X_j=\mu\xi_j+\nu x_j \qquad (j=1, 2, 3). \tag{2}$$

D'ailleurs l'identité $\sum\frac{X_i}{\rho_i}=1$ entre les coordonnées d'un point et les rayons des cercles du tétracycle, où $\rho_4=\infty$, donne ici

$$\sum{}'\frac{X_j}{\rho_j}=\sum{}'\frac{\xi_j}{\rho_j}=\sum{}'\frac{x_j}{\rho_j}=1,$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 29.

donc $\mu + \nu = 1$, ce qui fournit les équations paramétriques définitives

$$X_j = \mu\xi_j + (1-\mu)x_j \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{2'}$$

Ce cercle rencontre Q aux bipoints déterminés par

$$f(\xi_1 + \lambda x_1,\ \xi_2 + \lambda x_2,\ \xi_3 + \lambda x_3) = 0,$$

où $\lambda = \frac{1}{\mu} - 1$, c'est-à-dire

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \lambda \Sigma' x_j f'_{\xi_j} + \lambda^2 f(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{3}$$

Par définition, ces deux bipoints de rencontre sont conjugués harmoniques par rapport à (PP'), (MM') si les cercles d'un faisceau, passant par ces quatre bipoints, forment dans le même ordre une division harmonique (¹). Considérons par exemple les cercles du faisceau défini par ω_1 et ω_2; leur équation est de la forme $X_1 - \sigma X_2 = 0$, et le paramètre σ de celui qui passe par le bipoint (2') est

$$\sigma = \frac{\mu\xi_1 + (1-\mu)x_1}{\mu\xi_2 + (1-\mu)x_2} = \frac{\xi_1 + \lambda x_1}{\xi_2 + \lambda x_2};$$

la conjugaison harmonique des valeurs de σ relatives aux quatre cercles équivaut donc à celle des valeurs de λ, c'est-à-dire $(0, \infty, \lambda', \lambda'') = -1$, où λ', λ'' sont les racines de (3), ou enfin $\lambda' + \lambda'' = 0$. La condition de conjugaison de deux bipoints (PP'), (MM') par rapport Q s'exprime donc par

$$\Sigma' x_j f'_{\xi_j} = 0, \tag{4}$$

sans distinction analytique avec la théorie des coniques. Le même raisonnement peut être fait avec les expressions (2), de sorte que (4) est indépendant de la forme de ω_1 $\left(\text{il suffit de faire } \lambda = \frac{\nu}{\mu}\right)$.

La polaire de (PP') par rapport à Q est le cercle du champ d'équation (4), où les x_j sont variables. En particulier, la polaire du bifoyer (AA') de la cyclique [(1); III] est

$$q_1 a_1 x_1 + q_2 a_2 x_2 = 0.$$

ou, d'après [(10); III],

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0.$$

C'est donc la directrice γ, comme il était d'ailleurs à prévoir puisqu'elle passe par les bipoints de contact de Q avec les cercles tangents issus de (AA'). Comme pour les coniques, *la polaire d'un bifoyer est la directrice associée*.

Observons également que la polaire du bipoint (CC') situé à l'intersection des deux axes anallagmatiques ω_1, ω_3, dont les coordonnées sont donc telles

(¹) *Loc. cit.*, p. 27.

que $\xi_1 = \xi_3 = 0$, est l'axe de symétrie ω_2. (CC') s'appellera un *bicentre anallagmatique* de Q.

Il est clair qu'on déduit de (4) l'équation tangentielle de Q et la théorie des cercles du champ conjugués par rapport à Q avec les mêmes résultats analytiques que pour les coniques. En particulier, avec la forme réduite |(1); III|, la condition pour que le cercle $\Sigma' \lambda_j x_j = 0$ soit tangent est

$$\sum' \frac{\lambda_j^2}{q_j} = 0, \tag{5}$$

et la condition de conjugaison de deux cercles du champ, de coordonnées (λ_j), (μ_j) est

$$\sum' \frac{\lambda_j \mu_j}{q_j} = 0. \tag{6}$$

11. Nous avons appelé bicentre allagmatique d'une cyclique Q l'intersection de deux cercles directeurs, car une transposition, ou symétrie anallagmatique, autour d'un tel bipoint, conserve Q. Réciproquement, tout bicentre anallagmatique est l'intersection de deux cercles directeurs, de même que tout centre de symétrie d'une conique est l'intersection de deux axes de symétries. Considérons en effet la cyclique générale (1), admettant pour bicentre l'intersection des deux cercles ω_1, ω_3 du tétracycle de référence. La transposition autour de ce bipoint est le produit des inversions par rapport aux deux cercles orthogonaux ω_1, ω_3, et se traduit par les transformations

$$X_1 = -x_1, \qquad X_2 = x_2, \qquad X_3 = -x_3, \qquad X_4 = x_4.$$

en coordonnées homogènes; l'invariance de l'équation (1) s'exprime donc par la parité de la forme quadratique $f(x_1, x_2, x_3)$ en x_2, et l'équation de la cyclique Q est de la forme

$$q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + 2q_{13}x_1x_3 = 0.$$

Le changement des cercles de coordonnées ω_1, ω_3 du tétracycle produit une transformation orthogonale des seules coordonnées x_1, x_3, ce qui permet d'annuler le coefficient q_{13}, et de mettre l'équation de Q sous la forme réduite |(1); III|; les nouveaux cercles de coordonnées ainsi obtenus sont des cercles directeurs de Q, ce qui démontre notre proposition.

Dans un champ cocyclique lobatchewskien, une cyclique Q de première classe a toujours un bicentre anallagmatique réel, et un seul qui est l'intersection des deux cercles directeurs réels de Q, autres que le cercle de base du champ. Pour une cyclique de deuxième classe, seule l'intersection des deux cercles directeurs imaginaires conjugués pourrait être réelle, mais ce n'est pas le cas, comme il est évident sur le tétracycle T_0 de deuxième classe: ce résultat justifie le qualificatif de parabolique pour le genre de ces cycliques.

12. *Diamètres conjugués.* — Pour demeurer dans le domaine réel, considérons une cyclique Q de première classe, rapportée à ses axes. Son bicentre anallagmatique (CC') est le bipoint d'intersection des cercles ω_1, ω_3, et a les coordonnées $(0, \rho_2, 0, \pm i\rho_2)$, où ρ_2 est le rayon imaginaire pur du cercle ω_2. Nous appelons *diamètres* de Q les cercles du champ qui passent par (CC'). L'équation d'un diamètre est de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3 = 0$ avec, par exemple, $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = 1$, ce qui permet de l'écrire

$$x_1 \sin\theta + x_3 \cos\theta = 0 : \tag{7}$$

θ représente d'ailleurs l'angle de ce diamètre avec ω_3. D'après (6), la condition pour que deux diamètres correspondant à θ, θ' soient conjugués est

$$\frac{\sin\theta \sin\theta'}{q_1} + \frac{\cos\theta \cos\theta'}{q_3} = 0. \tag{8}$$

D'autre part, les bipoints (MM'), où (7) rencontre Q, sont donnés par

$$x_1 = \frac{\cos\theta}{u}, \qquad x_3 = -\frac{\sin\theta}{u}, \qquad \frac{x_2}{\rho_2} = 1 - \left(\frac{x_1}{\rho_1} + \frac{x_3}{\rho_3}\right) = 1 - \frac{1}{u}\left(\frac{\cos\theta}{\rho_1} - \frac{\sin\theta}{\rho_3}\right), \tag{9}$$

où les ρ_i sont les rayons des cercles ω_i ($\rho_1 = \infty$), et où u vérifie l'équation

$$\Sigma' q_i x_i^2 = \frac{1}{u^2}(q_1 \cos^2\theta + q_3 \sin^2\theta) + \frac{q_2 \rho_2^2}{u^2}\left(u + \frac{\sin\theta}{\rho_3} - \frac{\cos\theta}{\rho_1}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(u - \frac{\sin\theta}{\rho_3} - \frac{\cos\theta}{\rho_1}\right)^2 - \frac{q_1 \cos^2\theta + q_3 \sin^2\theta}{q_2 \rho_2^2} = 0. \tag{10}$$

La distance $r = |(CC')(MM')|$ est donnée par $|(8); I|$, donc telle que

$$r^2 = \frac{x_2^2 + x_1^2}{-x_1^2} = -\frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{q_2}{q_1 \cos^2\theta + q_3 \sin^2\theta - q_2}. \tag{11}$$

r^2 est une fonction homographique de $\tan^2\theta$, tandis que la condition de conjugaison (8) est involutive entre $\tan^2\theta$ et $\tan^2\theta'$. On peut donc énoncer le

Théorème. — *Les carrés des distances anallagmatiques du bicentre d'une cyclique de première classe aux extrémités de deux diamètres conjugués sont liés involutivement.*

C'est l'équivalent du premier théorème d'Appolonius pour les coniques à centre. Si r, r' désignent ces deux distances, l'élimination de θ et θ' entre (8) et les deux expressions (11) de r^2 et r'^2 donne immédiatement, après division par $q_2(q_1 - q_3)$ qui ne peut être nul pour une vraie cyclique, la relation involutive annoncée

$$[2q_1 q_3 - q_2(q_1 - q_3)] r^2 r'^2 + [q_1 q_3 - q_2(q_1 + q_3)](r^2 + r'^2) - q_2(q_1 + q_3) = 0. \tag{12}$$

13. La discussion de la forme de Q par celle de la réalité des extrémités du diamètre courant justifie encore la classification que nous avons adoptée pour les cycliques de première classe. Nous allons voir en effet que *les cycliques de première classe qui sont coupées par tous leurs diamètres sont les cycliques elliptiques.*

Pour que le bipoint (MM') défini par (9) soit réel, il faut et il suffit que x_1, x_3, x_4 soient réels, c'est-à-dire que u soit réel et que $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{u^2}+x_2^2$ soit négatif ou nul. ρ_2^2 étant négatif, la première condition s'écrit, d'après (10),

$$\frac{q_1}{q_2}\cos^2\theta-\frac{q_3}{q_2}\sin^2\theta\leq 0;$$

la deuxième condition est

$$1+u^2x_2^2=1-\frac{q_1\cos^2\theta+q_3\sin^2\theta}{q_2}\leq 0,$$

ce qui donne la seule inégalité

$$\frac{q_1}{q_2}\cos^2\theta+\frac{q_3}{q_2}\sin^2\theta\geq 1. \tag{13}$$

Lorsque θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le premier membre varie monotonement de $\frac{q_1}{q_2}$ à $\frac{q_3}{q_2}$, où $\frac{q_1}{q_2}=\frac{\sqrt{k^2+1}+1}{\sqrt{k^2+1}-1}>1$ en vertu de [(4); III]. Les diamètres voisins du diamètre focal ω_3 (ou axe focal de Q) coupent toujours Q, et l'on voit que tous les diamètres sont effectivement sécants pourvu que $\frac{q_3}{q_2}$ soit lui-même ≥ 1. En posant comme plus haut $\nu=\sqrt{k^2+1}$, cette condition s'écrit, grâce à [(4): III] et [(5); III],

$$\frac{q_3-q_2}{q_2}=\frac{2a_2^2}{(\nu+1)a_1^2+(\nu-1)a_2^2}\geq 0,$$

ou

$$(\nu+1)a_1^2+(\nu-1)a_2^2=2a_1^2-(\nu-1)a_1^2\leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\nu\geq 1-\frac{2a_1^2}{a_1^2}. \tag{14}$$

Pour le paramètre k, ceci donne l'inégalité

$$k^2\geq\frac{-4a_1^2a_2^2}{a_1^4}.$$

D'autre part, le carré de l'excentricité est

$$e^2=1-\frac{q_1+q_2}{q_3}=1+\frac{2\nu[(\nu+1)a_1^2+(\nu-1)a_2^2]}{(\nu^2-1)a_1^2}=2\frac{a_1^2}{a_1^2}\left(\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{\nu+1}\right)-\frac{\nu-1}{\nu+1}.$$

Dans l'intervalle de variation $(1, \infty)$ de ν, e^2 est donc une fonction décroissante, variant de l'infini à -1, prenant la valeur 1 pour $\nu = 1 + \frac{2a_1^2}{a_3^2}$; l'inégalité (14) équivaut donc à la condition $-1 < e^2 < 1$, ce qui démontre notre proposition.

Pour une cyclique hyperbolique, (MM') cesse d'être réel lorsque (13) fait place à l'inégalité contraire, c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}^2\theta > \operatorname{tang}^2\theta_1 = \frac{q_1 - q_2}{q_2 - q_3},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}^2\theta > \operatorname{tang}^2\theta_1 = \frac{2a_1^2 - (\nu - 1)a_3^2}{(\nu - 1)(a_1^2 + a_3^2)}.$$

Les diamètres conjugués doubles sont définis par

$$\operatorname{tang}^2\theta = \operatorname{tang}^2\theta_2 = -\frac{q_1}{q_3} = \frac{2a_1^2 - (\nu - 1)a_3^2}{(\nu - 1)a_3^2},$$

de sorte que $\theta_1 < \theta_2$, pour les valeurs aiguës et positives de θ. θ_1' désignant l'homologue de θ_1, on peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

θ	0	$\nearrow$	(r)	$\nearrow$	θ_1	$\nearrow$	(i)	$\nearrow$	θ_2	$\nearrow$	(i)	$\nearrow$	θ_1'	$\nearrow$	(i)	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
θ'	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	(i)	$\searrow$	θ_1'	$\searrow$	(i)	$\searrow$	θ_2	$\searrow$	(i)	$\searrow$	θ_1	$\searrow$	(r)	$\searrow$	0

où l'on a indiqué par les lettres (r) et (i) la nature réelle ou imaginaire de l'intersection de Q par le diamètre correspondant. Comme pour une hyperbole, on voit que deux diamètres conjugués ne coupent jamais tous deux la cyclique: par contre, il existe un secteur diamétral $(\theta_1 < \theta < \theta_1')$, dans lequel les diamètres sont deux à deux conjugués, et qui ne contient aucun point de Q; la cyclique est tout entière dans le secteur $-\theta_1 < \theta < \theta_1$. Les diamètres $\theta = \pm\theta_1$ sont tels que $r^2 = \infty$, ou $x_1 = 0$; ce sont donc les diamètres qui passent par les points où ω_1 rencontre Q, qu'on peut appeler les *asymptotes* de Q. Ils sont d'ailleurs tangents à Q; en effet, la discussion qui précède montre que la cyclique est constituée par deux ovales intérieurs l'un à l'autre, et ne peut donc rencontrer qu'à angle droit son axe de symétrie ω_1. La vérification par le calcul est d'ailleurs aisée. Par contre, les cycliques elliptiques sont formées de deux ovales situés de part et d'autre de ω_1, et entourent chacun l'un des points du bicentre (CC').

Les diamètres doubles $\theta = \pm\theta_2$ ne sont réels que pour une cyclique hyperbolique, mais ils ne la rencontrent pas.

14. Reconsidérons l'expression (11). Pour deux diamètres orthogonaux, d'arguments θ et $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$, les distances r, r' correspondantes vérifient l'égalité

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{q_1 + q_3 - 2q_2}{q_2} = \text{const.}, \tag{15}$$

c'est l'équivalent du théorème d'Euler relatif aux coniques à centre. En particulier, cette somme vaut $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}$, où r_1 est la distance de (CC') aux extrémités du diamètre focal ω_2, et r_2 la distance aux extrémités du diamètre non focal ω_1; on a donc

$$(16)\qquad \begin{cases} r_1^2=\dfrac{q_2}{q_1-q_2}=\dfrac{\sqrt{k^2+1}-1}{2}, \\ r_2^2=\dfrac{q_2}{q_2-q_2}=\dfrac{(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2+(\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2}{2a_2^2}. \end{cases}$$

On constate que, comme pour les coniques, *la distance du bicentre aux extrémités de l'axe focal ne dépend que du rayon k des bicercles directeurs et non des foyers eux-mêmes.*

Il existe une relation simple entre r_1^2, r_2^2 et le carré de la distance focale

$$[(CC')(AA')]=[(CC')(BB')]=f.$$

En effet, le troisième membre de (11), où $x_i=a_i$, donne

$$f^2=-\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2},$$

donc

$$1+f^2=\frac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2};$$

par suite,

$$r_2^2+1=\frac{\sqrt{k^2+1}+1}{2}\,\frac{1}{f^2+1}=\frac{r_1^2+1}{f^2+1}$$

ou

$$(17)\qquad f^2+1=\frac{r_1^2+1}{r_2^2+1}.$$

A l'aide de ces trois distances, les coefficients de l'équation réduite sont égaux à

$$\frac{q_1}{4a_2^2}=(r_1^2+1)r_2^2,\qquad \frac{q_2}{4a_2^2}=r_1^2r_2^2,\qquad \frac{q_3}{4a_2^2}=(r_2^2+1)r_1^2,$$

ou, après division par $r_1^2r_2^2(r_1^2+1)$, à

$$\frac{1}{r_1^2},\quad \frac{1}{r_1^2+1},\quad \frac{r_2^2+1}{r_2^2(r_1^2+1)}=\frac{1}{r_1^2-f^2}.$$

On peut ainsi donner à l'équation réduite de Q la forme remarquable

$$(18)\qquad \frac{x_1^2}{r_1^2}+\frac{x_3^2}{r_1^2-f^2}+\frac{x_2^2}{r_1^2+1}=0;$$

$\left|\begin{matrix}x_1\\x_4\end{matrix}\right|$ et $\left|\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\right|$ sont les distances du bipoint courant aux axes non focal et focal, et les dénominateurs correspondants sont les mêmes que dans l'équation d'une

conique à centre. En fonction des coefficients de l'équation

$$\frac{x_1^2}{A}+\frac{x_2^2}{B}+\frac{x_3^2}{C}=0,$$

on a toujours

$$r_1^2=\frac{A}{B-A},\qquad f^2=\frac{A-C}{B-A},\qquad r_1^2-f^2=\frac{C}{B-A},\qquad r_2^2=\frac{C}{B-C}.$$

Pour une cyclique de première classe, (16) montre que r_1^2 est positif, tandis que $r_1^2-f^2$ est du signe de $\frac{q_1\pm q_1}{q_3}$, donc de $1-e^2$. Par suite les trois coefficients de l'équation réduite d'une cyclique de première classe sont, ou non, de même signe, suivant qu'elle est elliptique ou hyperbolique; il équivaut de dire, comme pour les coniques à centre, que r_1^2 est supérieur ou non à f^2.

15. Les relations métriques entre les foyers et les tangentes d'une conique ont leur équivalent pour les cycliques, et l'on a le

Théorème. — *Le produit des distances des deux bifoyers* (AA'), (BB') *au cercle du champ tangent à la cyclique* Q *est constant.*

Nous en donnerons une démonstration géométrique plus loin; en voici une démonstration analytique. Q étant rapportée à ses axes, sous la forme [(1); III], avec les expressions [(4); III] des coefficients, les tangentes à Q sont les cercles λ du champ $(\lambda_j, 0)$ vérifiant l'équation tangentielle (5). Compte tenu de $\Sigma'\lambda_j^2=1$, la relation entre λ_1 et λ_2 est

$$\lambda_1^2\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_3}\right)+\lambda_2^2\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_3}\right)+\frac{1}{q_3}=0,$$

ou

$$q_2(q_1-q_3)\lambda_1^2+q_1(q_2-q_3)\lambda_2^2=q_1q_2,$$

ou enfin, grâce à [(4); III] et [(5); III],

$$a_1^2\lambda_1^2-a_2^2\lambda_2^2=\frac{(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2+(\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2}{2}. \tag{19}$$

D'autre part [(4); I] donne

$$[(AA')\lambda]^2=\frac{(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)^2}{a_3^2},$$

$$[(BB')\lambda]^2=\frac{(b_1\lambda_1+b_2\lambda_2)^2}{b_3^2}=\frac{(a_2\lambda_2-a_1\lambda_1)^2}{a_3^2}.$$

On peut écrire

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda]=\frac{\lambda_2^2a_2^2-\lambda_1^2a_1^2}{a_3^2},$$

où le second membre est réel en même temps que λ et (BB′), mais en outre positif ou négatif suivant que les deux bifoyers sont, ou non, du même côté du cercle; cette expression est imaginaire pure lorsque λ est réel et (BB′) imaginaire. Enfin, (19) entraîne notre proposition, avec l'expression du produit

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda] = \frac{(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2}{-2a_4^2}. \tag{20}$$

A l'aide de (16) et (17), le second membre s'écrit encore

$$\frac{a_2^2 r_2^2}{a_1^2 + a_2^2} = (f^2+1)r_2^2 = r_1^2 - f^2,$$

d'où la formule, remarquable par sa similitude avec celle des coniques,

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda] = r_1^2 - f^2. \tag{21}$$

Réciproquement, *l'enveloppe des cercles du champ, dont le produit des distances à deux bipoints* (AA′), (BB′) *est constant, est une cyclique de bifoyers* (AA′), (BB′). Soit $\Sigma' \lambda_j x_j = 0$ le cercle variable λ tel que

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda] = \text{const.} = p.$$

Cette condition se traduit, entre les coefficients, par la relation

$$a_1^2\lambda_1^2 - a_2^2\lambda_2^2 + pa_4^2 = 0,$$

ou, sous forme homogène, puisque $\Sigma' \lambda_j^2 = 1$,

$$(pa_4^2 + a_1^2)\lambda_1^2 + (pa_4^2 - a_2^2)\lambda_2^2 + pa_4^2\lambda_3^2 = 0.$$

Le bipoint caractéristique est défini par

$$\frac{x_1}{(pa_4^2 + a_1^2)\lambda_1} = \frac{x_2}{(pa_4^2 - a_2^2)\lambda_2} = \frac{x_3}{pa_4^2\lambda_3},$$

d'où résulte immédiatement l'équation de l'enveloppe

$$\frac{x_1^2}{pa_4^2 + a_1^2} + \frac{x_2^2}{pa_4^2 - a_2^2} + \frac{x_3^2}{pa_4^2} = 0.$$

CHAPITRE V.

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

16. Afin de permettre de mieux suivre quelques démonstrations et précisions complémentaires, il me paraît utile de signaler ici quelques faits géométriques essentiels ressortissant à la géométrie classique non euclidienne, et qui ne prétendent pas à la nouveauté. Considérons tout d'abord l'intersection d'une cyclique Q avec un cercle λ du champ. Celle-ci est définie par un bifoyer

réel (AA′) et le bicercle directeur réel (ββ′) ayant pour bicentre l'autre bifoyer (BB′), qui est réel ou non. On précise au besoin le cercle β qui correspond au point A pour que la définition de Q soit complète. Les bipoints d'intersection (MM′) de Q et λ sont les bicentres de bicercles (μμ′) passant par (AA′) et tangents à (ββ′). Cela revient à chercher les cercles μ qui passent par A ainsi que par le symétrique (inverse) A_1 de A par rapport à λ, et qui sont tangents à β. C'est une construction élémentaire, qui donne deux cercles μ, donc deux bipoints (MM′), réels ou imaginaires. Ce bipoint est réel pourvu que le cercle μ correspondant ne coupe pas la base ω, réelle, du champ. Le cercle λ est tangent pourvu que A_1 soit sur β, d'où la construction de Q par points et tangentes : A_1 étant le point courant de β, soit μ le cercle passant par A et tangent à β en A_1; son bicentre (MM′) est sur Q, et le cercle λ du champ, médiateur de (AA_1), $(A'A_1')$ est la tangente à Q en (MM′). Le cercle $(MM'A_1A_1')$ est orthogonal à (μμ′) en (A_1A_1'), donc à (ββ′); il passe donc en (BB′); il est d'autre part symétrique de (MM′AA′) par rapport à λ. Donc, *la tangente à la cyclique* Q *au bipoint* (MM′) *bissecte l'angle formé par les deux cercles qui joignent ce bipoint aux deux bifoyers.*

Lorsque Q est de première classe, on peut distinguer les deux cercles bissecteurs du triangle circulaire AMB; le bissecteur intérieur coupant l'arc de cercle AB situé d'un même côté de ω, et le bissecteur extérieur ne le traversant pas. L'un est tangent à la cyclique elliptique de bifoyers (AA′), (BB′), qui passe par (MM′); l'autre à la cyclique hyperbolique. Nous allons voir que, comme pour les coniques, *la tangente à une cyclique* Q *de première classe bissecte extérieurement ou intérieurement le triangle circulaire* AMB *suivant que* Q *est elliptique ou hyperbolique*. Q étant rapportée à ses axes et représentée par l'équation [(1); III], le cercle $\lambda(\lambda_j, 0)$ coupe le cercle (AA′BB′), qui est l'axe ω_3, au bipoint (TT′) de coordonnées $(x_1, x_2, 0, \pm x_4)$ défini par

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0,$$

donc par

$$\frac{\lambda_1}{x_2} = \frac{\lambda_2}{-x_1} = iu, \tag{1}$$

où u est essentiellement réel. D'autre part, l'élimination de λ_3 entre [(5); IV] et $\Sigma'\lambda_j^2 = 1$ donne

$$\frac{q_1 - q_3}{q_1}\lambda_1^2 + \frac{q_2 - q_3}{q_2}\lambda_2^2 = 1;$$

(TT′) est défini par

$$\frac{q_1 - q_3}{q_1}x_2^2 + \frac{q_2 - q_3}{q_2}x_1^2 = -\frac{1}{u^2} < 0.$$

Grâce à [(4); III] et [(5); III], il résulte de là que $a_2^2x_1^2 - a_1^2x_2^2$ est du signe de $(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1})a_2^2$, donc du signe de $q_1 + q_2$. Mais q_3 est négatif,

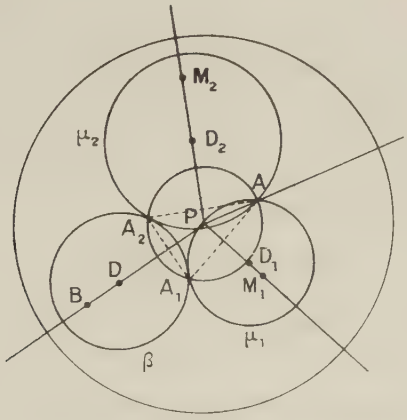
donc, compte tenu de [(9); III], ceci équivaut enfin à

$$a_2^2 x_1^2 - a_1^2 x_2^2 \, ds \, de^2 - 1. \tag{2}$$

Pour le point C du bicentre (CC'), qui est situé sur le côté AB du triangle AMB, $x_1 = 0$ et le premier membre de (2) est > 0; il ne s'annule que lorsque le point T traverse A ou B, donc le bissecteur intérieur correspond à une cyclique pour laquelle $e^2 > 1$, et l'autre à la cyclique pour laquelle $e^2 < 1$. On sait (§ 9) que les cycliques de première classe correspondantes sont les cycliques hyperboliques et elliptiques, ce qui démontre notre proposition.

17. La même démonstration que pour les coniques, faisant intervenir les bipoints conjugués, montre que si un cercle du champ rencontre Q en (MM'), (NN') et la directrice γ, associée au bifoyer (AA'), au bipoint (JJ'), le cercle (AA'JJ') bissecte les deux cércles qui joignent (AA') à (MM') et (NN'). De même, un raisonnement simple fondé sur l'involution permet de démontrer que *si* $(M_1 M_1')$ *et* $(M_2 M_2')$ *sont les bipoints de contact des deux tangentes à* Q *menées par un bipoint* (PP'), *ces deux tangentes sont vues d'un bifoyer sous le même angle et sont également inclinées sur les cercles qui joignent* (PP') *aux deux bifoyers*. En supposant que Q est de première classe, voici une démonstration plus élémentaire de ce double théorème, fondée sur l'inversion. Dans la figure transformée par une inversion de pôle P', (PP'AA'), (PP'BB'), $(PP'M_1M_1')$ et $(PP'M_2M_2')$ sont quatre rayons de la base ω du champ, centrée en P, et tous

Fig. 1.



ces bipoints sont formés par deux points inverses par rapport à ω. Sur la figure ci-dessus, sont seuls représentés les points intérieurs à ω: par exemple, (M_iM_i') $(i = 1, 2)$ est le bicentre d'un bicercle $(\mu_i\mu_i')$ dont seul μ_i est tracé, lequel passe par A et touche le cercle directeur β, de bicentre (BB'), au point A_i symétrique

de A par rapport à la droite $PM_iM'_i$. Le cercle $(BB'M_iM'_i)$, qui joint les bicentres de (BB') et $(\mu_i\mu'_i)$, passe par $(A_iA'_i)$. D'autre part, PM_1 et PM_2 sont deux médiatrices des côtés du triangle AA_1A_2, donc $PA_1 = PA_2$, de sorte que PB, médiatrice de A_1A_2, est axe de symétrie de $(BB'M_1M'_1)$ et $(BB'M_2M'_2)$. C'est la première partie de la proposition. Enfin, entre les angles orientés, on a

$$\widehat{APB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{APA_1} + \widehat{APA_2}\right) = \widehat{APM_1} + \widehat{APM_2} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi),$$

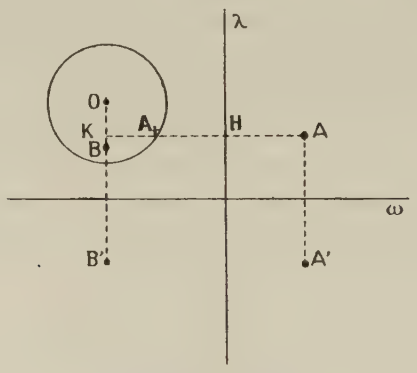
donc

$$\widehat{APM_1} + \widehat{BPM_2} = \mathrm{mult.}\,\pi,$$

ce qui démontre la deuxième partie.

18. Terminons par une démonstration géométrique de la constance du produit des distances de (AA') et (BB') à la tangente de Q. λ désigne toujours un cercle tangent à Q, et A_1 la symétrique de A par rapport à λ, situé sur le cercle directeur β. Les distances $[(AA')\lambda]$ et $[(BB')\lambda]$ se conservent dans une inversion ayant pour pôle l'un des points où λ rencontre la base ω du champ. On obtient la figure 2, où ω et λ sont deux droites orthogonales.

Fig. 2.



La formule [(2); I] nous donne ici

$$[(AA')\lambda] = 2\frac{AH}{AA'} = \frac{AA_1}{AA'},$$

$$[(BB')\lambda] = 2\frac{KH}{BB'},$$

donc

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda] = \frac{AA_1(KA + KA_1)}{AA'.BB'} = \frac{\overline{KA}^2 - \overline{KA_1}^2}{AA'.BB'}.$$

Si O désigne le centre de β, ce produit p vaut encore

$$p = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OA_1}^2}{AA'.BB'} = \frac{\mathcal{P}_\beta A}{AA'.BB'}.$$

D'autre part, la distance anallagmatique du point A au cercle β vaut (¹)

$$(A\beta) = \frac{\mathcal{P}_\beta A}{\text{diam.}\beta} = \frac{\mathcal{P}_\beta A}{k.BB'}$$

d'après [(4); II], donc

$$p = k\frac{A\beta}{AA'} = \frac{k}{2}\frac{A\beta}{A\omega}.$$

Ce dernier rapport est un invariant anallagmatique (²), donc cette expression vaut pour la figure initiale, ce qui démontre que p ne dépend pas de λ. On voit en même temps que ce produit constant est égal à

$$p = \frac{k}{2}\frac{A\beta}{A\omega} = \frac{k}{2}\frac{B\alpha}{B\omega},$$

où α est le cercle directeur de bicentre (AA'). On vérifie aisément la coïncidence de cette valeur avec [(20); IV].

(¹) *Loc. cit.*, p. 2.
(²) *Loc. cit.*, p. 3.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-DEUXIÈME.

Pages.

Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne, par M. *Octave Galvani* 1

Sur la réduction à l'ordre minimum des systèmes de courbes algébriques planes de genre quelconque, par M. *Pol Burniat* 93

Sur les suites de polynomes ou de fonctions entières à zéros réels, par M. *H. Delange*. 115

Essai sur l'application de la théorie des fonctions presque périodiques à l'arithmétique. par M. *J. Delsarte* 185

Sur un problème de géométrie différentielle projective, par M. *Élie Cartan* 205

Sur l'existence des solutions du problème de Helmholtz dans le cas des obstacles possédant des points anguleux, par M. *Julien Kravtchenko* 233

Sur quelques types spéciaux de réseaux et de congruences conjugués, par M. *Paul Vincensini* 269

Les fonctions plurisousharmoniques, par M. *Pierre Lelong* 301

Les espaces variationnels généralisés, par M. *André Lichnerowicz* 339

Propriétés métriques anallagmatiques des cycliques. par M. *René Lagrange* 385

TABLE DES MATIÈRES 419